10 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Сравните: $\sqrt[9]{9!}$ и $\sqrt[8]{8!}$. (*Напомним, что n! = 1·2·...·n.*)

Ответ: $\sqrt[9]{9!}$ > $\sqrt[8]{8!}$.

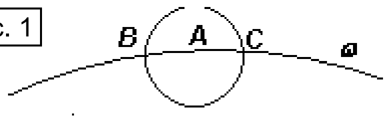
Решение. Так как $\left(\sqrt[9]{9!}\right)^{72}$ = $(9!)^8$, а $\left(\sqrt[8]{8!}\right)^{72}$ = $(8!)^9$, то достаточно сравнить эти числа. Воспользуемся тем, что 9! = 9·8!, а оформить решение можно по-разному.

<u>Первый способ</u>. $\dfrac{(9!)^8}{(8!)^9} = \dfrac{9^8\cdot(8!)^8}{(8!)^9} = \dfrac{9^8}{8!} = \dfrac{9\cdot 9\cdot\ldots\cdot 9}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 8} = \dfrac{9}{1}\cdot\dfrac{9}{2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{9}{8} > 1$. Следовательно, $(9!)^8 > (8!)^9$.

<u>Второй способ</u>. $(9!)^8 - (8!)^9$ = $(9\cdot 8!)^8 - (8!)^9$ = $(8!)^8\left(9^8 - 8!\right)$ = $(8!)^8\left(\underbrace{9\cdot 9\cdot\ldots\cdot 9}_{8\,сомножителей} - \underbrace{8\cdot 7\cdot\ldots\cdot 1}_{8\,сомножителей}\right)$ > 0. Следовательно, $(9!)^8 > (8!)^9$

1.2. Каждая сторона треугольника меньше, чем 1. Может ли радиус окружности, описанной около него, быть больше, чем 2019?

Рис. 1



Ответ: может.

Решение. <u>Первый способ</u>. Рассмотрим, например, окружность ω радиуса 2020 и отметим на ней произвольную точку *A* (см. рис. 1). Проведем окружность с центром в точке *A* радиуса 0,5. Пусть она пересечет ω в точках *B* и *C*, тогда *AB* = *AC* = 0,5. Треугольник *ABC* – искомый, так как он вписан в окружность ω и *BC* < *AB* + *AC* = 1.

<u>Второй способ</u>. Рассмотрим, например, равнобедренный треугольник с боковой стороной *a* = 0,5 и таким углом α при основании, что $\sin\alpha$ = 0,0001. Тогда по неравенству треугольника его третья сторона меньше 1, а по теореме синусов радиус описанной окружности равен $\dfrac{a}{2\sin\alpha}$ = $\dfrac{0{,}5}{2\cdot 0{,}0001}$ = 2500 > 2019.

1.3. Сколько существует трехзначных чисел, у которых произведение цифр меньше трех?

Ответ: 175.

Решение. Если произведение цифр меньше трех, то оно равно 0, 1 или 2. Рассмотрим эти три случая.

1) Произведение цифр равно 0. Значит, вторая или третья цифра числа равна нулю. Если только вторая цифра равна нулю, то в разряде сотен, так же как и в разряде единиц, может стоять любая из девяти ненулевых цифр, поэтому таких чисел 9·9 = 81. Аналогично, чисел, в которых только третья цифра равна нулю, также 81. Если же и вторая, и третья цифры равны нулю, то таких чисел 9.

2) Произведение цифр равно 1. Такое число только одно – 111.

3) Произведение цифр равно 2. Значит, одна из цифр числа равна 2, а две другие – это 1. Таких чисел три: 112, 121 и 211.

Таким образом, всего чисел, удовлетворяющих условию: 81 + 81 + 9 + 1 + 3 = 175.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^6 + 2y^6 + 3z^6 = 1, \\ x^4 + 2y^4 + 3z^4 = 1 \end{cases}$.

Ответ: (1; 0; 0); (–1; 0; 0).

Решение. Из условия следует, что $|x| \le 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$. Рассмотрим два случая:

1) Если $|x| = 1$, то $y = z = 0$.

2) Если $|x| < 1$, то $1 = x^4 + 2y^4 + 3z^4 > x^6 + 2y^6 + 3z^6 = 1$, то есть в этом случае решений нет.

2.2. В угол с вершиной M вписана окружность, которая касается его сторон в точках A и B. AC – диаметр окружности. Прямая, проходящая через точку B параллельно MA, пересекает AC в точке D. В каком отношении прямая CM делит отрезок BD?

Ответ: пополам.

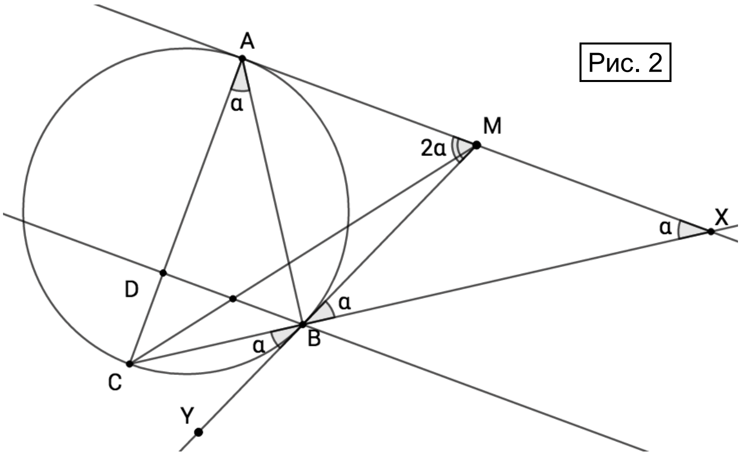


Рис. 2

Решение. Пусть прямые CB и AM пересекаются в точке X (см. рис. 2). Так как вписанный угол ABC опирается на диаметр, то $\angle ABC = 90°$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Заметим, что CM – симедиана треугольника ABC (по основному признаку симедианы). Так как $\angle MAC = 90°$, то прямые MA и AB антипараллельны. Но $BD \parallel MA$, значит, BD и AB также антипараллельны. Следовательно, CM – медиана треугольника CBD.

Второй способ. Так как ABX – прямоугольный треугольник, в котором $BM = AM$, то M – середина его гипотенузы AX. Тогда в трапеции $XADB$: M – середина основания AX, C – точка пересечения продолжений ее боковых сторон, поэтому отрезок MC содержит середину основания BD.

Доказать, что M – середина AX можно и по-другому. Пусть $\angle AMB = 2\alpha$ *Так как MA = MB и* $CA \perp AM$, *то* $\angle MAB = 90° - \alpha$, $\angle CAB = \alpha$ *(см. рис. 2). На продолжении отрезка MB за точку B отметим точку Y. Используя теорему об угле между касательной и хордой, получим:* $\angle MBX = \angle CBY = \angle CAB = \alpha$. *Так как угол AMB – внешний для треугольника MXB, то* $\angle MXB = \angle AMB - \angle MBX = \alpha$. *Следовательно, треугольник MXB – равнобедренный, значит, MX = MB = MA.*

2.3. Шесть участников математического боя сидят за круглым столом. Для улучшения результата они начинают пересаживаться. За одну пересадку меняются местами двое соседей. За какое наименьшее количество пересадок каждый участник сможет посидеть на каждом месте?

Ответ: за 15 пересадок.

Решение. *Оценка*. Каждый участник должен побывать еще на пяти местах, поэтому необходимо не менее, чем $5\cdot 6 = 30$ перемещений участников. За одну пересадку реализуется не более двух новых перемещений, следовательно, потребуется не меньше, чем 15 пересадок.

Пример. Пронумеруем сидящих за столом по часовой стрелке числами от 1 до 6. Пусть первый, третий и пятый по очереди меняются местами с соседями, двигаясь все время в одном и том же направлении, например, по часовой стрелке. Тогда через каждые три такие пересадки будут получаться следующие расположения участников: 1 2 3 4 5 6 $\to$ 2 1 4 3 6 5 $\to$ 5 4 1 6 3 2 $\to$ 4 5 6 1 2 3 $\to$ 3 6 5 2 1 4 $\to$ 6 3 2 5 4 1. Таким образом, через 15 пересадок каждый участник побывает на каждом месте.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Известно, что $5\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$. Найдите $\dfrac{tg(\alpha+\beta)}{tg\alpha}$.

Ответ: 1,5.

Решение. Первый способ. Используя определение тангенса и формулу произведения синуса и косинуса, получим: $\dfrac{tg(\alpha+\beta)}{tg\alpha} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha} =$

$\dfrac{0{,}5(\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta)}{0{,}5(\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta)} = \dfrac{6\sin\beta}{4\sin\beta} = 1{,}5.$

Второй способ. 1) Преобразуем данное равенство: $5\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta) \Leftrightarrow$ $5\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$. Разделив обе части на $\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$, получим: $\frac{tg(\alpha+\beta)}{tg\alpha} + 1 = \frac{5\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}$.

2) Рассмотрим выражение, значение которого требуется найти, вычтем из него 1 и преобразуем: $\frac{tg(\alpha+\beta)}{tg\alpha} - 1 = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha} - 1 = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}$, значит, $\frac{5tg(\alpha+\beta)}{tg\alpha} - 5 = \frac{5\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}$

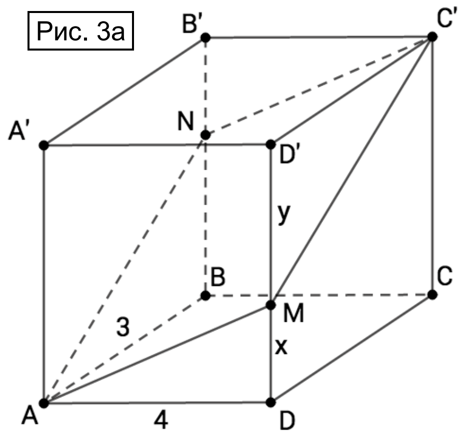
3) Таким образом, $\frac{5tg(\alpha+\beta)}{tg\alpha} - 5 = \frac{tg(\alpha+\beta)}{tg\alpha} + 1$; $\frac{4tg(\alpha+\beta)}{tg\alpha} = 6$; $\frac{tg(\alpha+\beta)}{tg\alpha} = \frac{3}{2}$.

3.2. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA*'*B*'*C*'*D*' *AB* = 3, *AD* = 4. На ребре *DD*' выбрана точка *M* так, что сечение параллелепипеда плоскостью *AC*'*M* является четырехугольником наименьшего периметра. В каком отношении точка *M* делит ребро *DD*'?

Ответ: *DM* : *MD'* = 4 : 3.

Решение. Так как плоскость сечения пересекает параллельные грани куба по параллельным прямым, то указанным сечением является параллелограмм *AMC'N* (см. рис. 3а). Значит, его периметр будет наименьшим тогда и только тогда, когда наименьшей будет длина ломаной *AMC'*.

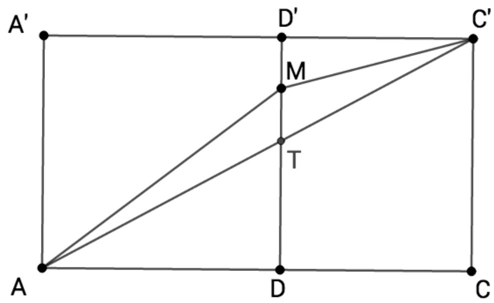
Рис. 3а



Рассмотрим развертку граней *AA*'*D*'*D* и *DD*'*C*'*C* на плоскость (см. рис. 3б). Так как *AM* + *MC*' ≥ *AC*', то длина ломаной *AMC* будет наименьшей, если точка *M* совпадет с точкой *T* пересечения *DD'* и *AC'*. Треугольники *ATD* и *C'TD* подобны, значит, *DT* : *TD*' = *AD* : *D'C*' = 4 : 3.

Отметим, что центр симметрии любого сечения содержащего диагональ AC' совпадает с центром симметрии параллелепипеда, поэтому B'N = DM и NB = D'M.

Рис. 3б



3.3. Про натуральные числа *a* и *b* известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима, а дробь $\frac{4a+3b}{5a+2b}$ сократима. На какие натуральные числа она сокращается?

Ответ: на 7.

Решение. Докажем, что указанная в условии дробь может сокращаться только на 7.

Первый способ. Пусть числа 4*a* + 3*b* и 5*a* + 2*b* делятся на *d* > 1. Тогда *d* является делителем чисел 3(5*a* + 2*b*) – 2(4*a* + 3*b*) = 7*a* и 5(4*a* + 3*b*) – 4(5*a* + 2*b*) = 7*b*. Так как числа *a* и *b* взаимно просты, то 7 делится на *d*, то есть *d* = 7.

Эту же идею решения можно оформить иначе, находя НОД(4a + 3b; 5a + 2b) с помощью алгоритма Евклида.

Второй способ. Пусть *a* = *b* + *x*, тогда данная дробь примет вид $\frac{7b+4x}{7b+5x} = 1 - \frac{x}{7a+5x}$.

Для того, чтобы полученная дробь была сократима, числа *x* и 7*a* должны иметь общий делитель *d*. Но если у чисел *a* и *d* есть общий делитель, то на него делится и число *b* = *a*

– *x*, а это противоречит тому, что числа *a* и *b* взаимно просты. Следовательно, 7 делится на *d*, то есть *d* = 7.

Дробь $\frac{4a+3b}{5a+2b}$ сокращается на 7, например, при *a* = 1, *b* = 8.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Для положительных *x*, *y* è *z* докажите неравенство: $4xyz(x + y + z) \le (y + z)^2(x + z)^2$.

Решение. <u>Первый способ</u>. Рассмотрим треугольник со сторонами $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$. Его площадь равна: $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz}$. Тогда площадь параллелограмма (со сторонами $b = y + z$, $c = z + x$ и диагональю $a = x + y$, составленного из двух таких треугольников, равна $2\sqrt{(x+y+z)xyz}$.

Эта площадь не превосходит площади прямоугольника с такими же сторонами, то есть: $2\sqrt{(x+y+z)xyz} \le (y+z)(x+z)$, откуда, после возведения в квадрат, получим требуемое неравенство.

<u>Второй способ</u>. Рассмотрим разность правой и левой частей доказываемого неравенства и преобразуем: $(y+z)^2(x+z)^2 - 4xyz(x+y+z)$ = $x^2(y+z)^2 + 2xz(y+z)^2 + z^2(y+z)^2 - 4x^2yz - 4xyz(y+z)$ = $\left(x^2(y+z)^2 - 4x^2yz\right) + \left(2xz(y+z)^2 - 4xyz(y+z)\right) + z^2(y+z)^2$ = $x^2(z-y)^2 + 2xz(z+y)(z-y) + z^2(z+y)^2$ = $\left(x(z-y) + z(z+y)\right)^2 \ge 0$.

Следовательно, $4xyz(x + y + z) \le (y + z)^2(x + z)^2$, что и требовалось.

<u>Третий способ</u>. Так как доказываемое неравенство – однородное (в обеих частях стоят многочлены четвертой степени от трех переменных), то достаточно провести рассуждение для случая, когда $x + y + z = 1$. Тогда $z = 1 - x - y$. Подставив в исходное неравенство, получим: $4xy(1-x-y) \le (1-x)^2(1-y)^2 \Leftrightarrow (1-2x+x^2)(1-2y+y^2) \ge 4xy(1-x-y)$

$\Leftrightarrow x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy - 2x - 2y + 1 - 2x^2y - 2xy^2 \ge 4xy - 4x^2y - 4xy^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2y^2 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + 2x^2y + 2xy^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2(y+1)^2 + 2x(y+1)(y-1) + (y-1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x(y+1) + y - 1)^2 \ge 0$.

4.2. В правильном треугольнике *ABC* проведена прямая, параллельная *AC* и пересекающая стороны *AB* и *BC* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите углы треугольника *CDE*, где *D* – точка пересечения медиан треугольника *BMN*, *E* – середина отрезка *AN*.

Ответ: 90°, 60° и 30°.

Решение. Из условия задачи следует, что треугольник *MBN* – правильный, поэтому его медианы *MK* и *BH* совпадают с высотами. Кроме того, средняя линия *KE* треугольника *ABN* содержит точку *H* (см. рис. 4). Далее можно рассуждать по-разному.

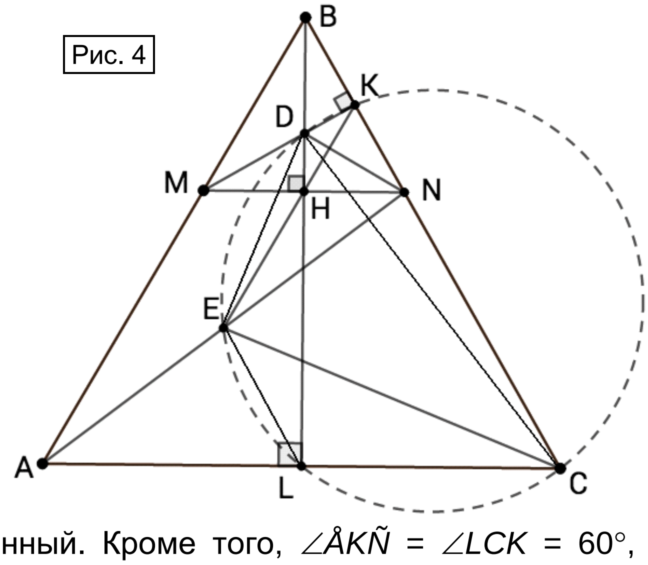


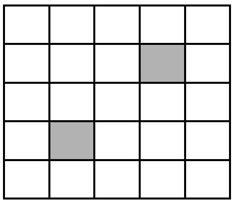
Рис. 4

<u>Первый способ</u>. Пусть *L* – середина *AC*, тогда *LE* – средняя линия треугольника *ANC*, значит, *LE* || *CN*. Следовательно, ∠*ELB* = 90° – ∠*ELA* = 90° – ∠*NCA* = 30°.

С другой стороны, *HK* = *HM*, поэтому ∠*DKH* = ∠*DMH* = 30°. Таким образом, ∠*DKÅ* = ∠*ELD*, значит, четырехугольник *EDKL* – вписанный. Кроме того, ∠*ÅKÑ* = ∠*LCK* = 60°, поэтому трапеция *CLEK* – равнобокая, значит, она вписанная. Следовательно, точка C лежит на окружности, описанной около *EDKL*. Тогда ∠*ECD* = ∠*ELD* = 30°, ∠*ÑED* = ∠*CLD* = 90°, ∠*EDC* = 60°.

Второй способ. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром D, углом –60° и коэффициентом 0,5. Образом точки B является точка K, образом точки N является точка H, поэтому образ точки C лежит на прямой KH. Учитывая, что $\frac{CN}{BN} = \frac{AM}{BM} = \frac{EH}{KH}$ получим: образом точки C является точка E. Тогда $\angle EDC$ = 60° è DE = 0,5DC. Такой треугольник EDC является прямоугольным ($\angle$ÑED = 90°), что несложно получить либо по теореме косинусов (EC = $DE\sqrt{3}$), либо удвоением стороны DE. Тогда третий угол этого треугольника равен 30°.

4.3. В таблице размером 5×5 как-то расставлены числа от 1 до 25. Разрешается менять местами соседние числа в одной строке, если правое больше левого и соседние числа в одном столбце, если нижнее больше верхнего. Существует ли таблица, из которой за несколько таких операций можно получить таблицу, отличающуюся от исходной только тем, что числа в закрашенных клетках (см. рисунок) поменялись местами?



Ответ: не существует.

Решение. Предположим, что нашлась таблица, для которой разрешенными действиями можно поменять местами два числа в закрашенных клетках, оставив остальные числа на своих местах.

Обозначим через s_1 сумму чисел в первых двух столбцах этой таблицы, а через s_2 – сумму чисел в последних двух столбцах. Заметим, что если поменять местами два числа в одной строке, то либо каждое из чисел s_1 и s_2 не изменится, либо s_1 увеличится, а s_2 не изменится, либо s_1 не изменится, а s_2 уменьшится. Если же поменять местами два числа в одном столбце, то оба числа s_1 и s_2 не изменятся. Следовательно, разность $s_1 - s_2$ не уменьшается, поэтому число в закрашенной клетке второго столбца должно было увеличиться, а в клетке четвёртого столбца уменьшиться.

Аналогично, рассмотрев суммы чисел в первых двух и в последних двух строках таблицы, можно прийти к выводу, что число во второй снизу строке должно было уменьшиться, а в четвертой строке увеличиться. Но это противоречит полученному ранее результату. Следовательно, требуемой таблицы не существует.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. Существует ли линейная функция $f(x)$, для которой $2f(x + 2) + f(4 – x) = 2x + 5$?

Ответ: существует.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда $2(a(x+2)+b)+(a(4-x)+b) = 2x+5 \Leftrightarrow ax+4a+2b+4a+b = 2x+5$. Следовательно, $a = 2$, $16+3b = 5$, $b = -\frac{11}{3}$. Значит, $f(x) = 2x - \frac{11}{3}$.

Можно доказать, что других функций, удовлетворяющих условию задачи, нет, в том числе нет и функций, отличных от линейной. Действительно:

1) Вместо x *подставим в данное равенство* $4-x$. *Получим:* $2f(6-x)+f(x) = 13-2x$

2) Вместо x *подставим в данное равенство* $x-2$. *Получим:* $2f(x)+f(6-x) = 2x+1$

3) Умножим обе части равенства 2) на 2: $4f(x)+2f(6-x) = 4x+2$

4) Вычтем из полученного равенства равенство 1): $3f(x) = 6x-11$.

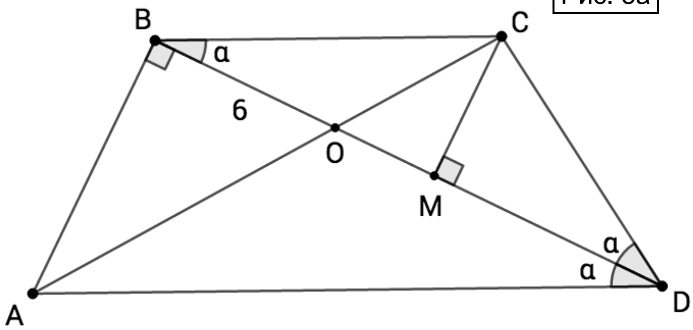
Следовательно, $f(x) = 2x - \frac{11}{3}$.

5.2. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали пересекаются в точке O, DB – биссектриса угла ADC, угол ABD – прямой, $BO = 6$. Найдите OD.

Ответ: $OD = 12$.

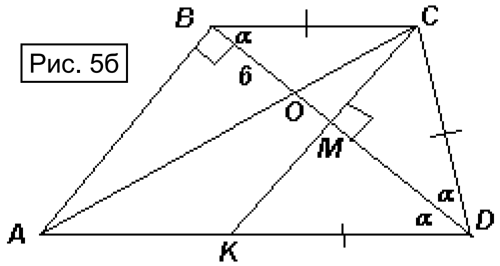
Решение. Из условия задачи следует, что $\angle CDA = \angle BDA = \angle CBD = \alpha$, значит, $BC = CD$ (см. рис. 5 а, б). Пусть M – основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на диагональ BD, тогда M – середина BD. Далее можно рассуждать по-разному.

Рис. 5а



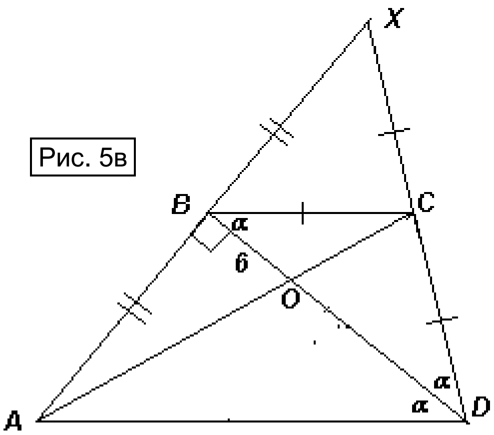
<u>Первый способ</u>. Из треугольника BCD: $BD = 2BC\cos\alpha$, а из треугольника ABD: $BD = AD\cos\alpha$ (см. рис. 5а). Следовательно, $AD = 2BC$. Тогда из подобия треугольников BOC и DOA получим, что $OD = 2OB = 12$.

Рис. 5б



<u>Второй способ</u>. Продлим CM до пересечения с AD в точке K (см. рис. 5б). Так как DM – высота и биссектриса треугольника CDK, то этот треугольник – равнобедренный и M – середина CK. Кроме того, $CK \parallel AB$, значит, $ABCK$ – параллелограмм, поэтому $CK = AB$. Тогда из подобия треугольников COM и AOB получим, что $OM = 0{,}5OB = 3$. Следовательно, $OD = OM + MD = 12$.

Рис. 5в



<u>Третий способ</u>. Пусть продолжения боковых сторон данной трапеции пересекаются в точке X (см. рис. 5в). Тогда треугольник XBD – прямоугольный, а из равенства $BC = CD$, доказанного выше, следует, что BC – его медиана, то есть C – середина XD.

Так как DB – биссектриса и высота треугольника AXD, то этот треугольник – равнобедренный, тогда DB – его медиана. Таким образом, O – точка пересечения медиан треугольника AXD, значит, $OD = 2OB = 12$.

5.3. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя ровно в пять раз?

Ответ: не существуют.

Решение. Предположим, что такие числа существуют. Разделим каждое из них на их наибольший общий делитель d. Тогда среднее арифметическое чисел уменьшится в d раз, а их НОД будет равен единице. Значит, отношение среднего арифметического к НОД не изменится, и числа по-прежнему будут различными. Но среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел не меньше, чем $\frac{1+2+\ldots+10}{10} = 5{,}5$. Противоречие.