8 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. За контрольную работу каждый из 25 школьников получил одну из оценок «3», «4» или «5». На сколько больше было пятёрок, чем троек, если сумма всех оценок равна 106?

Ответ: на 6.

Решение. Пусть a школьников получили тройку, b школьников – четверку, c школьников – пятёрку. Из условия задачи следует, что $a + b + c = 25$ и $3a + 4b + 5c = 106$.

Умножим обе части первого уравнения на 4: $4a + 4b + 4c = 100$. Теперь вычтем из второго уравнения полученное, тогда $c – a = 6$.

1.2. Из вершины прямого угла треугольника *ABC* проведена медиана *CM*. Окружность, вписанная в треугольник *CAM*, касается *CM* в её середине. Найдите угол *BAC*.

Ответ: 60°.

Решение. Обозначив через *K*, *P* и *H* точки касания окружности со сторонами треугольника *CAM* (см. рис. 1), получим: $AK = AP$, $CK = CH = MH = MP$. Следовательно, $AC = AM$. Кроме того, $CM = 0{,}5AB = AM$.

Таким образом, треугольник *CAM* – равносторонний, значит, $\angle BAC = 60°$.

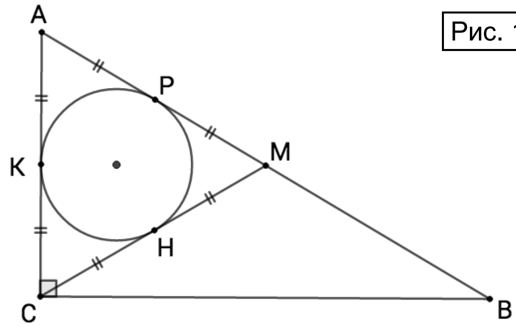


Рис. 1

1.3. Можно ли раздать шести детям 40 конфет так, чтобы у всех было разное количество конфет и у каждых двух вместе было менее половины всех конфет?

Ответ: можно.

Решение. Например, $10 + 9 + 8 + 7 + 5 + 1 = 40$, а наибольшая сумма двух – это $10 + 9 = 19 < 20$.

Существуют и другие примеры.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Сравните: $\frac{2018}{2017201720172017}$ и $\frac{2017}{2016201620162016}$.

Ответ: первая дробь меньше второй.

Решение. Так как $\frac{2018}{2017201720172017} = \frac{2018}{2017\cdot 1000100010001}$, а $\frac{2017}{2016201620162016} = \frac{2017}{2016\cdot 1000100010001}$, то достаточно сравнить дроби $\frac{2018}{2017}$ и $\frac{2017}{2016}$.

Заметим, что $\frac{2018}{2017} = 1 + \frac{1}{2017} < \frac{2017}{2016} = 1 + \frac{1}{2016}$. Следовательно, $\frac{2018}{2017201720172017} < \frac{2017}{2016201620162016}$.

2.2. Про четырехугольник известно, что существуют две прямые, каждая из которых разбивает его на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Обязательно ли он является квадратом?

Ответ: не обязательно.

Решение. Рассмотрим невыпуклый четырёхугольник *ABCD*, в котором $\angle A = \angle B = \angle D = 45°$ (см. рис. 2). Тогда каждая из прямых *BC* и *DC* делит его на два равнобедренных прямоугольных треугольника.

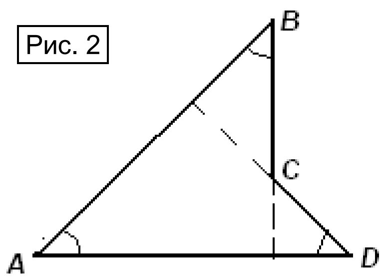


Рис. 2

2.3. Игорь записал на каждой из трёх карточек по одной цифре, отличной от нуля. Катя составила из них все возможные трёхзначные числа. Может ли сумма этих чисел равняться 2018?

Ответ: не может.

Решение. Пусть на карточках были записаны цифры a, b и c. Если они попарно различные, то Катя составила шесть чисел. Так как каждая из цифр встретится в разрядах сотен, десятков и единиц по два раза, то их сумма равна $200(a + b + c) + 20(a + b + c) + 2(a + b + c) = 222(a + b + c)$. Тогда равенство $222(a + b + c) = 2018$ выполняться не может, так как 222 делится на 3, а 2018 – не делится.

Если какие-то две цифры совпадают, например, $b = c$, то Катя составила три числа. Их сумма: $\overline{abb}+\overline{bab}+\overline{bba} = 111a + 222b$ также делится на 3. Если же $a = b = c$, то Катя составила одно трехзначное число, которое заведомо меньше, чем 2018. Таким образом, и в этих случаях сумма не может быть равна 2018.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Найдите наименьшее значение выражения $a^4 - a^2 - 2a$.

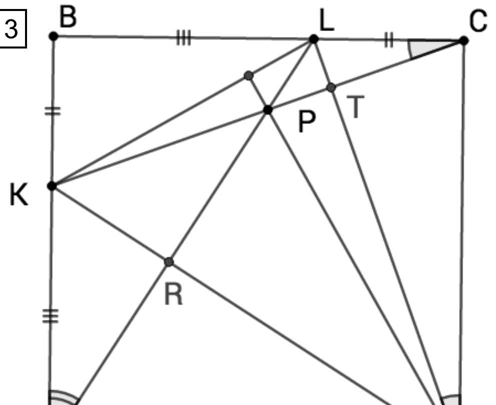
Ответ: –2.

Решение. Преобразуем данное выражение, выделяя полные квадраты: $a^4 - a^2 - 2a = (a^4 - 2a^2 + 1) + (a^2 - 2a + 1) - 2 = (a^2 - 1)^2 + (a - 1)^2 - 2$. Так как $(a^2 - 1)^2 \geq 0$ и $(a - 1)^2 \geq 0$, то $a^4 - a^2 - 2a \geq -2$, причём равенство достигается при $a = 1$.

Отметим, что если угадать ответ, то неравенство $a^4 - a^2 - 2a \geq -2$ можно доказать и по-другому. Например, так: $a^4 - a^2 - 2a - (-2) = a^4 - a^2 - 2a + 2 = a^4 - a^3 + a^3 - a^2 - 2a + 2 = a^3(a - 1) + a^2(a - 1) - 2(a - 1) = (a - 1)(a^3 + a^2 - 2) = (a - 1)((a^3 - 1) + (a^2 - 1)) = (a - 1)((a - 1)(a^2 + a + 1) + (a - 1)(a + 1)) = (a - 1)^2 \cdot (a^2 + 2a + 2) = (a - 1)^2 \cdot ((a + 1)^2 + 1) \geq 0$.

3.2. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K, а на стороне BC – точка L так, что $KB = LC$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P. Докажите, что отрезки DP и KL перпендикулярны.

Рис. 3



Решение. Пусть AL и DK пересекаются в точке R, а CK и DL – в точке T (см. рис. 3). Из условия задачи следует, что $\Delta CBK = \Delta DCL$ (по двум катетам), значит, $\angle BCK = \angle CDL$. Тогда CT – высота прямоугольного треугольника DCL, поэтому KT – высота треугольника DKL.

Аналогично, $\Delta ABL = \Delta DAK$, откуда $\angle BAL = \angle ADK$. Тогда AR – высота прямоугольного треугольника DAK, поэтому LR – высота треугольника DKL.

Таким образом, P – точка пересечения высот треугольника DKL, значит, прямая DP содержит его третью высоту, то есть $DP \perp KL$.

Отметим, что перпендикулярность CK и DL можно также доказать, используя поворот с центром C на 90°. Аналогично, используя поворот с центром A на 90°, можно доказать перпендикулярность AK и DL.

3.3. Можно ли заполнить таблицу 3×3 различными натуральными числами так, чтобы суммы в строках были равны между собой и произведения в столбцах также были равны между собой (но суммы не обязаны равняться произведениям).

Ответ: можно.

Рис. 4

1	4	40
24	15	6
30	12	3

Решение. Например, см. рис. 4. Сумма в каждой строке равна 45, произведение в каждом столбце – 720.

Подбор чисел лучше начать с условия равенства произведений в столбцах. Имеет смысл выбрать число, которое можно разложить на три множителя, по крайней мере, тремя способами так, чтобы множителями были 9 различных *натуральных чисел. Подобрать такое число будет проще, если перемножить достаточное количество первых натуральных чисел. В приведенном примере: $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 720 = 1\cdot24\cdot30 = 4\cdot12\cdot15 = 3\cdot6\cdot40$. Остается переставить эти 9 множителей так, чтобы сумма в строках оказалась одинаковой.*

Существуют и другие примеры.

Четвёртый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. При каких целых значениях m число $P = 1 + 2m + 3m^2 + 4m^3 + 5m^4 + 4m^5 + 3m^6 + 2m^7 + m^8$ является квадратом целого числа?

Ответ: при любых.

Решение. $P = (1 + m + m^2 + m^3 + m^4)^2$ (*), поэтому P является квадратом целого числа при любых целых значениях m. Получить это можно, разложив P на множители, например, так: $1 + 2m + 3m^2 + 4m^3 + 5m^4 + 4m^5 + 3m^6 + 2m^7 + m^8 = (1 + m + m^2 + m^3 + m^4) + (m + m^2 + m^3 + m^4 + m^5) + (m^2 + m^3 + m^4 + m^5 + m^6) + (m^3 + m^4 + m^5 + m^6 + m^7) + (m^4 + m^5 + m^6 + m^7 + m^8) = (1 + m + m^2 + m^3 + m^4) + m(1 + m + m^2 + m^3 + m^4) + m^2(1 + m + m^2 + m^3 + m^4) + m^3(1 + m + m^2 + m^3 + m^4) + m^4(1 + m + m^2 + m^3 + m^4) = (1 + m + m^2 + m^3 + m^4)^2$.

Догадаться, что P является квадратом многочлена можно и не раскладывая его на множители. Заметим, что при $m = 10$ $P = 1 + 2\cdot10 + 3\cdot10^2 + 4\cdot10^3 + 5\cdot10^4 + 4\cdot10^5 + 3\cdot10^6 + 2\cdot10^7 + 10^8 = 123454321 = 11111^2$ (числа такого вида являются квадратами чисел, которые записываются только единицами: $121 = 11^2$, $12321 = 111^2$, ...). Сделав обратную замену, получим равенство (*). После этого можно убедиться в его справедливости путем непосредственного возведения в квадрат выражения в правой части равенства.

Кроме того, найдя значение P, например, при $m = 1$ и $m = 2$ можно также догадаться, что P может являться квадратом многочлена. Тогда равенство (*) можно получить, используя метод неопределенных коэффициентов.

4.2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точку D так, что $BD = AC$. Докажите, что в треугольнике ACD биссектриса AL, медиана CM и высота DH пересекаются в одной точке.

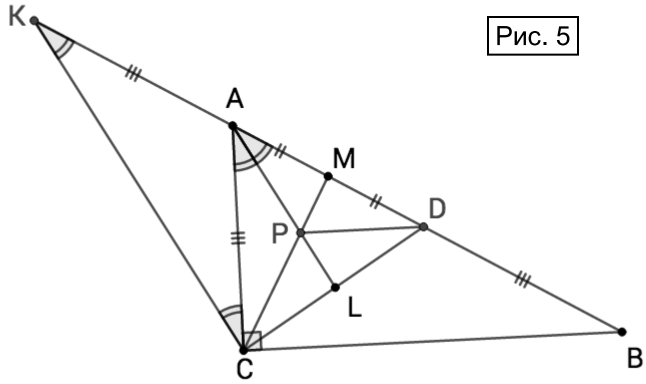


Рис. 5

Решение. Пусть AL и CM пересекаются в точке P (см. рис. 5). Тогда утверждение задачи сводится к доказательству того, что DH проходит через точку P.

На продолжении гипотенузы AB отметим точку K так, чтобы $AK = BD = AC$. Тогда $AĐ$ – биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника CAK, следовательно, $AĐ \parallel KC$. Тогда по теореме Фалеса: $\frac{MP}{PC} = \frac{MA}{AK}$.

Учитывая, что $MA = MD$ и $AK = BD$, получим: $\frac{MP}{PC} = \frac{MD}{DB}$, откуда по теореме, обратной к теореме Фалеса, следует, что $DP \parallel BC$. Так как $BC \perp AC$, то $DP \perp AC$, то есть DH проходит через точку P, что и требовалось.

4.3. В следующих многозначных числах цифры заменены буквами (одинаковые цифры – одинаковыми буквами, а разные цифры – разными буквами). Оказалось, что ДЕВЯНОСТО делится на 90, а ДЕВЯТКА делится на 9. Может ли СОТКА делиться на 9?

Ответ: не может.

Решение. Так как ДЕВЯНОСТО делится на 90, то О = 0, тогда сумма Д + Е + В + Я + (Н + С) + Т делится на 9. Так как ДЕВЯТКА делится на 9, то и сумма Д + Е + В + Я + Т + (К + А) делится на 9. Заметим, что всего в этих двух суммах присутствует девять различных букв, значит, в них использованы все цифры от 1 до 9. Сумма всех цифр от 1 до 9 равна 45, значит, Д + Е + В + Я + Т + (К + А) + (Н + С) = 45, что также делится на 9. Следовательно, К + А делится на 9 и Н + С делится на 9.

Предположим, что СОТКА делится на 9, то есть на 9 делится сумма С + Т + К + А. Так как К + А делится на 9, то С + Т делится на 9. Тогда, учитывая, что Н + С делится на 9, получим: (Н + С) – (С + Т) = Н – Т делится на 9. А это возможно только в случае, когда Н = Т. Противоречие, из которого следует, что предположение неверно, то есть СОТКА на 9 не делится.