9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Саша спускался по лестнице из своей квартиры к другу Коле, который живет на первом этаже. Когда он спустился на несколько этажей, оказалось, что он прошёл треть пути. Когда он спустился ещё на один этаж, ему осталось пройти половину пути. На каком этаже живёт Саша?

Ответ: на седьмом этаже.

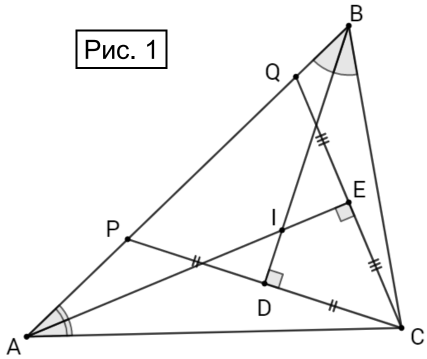
Решение. Один этаж составляет $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ часть пути Саши. Следовательно, весь путь – 6 этажей, а этаж, на котором живет Саша: 1 + 6 = 7.

1.2. На наибольшей стороне *AB* треугольника *ABC* отметили точки *P* и *Q* так, что *AQ* = *AC*, *BP* = *BC*. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника *PQC*, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

Решение. Так как треугольник *PBC* – равнобедренный, то его биссектриса *BD* является серединным перпендикуляром к отрезку *CP* (см. рис. 1). Аналогично, в равнобедренном треугольнике *QAC* биссектриса *AE* – серединный перпендикуляр к отрезку *QC*.

Таким образом точка *I* пересечения биссектрис треугольника *ABC* является и точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника *PQC*, откуда и следует утверждение задачи.

Рис. 1



1.3. Дима пишет подряд натуральные числа 12345678910111213… На каких местах, считая от начала, в первый раз будут стоять подряд три цифры 5?

Ответ: 100, 101 и 102.

Решение. Первый раз три цифры 5 подряд появятся в тот момент, когда Дима запишет числа 55 и 56. Это не случится раньше, так как две цифры 5 из трёх должны принадлежать одному числу. Перед числом 55 стоит 9 однозначных чисел и 54 – 9 = 45 двузначных. Так как 45·2 + 9 = 99, то три подряд цифры 5 будут иметь номера: 100, 101 и 102.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Даны 10 чисел: $a_1 < a_2 < ... < a_{10}$. Сравните среднее арифметическое этих чисел со средним арифметическим первых шести чисел.

Ответ: больше среднее арифметическое десяти чисел.

Решение. Требуется сравнить $\frac{a_1+a_2+...+a_{10}}{10}$ и $\frac{a_1+a_2+...+a_6}{6}$. Рассмотрим их разность: $\frac{a_1+a_2+...+a_{10}}{10} - \frac{a_1+a_2+...+a_6}{6} = \frac{3(a_1+a_2+...+a_{10})-5(a_1+a_2+...+a_6)}{30} =$ $\frac{(3a_7+3a_8+3a_9+3a_{10})-(2a_1+2a_2+...+2a_6)}{30}$ > 0, так как каждая из скобок содержит 12 слагаемых, причем любое из них в первой скобке больше любого из второй скобки. Следовательно, среднее арифметическое десяти чисел больше.

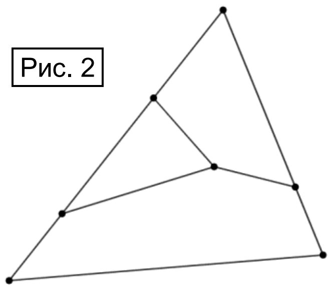
Можно обойтись и без выкладок. Действительно, рассмотрим среднее арифметическое набора из первых шести чисел. Оно меньше, чем a_6. Если к этому набору добавлять числа, которые больше его среднего арифметического, то среднее арифметическое будет увеличиваться. Значит, среднее арифметическое десяти чисел больше.

2.2. Можно ли разрезать треугольник на три выпуклых многоугольника с попарно различным количеством сторон?

Ответ: можно.

Решение. См., например, рис. 2. Треугольник разрезан на треугольник, выпуклый четырехугольник и выпуклый пятиугольник.

Рис. 2



2.3. Найдется ли такое десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырехзначное число?

Ответ: найдётся.

Решение. Рассмотрим, например число 1379246850. Если из него вычеркнуть последние шесть цифр, то останется число 1379, которое делится на 7, поэтому является составным. Если же вычеркнуть любые другие шесть цифр, то оставшееся число будет оканчиваться на четную цифру или на 5, то есть также будет составным.

Из приведенного решения следует, что годится любое число, которое начинается с 1379, а остальные цифры стоят в произвольном порядке, кроме цифры 0. Она должна стоять на одном из трех последних мест, иначе, если вычеркнуты все цифры перед нулем, то полученное число не будет четырехзначным.

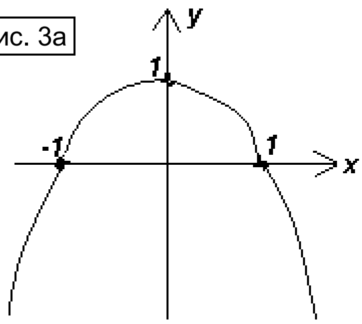
Существует и много других примеров десятизначных чисел, удовлетворяющих условию. В частности, они могут начинаться с тех же четырех цифр, так как 3791, 7931 и 9317 делятся на 7; 1397, 1793, 3179, 3971, 7139 и 9713 делятся на 11; 1937 и 7319 делятся на 13; 7391 делится на 19; 3197 делится на 23; 1739 и 9731 делятся на 37; 7913 делится на 41.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Постройте множество точек на координатной плоскости, удовлетворяющих равенству $\max(x; x^2) + \min(y; y^2) = 1$.

Ответ: см. рис. 3а.

Рис. 3а



Решение. Заметим, что при $0 < z < 1$ выполняется неравенство $z > z^2$, а при остальных значениях z выполняется неравенство $z^2 \geq z$. Таким образом, требуется рассмотреть 4 случая.

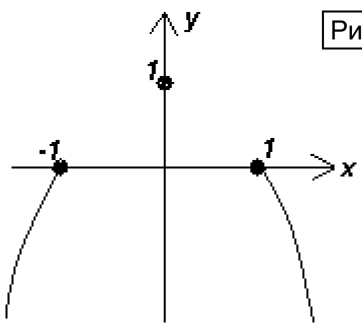
1) $x \leq 0$ или $x \geq 1$, $y \leq 0$ или $y \geq 1$. Тогда равенство примет вид: $x^2 + y = 1$. При $y > 1$ оно выполняться не может, значит, графиком является часть параболы $y = 1 - x^2$, где $y \leq 0$ или $y = 1$ (см. рис. 3б).

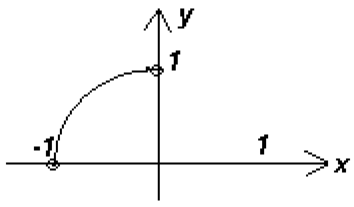
2) $x \leq 0$ или $x \geq 1$, $0 < y < 1$. Тогда равенство примет вид: $x^2 + y^2 = 1$. При $x \geq 1$ равенство выполняться не может, значит, график – четверть окружности с выколотыми концами (см. рис. 3в).

3) $0 < x < 1$, $y \leq 0$ или $y \geq 1$. Тогда равенство примет вид: $x + y = 1$. При указанных значениях переменных оно не выполняется.

4) $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Тогда равенство примет вид: $x + y^2 = 1$. Графиком является часть параболы $y^2 = 1 - x$, где $0 < x < 1$ (см. рис. 3г).

Рис. 3б





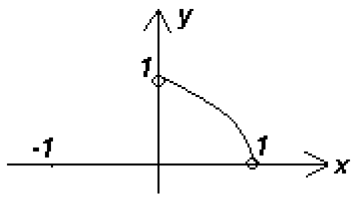


Рис. 3г

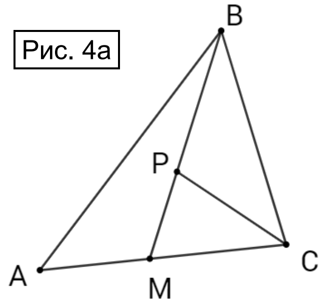
Искомое множество точек является Рис. 3в объединением этих графиков.

3.2. Внутри параллелограмма $ABCD$ расположена точка M. Сравните периметр параллелограмма и сумму расстояний от M до его вершин.

Ответ: периметр параллелограмма больше.

Решение. Первый способ.

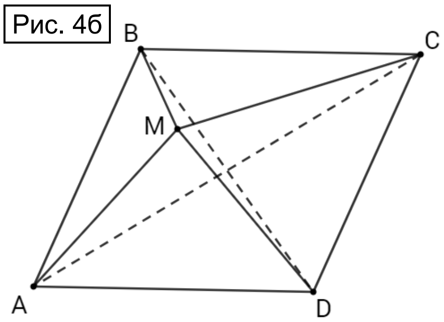
Рис. 4а



Лемма. Пусть точка P лежит внутри треугольника ABC, либо на его сторонах AB или AC. Тогда $BP + CP < AB + AC$.

Доказательство. Если точка P лежит внутри треугольника ABC, то продлим BP до пересечения со стороной AC в точке M (см. рис. 4а).Тогда, воспользовавшись неравенством треугольника для ABM и PMC, получим: $AB + AC = (AB + AM) + MC > BM + MC = BP + (PM + MC) > BP + CP$.

Рис. 4б



Если же точка P лежит на стороне AC, то она совпадает с M. Тогда второй знак неравенства заменяется на знак равенства, но утверждение остается верным.

Из условия данной задачи следует, что точка M принадлежит, по крайней мере, двум из четырех треугольников: ABC, BCD, ACD и ABD. Без ограничения общности можно считать, что M попала внутрь или на стороны треугольников ABC и ABD (см. рис. 4б).

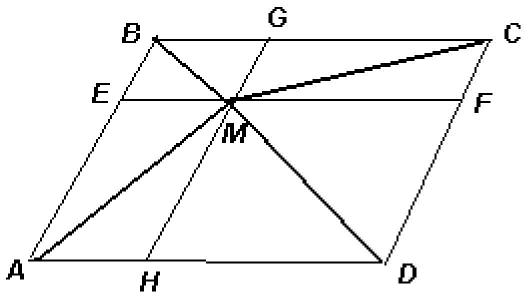


Рис. 4в

Тогда, применив доказанную лемму к этим треугольникам, получим: $AM + CM < AB + BC$ и $BM + DM < AB + AD$. Сложим полученные неравенства: $AM + BM + CM + DM < AB + BC + AB + AD = P_{ABCD}$.

Второй способ. Через точку M проведем отрезки EF и GH, параллельные сторонам параллелограмма (см. рис. 4в). Они разобьют $ABCD$ на четыре меньших параллелограмма. Используя неравенство треугольника, получим: $MA < AH + HM$ и $MC < MF + FC$. Тогда, учитывая свойства параллелограмма, $MA + MC < AD + DC$. Аналогично, $MB + MD < AB + BC$.

Таким образом, $MA + MB + MC + MD < P_{ABCD}$.

3.3. В театральной труппе 60 актеров. Каждые два хотя бы раз играли в одном и том же спектакле. В каждом спектакле занято не более 30 актеров. Какое наименьшее количество спектаклей мог поставить театр?

Ответ: 6.

Решение. *Пример*. Разобьём труппу на 4 группы по 15 человек и проведем 6 спектаклей, в каждом из которых задействованы какие-то две группы. Количество способов выбрать две группы из четырех равно $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$.

Оценка. Докажем, что пяти спектаклей не хватит. В сумме актеры сыграли не более, чем $30\cdot 5 = 150$ ролей, значит, если спектаклей пять, то найдётся актер, сыгравший не более двух ролей. Тогда он сыграл в одном спектакле не более, чем с $29\cdot 2 = 58$ коллегами из остальных 59. Следовательно, для выполнения условия задачи пяти спектаклей недостаточно.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Положительные числа x, y и z таковы, что xyz = 1. Докажите, что $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y} \le \frac{x\sqrt{x}}{2}+\frac{y\sqrt{y}}{2}+\frac{z\sqrt{z}}{2}$.

Решение. Запишем равносильное неравенство: $\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{x+z}+\frac{2z}{x+y} \le x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}$ и оценим слагаемые в его левой части, учитывая, что все данные числа положительные. Это можно сделать по-разному.

Первый способ. Используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$. Тогда $\frac{y+z}{2} \ge \sqrt{yz} \Leftrightarrow \frac{2}{y+z} \le \frac{1}{\sqrt{yz}} \Leftrightarrow \frac{2x}{y+z} \le \frac{x}{\sqrt{yz}}$. Аналогично, $\frac{2y}{x+z} \le \frac{y}{\sqrt{xz}}$ и $\frac{2z}{x+y} \le \frac{z}{\sqrt{xy}}$. Тогда, учитывая, что $\sqrt{xyz}$ = 1, получим:

$$\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{x+z}+\frac{2z}{x+y} \le \frac{x}{\sqrt{yz}}+\frac{y}{\sqrt{xz}}+\frac{z}{\sqrt{xy}} \le x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}$$

Второй способ. Используем неравенство между средним средним геометрическим и средним гармоническим: $\sqrt{ab} \ge \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Тогда $\frac{2x}{y+z} = \frac{2}{\frac{y}{x}+\frac{z}{x}} \le \sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{z}} = \sqrt{\frac{x^2}{\frac{1}{x}}} = x\sqrt{x}$, так как $yz = \frac{1}{x}$. Аналогично, $\frac{2y}{x+z} \le y\sqrt{y}$ и $\frac{2z}{x+y} \le z\sqrt{z}$. Складывая три полученных неравенства почленно, получим требуемое неравенство.

4.2. В треугольнике ABC: $\angle B$ = 110°, $\angle C$ = 50°. На стороне AB выбрана такая точка P, что $\angle PCB$ = 30°, а на стороне AC – такая точка Q, что $\angle ABQ$ = 40°. Найдите угол QPC.

Ответ: 40°.

Решение. Первый способ. Из условия задачи следует, что $\angle BPC$ = 40°, $\angle QBC$ = 70° (см. рис. 5а). Проведем луч, симметричный лучу CP относительно прямой AC. Пусть M – точка пересечения этого луча с лучом BQ. Тогда $\angle MCQ$ = $\angle PCQ$ = 20°. Так как $\angle PCM$ = 40° = $\angle PBM$, то четырехугольник $PBCM$ – вписанный, значит, $\angle MPC$ = $\angle MBC$ = 70°. Тогда из треугольника MPC получим, что $\angle PMC$ = 70° = $\angle$PÑM, то есть этот треугольник равнобедренный. Его биссектриса CÀ является серединным перпендикуляром к стороне PM, значит, точки M и P симметричны относительно нее. Следовательно, $\angle QPC$ = $\angle QMC$ = $\angle$ÂPC = 40°.

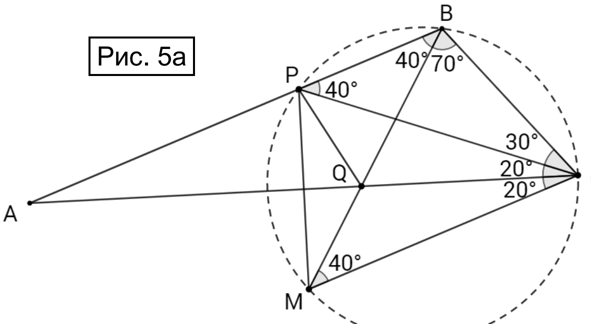


Рис. 5а

Второй способ. Отразим точку B относительно прямой AC, тогда $\angle AB'C$ = $\angle ABC$ = 110° (см. рис. 5б). Так как $\angle BAC$ = 180° – (50° + 110°) = 20° = $\angle PCA$, то PA = PC. Кроме того, $\angle APC$ = 140° = 180° – $\frac{1}{2}\angle AB'C$. Следовательно, P – центр описанной окружности треугольника $AB'C$. Тогда PA = PB', значит, $\angle PB'A$ = $\angle PAB'$ = 40°. Так как $\angle QB'A$ = $\angle QBA$ = 40° (из симметрии), то точки P,Q и B' лежат на одной прямой.

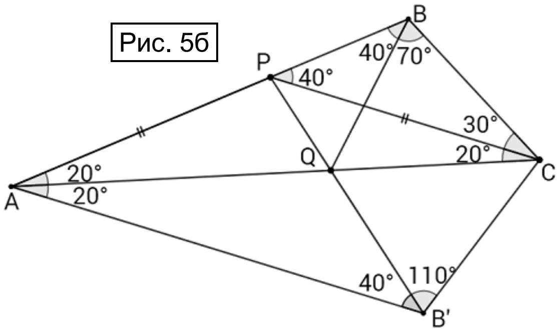


Рис. 5б

Также из симметрии, $\angle QB'C$ = $\angle QBC$ = 70°. Учитывая, что PC = PB', получим: $\angle QPC$ = 180° – 2$\angle PB'C$ = 40°.

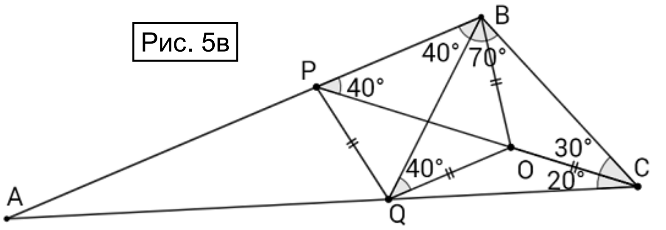


Рис. 5в

<u>Третий способ</u>. Пусть O – центр описанной окружности треугольника BCQ. Тогда $\angle QOC = 2\angle QBC = 140°$. Следовательно, $\angle OCQ = \frac{1}{2}(180° - \angle QOC) = 20° = \angle PCQ$, то есть O лежит на луче CP (см. рис. 5в). Кроме того, треугольник BCQ – остроугольный, поэтому точка O лежит внутри него.

Из условия задачи следует, что $\angle BQC = 60°$, значит, $\angle OQB = \angle BQC - \angle OQC = 40° = \angle PBQ$. Следовательно, $AB \parallel QO$. Кроме того, $\angle BĐC = 180° - (\angle ĐBC + \angle ĐCB) = 40° = \angle ĐBQ$, поэтому $PBOQ$ – равнобокая трапеция. Таким образом, $\angle QPC = \angle QBO = \angle BQO = 40°$.

4.3. Пусть N – четное число, которое не кратно 10. Найдите цифру десятков числа N^{20}.

Ответ: 7.

Решение. <u>Первый способ</u>. Заметим, что любое чётное число, не оканчивающееся нулем, при возведении в четвертую степень дает число, оканчивающееся на 6. Так как $N^{20} = (N^4)^5$, то и двадцатая степень такого числа будет оканчиваться на 6.

Так как оба числа N^4 и N^{20} делятся на 4, то по признаку делимости на 4 цифра десятков у этих чисел обязана быть нечётной. Тогда эти числа можно записать так: $N^4 = 20k + 16$; $N^{20} = (N^4)^5 = (20k + 16)^5$, где k – некоторое натуральное число.

Используя бином Ньютона, получим, что первые пять из шести слагаемых в разложении кратны ста, а 16^5 на 100 не делится. Следовательно, последние две цифры у чисел N^{20} и 16^5 совпадают. Так как $16^5 = 2^{20} = 1024^2 = 1048576$, то искомая цифра – это 7.

<u>Второй способ</u>. Вычислим две последние цифры числа N^{20}. Так как N – четное и не кратно 10, то $N = 5k \pm 1$ или $N = 5k \pm 2$, где k – некоторое натуральное число. Используя бином Ньютона, получим, что $(5k \pm 1)^{20} \equiv 1 \pmod{25}$. Аналогично, $(5k \pm 2)^{20} \equiv 2^{20} \pmod{25} \equiv 1024^2 \pmod{25} \equiv (-1)^2 \pmod{25} \equiv 1 \pmod{25}$.

.Следовательно, возможны только четыре варианта двух последних цифр: 01, 26, 51, 76. Но из четности числа N следует также, что N^{20} делится на 4, поэтому возможен только вариант 76, то есть предпоследняя цифра – это 7.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. Решите уравнение: $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 + ... + (x + 10)^2 = (x + 1 + 2 + ... + 10)^2$.

Ответ: $\pm\frac{4\sqrt{165}}{3}$.

Решение. Выполним возведение в квадрат и сгруппируем некоторые слагаемые, тогда $10x^2 + 2(1+2+\ldots+10)x + 1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2 = x^2 + 2(1+2+\ldots+10)x + (1+2+\ldots+10)^2$

Учитывая, что $1^2 + 2^2 + ... + 10^2 = \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 385$, а $(1 + 2 + ... + 10)^2 = 55^2 = 3025$, после приведения подобных слагаемых, получим: $9x^2 = 2640$, то есть $x = \pm\frac{4\sqrt{165}}{3}$.

5.2. Окружность касается сторон AB, BC и CD параллелограмма $ABCD$ в точках K, L и M соответственно. Докажите, что прямая KL делит пополам высоту параллелограмма, опущенную из вершины C на AB.

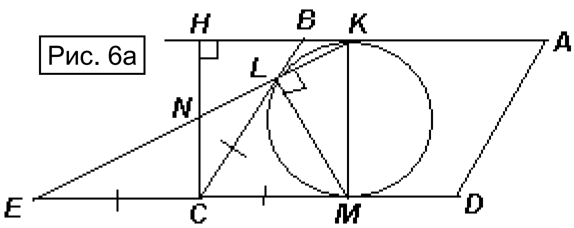


Рис. 6а

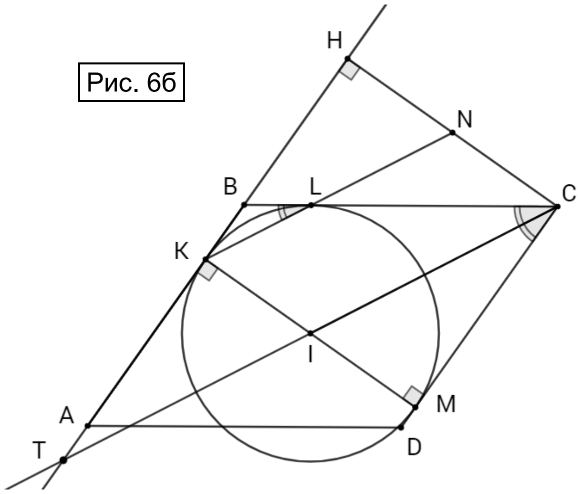
Решение. Пусть CH – высота параллелограмма, а прямая KL пересекает ее в точке N (см. рис. 6 а, б).

<u>Первый способ</u>. Продлим KL до пересечения с прямой CD в точке E (см. рис. 6а). Так как MK – диаметр окружности, то $\angle KLM = 90°$,

тогда треугольник *ELM* – прямоугольный. Учитывая, что *CL* = *CM*, получим, что *LC* – его медиана, проведенная к гипотенузе. Следовательно, *CE* = *CM* = *HK*. Значит, прямоугольные треугольники *CEN* и *HKN* равны (по катету и острому углу), поэтому *CN* = *HN*, что и требовалось.

Второй способ. Пусть *I* – центр окружности, тогда *CI* – биссектриса угла *BCD* (см. рис. 6б). Продлив ее до пересечения с прямой *AB* в точке *T* и воспользовавшись тем, что биссектриса угла параллелограмма отсекает равнобедренный треугольник, получим, что *BT* = *BC*. Кроме того, *BK* = *BL*, значит, *KL* || *CT* (*например, из подобия треугольников BKL и BTC*).

Рис. 6б



Так как *KM* – диаметр окружности, а *I* – его середина, то равны прямоугольные треугольники *TKI* и *CMI* (по катету и острому углу). Учитывая, что *KHCM* – прямоугольник, получим: *KT* = *MC* = *KH*. Тогда, воспользовавшись теоремой Фалеса для угла *THC*, получим, что прямая *KL* делит высоту *CH* пополам, что и требовалось.

5.3. Семь грибников собрали вместе 100 грибов. Обязательно ли найдутся два грибника, собравшие вместе не менее, чем 36 грибов, если количества грибов, собранных каждым, попарно различаются?

Ответ: не обязательно.

Решение. Пусть, например, грибники собрали 10, 12, 13, 14, 16, 17 и 18 грибов соответственно. Тогда любая пара вместе собрала не более, чем 35 грибов, а 10 + 12 + 13 + 14 + 16 + 17 + 18 = 100.