7 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Когда бочка пуста на 30%, она содержит на 30 литров больше меда, чем когда она заполнена на 30%. Сколько литров меда в полной бочке?

Ответ: 75 литров.

Решение. Первый способ. Если бочка пуста на 30%, значит она заполнена на 70%, то есть 30 литров составляют 40% ее объема. Следовательно, 10% объема бочки – это 7,5 л, а весь объем – это 75 л.

Второй способ. Пусть объём бочки – x литров. По условию задачи: $0{,}7x = 0{,}3x + 30$. Тогда $0{,}4x = 30$, то есть $x = 75$.

1.2. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 4 часа 12 минут?

Ответ: 54°.

Решение. Первый способ. В 12.00 каждая из стрелок направлена вертикально вверх. Найдем углы, которые каждая из стрелок составляет с этим положением в 4 часа 12 минут.

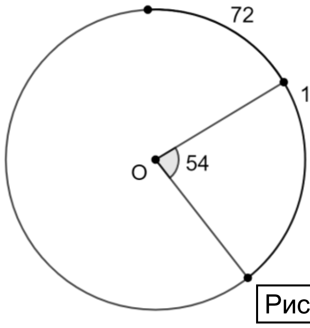


Рис. 1

Часовая стрелка каждый час поворачивается на 30°, а за 12 минут повернется еще на 30° : 5 = 6°. Таким образом, она составит с вертикалью угол, равный 126° (см. рис. 1).

Минутная стрелка за 12 минут повернется на пятую часть от своего полного оборота, то есть на 360° : 5 = 72°. Следовательно, искомый угол равен 126° – 72° = 54°.

Второй способ. В 4.00 минутная стрелка направлена вверх, а часовая прошла от вертикального положения 20 минутных делений. Еще за 12 минут минутная стрелка повернется на 12 делений, а часовая – на одно минутное деление, так как 12 минут составляют пятую часть часа. Значит, между часовой и минутной стрелкой 21 – 12 = 9 минутных делений. Учитывая, что одно минутное деление составляет 360° : 60 = 6°, получим, что угол между стрелками равен 54°.

1.3. В пачке 20 карточек: синие, красные и желтые. Синих в шесть раз меньше, чем желтых, и красных меньше, чем желтых. Какое наименьшее количество карточек надо вытащить не глядя, чтобы среди них обязательно оказалась красная?

Ответ: 15 карточек.

Решение. Если синяя карточка одна, то желтых – шесть, а красных: 20 – 1 – 6 = 13. Но тогда красных карточек больше, чем желтых, что противоречит условию.

Если синих карточек две, то желтых – 12, а красных: 20 – 2 – 12 = 6. Этот случай удовлетворяет условию. Тогда, если вытащить из пачки не более 14 карточек, то среди них могут оказаться только синие и желтые. А если вытащить 15 карточек, то среди них обязательно будет хотя бы одна красная.

Если же синих карточек не менее трех, то желтых – не меньше, чем 18, что в сумме составляет не меньше, чем 21, а карточек всего 20. Значит, этот случай невозможен.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. На бирже Цветочного города 1 лимон и 1 банан можно обменять на 2 апельсина и 23 вишни, а 3 лимона – на 2 банана, 2 апельсина и 14 вишен. Что дороже: лимон или банан?

Ответ: лимон дороже.

Решение. Обозначим стоимости одного фрукта: лимона – L, банана – B, апельсина – A, вишни – V. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Из условия задачи получим два равенства, которые должны выполняться одновременно: $\begin{cases} L + B = 2A + 23V \\ 3L = 2B + 2A + 14V \end{cases}$. Умножим обе части второго равенства на 2: $6L = 4B + 4A + 28V$ Используя первое равенство, получим: $4A + 28V > 2A + 23V = L + B$. Следовательно, $6L > 4B + L + B$, откуда $L > B$.

Второй способ. Предположим, что $L \le B$; тогда $2L \le 2B$. Тогда, так как 3 лимона можно обменять на 2 банана, 2 апельсина и 14 вишен, то $L \ge 2A + 14V$. Используя теперь, что 1 лимон и 1 банан обмениваются на 2 апельсина и 23 вишни, получим: $B \le 9V < 14V + 2A \le L$, то есть $B < L$. Это противоречит исходному предположению, значит, лимон дороже банана.

2.2. Точки *A*, *B* и *C* лежат на прямой *m*, а точки *D* и *E* на ней не лежат. Известно, что *AD* = *AE* и *BD* = *BE*. Докажите, что *CD* = *CE*.

Решение. Так как *AD* = *AE*, то точка *A* лежит на серединном перпендикуляре к отрезку *DE* (см. рис. 2). Аналогично точка *B* лежит на серединном перпендикуляре к *DE*. Учитывая, что двумя точками прямая определяется однозначно, получим: прямая *AB* – серединный перпендикуляр к отрезку *DE*. Так как точка *C* лежит на серединном перпендикуляре к *DE*, то *C* равноудалена от *D* и *E*, то есть *CD* = *CE*, что и требовалось.

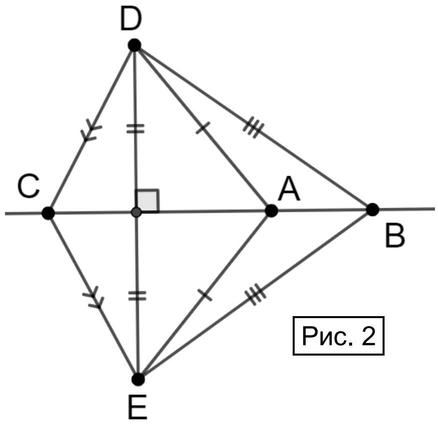
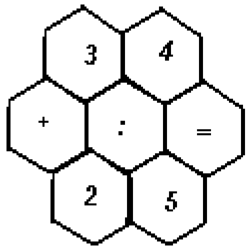


Рис. 2

Можно также рассуждать, используя равенство треугольников, но это более громоздко и потребует отдельного доказательства того, что точки D и E лежат в разных полуплоскостях относительно прямой ÀÂ, а также рассмотрения различных случаев взаимного расположения на прямой точек A.B и C.

2.3. В шестиугольниках записаны цифры и знаки арифметических действий так, как показано на рисунке. Требуется, начав с одного из шестиугольников и переходя в соседний, обойти все по одному разу. При этом надо записывать в строку то, что в них написано, и в итоге получить верное равенство. Какое?



Ответ: 5 = 4 : 2 + 3.

Приведенный ответ – единственный, но доказывать это не требуется.

Третий тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

3.1. Велосипедист проехал из пункта A в пункт B, где пробыл 30 минут, и вернулся в A. По пути в B он обогнал пешехода, а через 2 часа встретился с ним на обратном пути. Пешеход прибыл в B одновременно с тем, когда велосипедист вернулся в A. Сколько времени потребовалось пешеходу на путь из A в B, если его скорость в четыре раза меньше скорости велосипедиста?

Ответ: 10 часов.

Решение. Первый способ. Расстояние, которое пешеход проходит за 2 часа, примем за единицу. Тогда велосипедист проезжает это же расстояние за 30 минут. С момента первой встречи пешеход прошел одну единицу, а велосипедист проехал три единицы (полчаса он отдыхал в пункте B). Значит, расстояние от точки их второй встречи до пункта B равно одной единице. Тогда после второй встречи пешеход пройдет еще одну единицу, а велосипедист за это время проедет 4 единицы. Поэтому расстояние между A и B равно 5 единицам, следовательно, пешеходу на путь из A в B потребовалось 10 часов.

Второй способ. Пусть *v* км/ч – скорость пешехода, тогда скорость велосипедиста – 4*v* км/ч. Пусть также первая встреча велосипедиста и пешехода произошла на расстоянии *x* км от пункта B. Тогда за 2 часа, которые прошли до второй встречи, пешеход прошел 2v км и оказался на расстоянии *x* – 2*v* км от пункта B, а велосипедист проехал расстояние 1,5·4*v* = 6*v* (км) и оказался на расстоянии 6*v* – *x* км от пункта B. Следовательно, *x* – 2*v* = 6*v* – *x*, откуда *x* = 4*v*. Значит, точка первой встречи находится от пункта B на расстоянии, которое велосипедист проезжает за час, а точка второй встречи – на расстоянии, которое велосипедист проезжает за полчаса. Так как через 2 часа после второй встречи пешеход окажется в пункте B, а велосипедист в пункте A, то велосипедисту на путь из B в A понадобилось 2,5 часа. Следовательно, пешеходу на путь из A в B понадобится в 4 раза больше, то есть 10 часов.

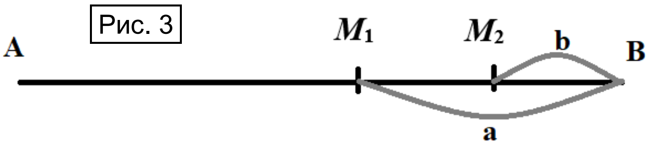
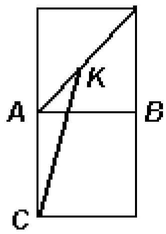


Рис. 3

<u>Третий способ</u>. Пусть первая встреча произошла в точке M_1, а вторая – в точке M_2, причем $M_1B = a$ км, $M_2B = b$ км (см. рис. 3). Тогда путь M_1BM_2, который составляет $a + b$ (км), велосипедист проехал за 1,5 часа, поэтому его скорость равна $\frac{2}{3}(a+b)$ км/ч. Так как скорость пешехода в 4 раза меньше, то она равна $\frac{1}{6}(a+b)$ км/ч.

По условию путь M_1M_2, который составляет $a - b$ км, пешеход прошел за 2 часа. Следовательно, $\frac{1}{6}(a+b)\cdot 2 = a-b$, откуда $a = 2b$. Значит, скорость пешехода равна $0{,}5b$ км/ч. Так как велосипедист проезжает путь M_2A за такое же время, за какое пешеход проходит путь $M_2B = b$ км, то $M_2A = 4b$ км. Следовательно, $AB = 5b$ км. Поэтому пешеходу на путь из A в B потребуется $\frac{5b}{0{,}5b} = 10$ часов.

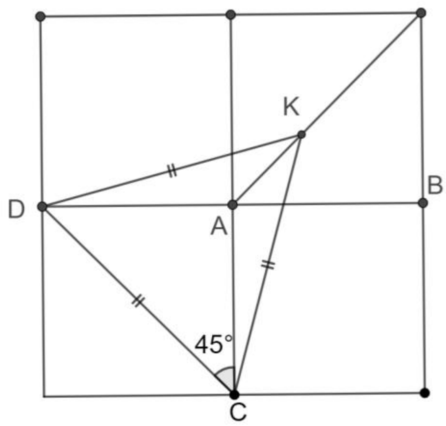


3.2. Два квадрата на рисунке имеют общую сторону AB. На диагонали одного из них отметили точку K, расстояние от которой до вершины C другого квадрата равно его диагонали. Найдите угол ACK.

Ответ: 15°.

Решение. <u>Первый способ</u>. Построим еще два квадрата с общей стороной AD так, как показано на рис. 4а, и проведем отрезки CD и DK. Тогда полученная картинка симметрична относительно прямой AK, поэтому $CK = DK$.

Рис. 4а



Кроме того, расстояние между C и K равно диагонали квадрата, значит, треугольник CDK – равносторонний, то есть каждый его угол равен 60°.

Так как ADC – равнобедренный прямоугольный треугольник, то $\angle ACD = 45°$. Следовательно, $\angle ACK = 60° – 45° = 15°$.

<u>Второй способ</u>. Проведем диагональ BC нижнего квадрата, которая параллельна диагонали AE верхнего (см. рис. 4б). Заметим, что расстояние между прямыми AE и BC равно половине диагонали квадрата, то есть равно $0{,}5CK$. Тогда длина перпендикуляра KN к прямой BC также равна $0{,}5CK$. В прямоугольном треугольнике KCN катет KN равен половине гипотенузы CK, значит, $\angle KCN = 30°$. Следовательно, $\angle ACK = \angle$ÀCN – $\angle KCN = 15°$.

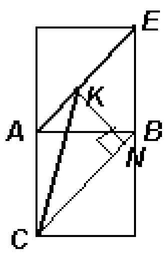


Рис. 4б

3.3. Известно, что каждое из трех двузначных чисел получается из суммы двух других чисел перестановкой цифр. Чему равна сумма всех трех чисел?

Ответ: 99.

Решение. <u>Первый способ</u>. Пусть x, y и z – данные числа. Из условия следует, что их сумма кратна 11. Действительно, если $x = \overline{ab}$, то $y + z = \overline{ba}$ и тогда $x + y + z = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$.

Любое натуральное число при делении на 9 дает такой же остаток, что и сумма его цифр. Поэтому числа $x + y$ и z дают одинаковые остатки при делении на 9, следовательно, число $x + y – z$ кратно 9. Аналогично числа $y + z – x$ и $z + x – y$ кратны 9. Значит, сумма этих трех чисел, равная $x + y + z$, делится на 9.

Таким образом, сумма $x + y + z$ кратна 99. Но так как сумма каждых двух чисел меньше, чем 100, то сумма всех трех меньше, чем 150. Следовательно искомая сумма равна 99.

Второй способ. Пусть $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ и $\overline{ef}$ – данные числа. Из условия задачи следует, что выполняются три равенства: $10a + b + 10c + d = 10f + e$; $10c + d + 10e + f = 10b + a$ и $10e + f + 10a + b = 10d + c$. Сложив эти равенства почленно, получим: $20a + 20c + 20e + 2b + 2d + 2f = 10b + 10d + 10f + a + c + e$. После упрощения это равенство примет вид: $19(a + c + e) = 8(b + d + f)$. Так как числа 8 и 19 взаимно простые, то $b + d + f$ делится на 19. Кроме того, эта сумма не больше, чем $3\cdot 9 = 27$, следовательно, $b + d + f = 19$, тогда $a + c + e = 8$. Значит, $\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = 10(a + c + e) + (b + d + f) = 10\cdot 8 + 19 = 99$.

Отметим, что числа, указанные в условии, действительно существуют. Это может быть любая тройка двузначных чисел, кратных 9, сумма которых равна 99. Например, 18, 27 и 54.

Четвертый тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

4.1. Даны 15 целых чисел, среди которых нет одинаковых. Петя записал на доску все возможные суммы по семь из этих чисел, а Вася – все возможные суммы по восемь из этих чисел. Могло ли так случиться, что они выписали на доску одни и те же наборы чисел? (*Если какое-то число повторяется несколько раз в наборе у Пети, то и у Васи оно должно повторяться столько же раз*.)

Ответ: могло.

Решение. Рассмотрим любой набор из пятнадцати целых чисел, симметричный относительно нуля. Например, последовательные целые числа от –7 до 7.

Покажем, что он удовлетворяет условию задачи. Заметим, что сумма всех чисел указанного набора равна нулю. Пусть сумма произвольного набора из семи чисел, записанных Петей, равна A, тогда сумма оставшихся восьми чисел исходного набора равна $–A$. Рассмотрим набор из восьми чисел, им противоположных. Его сумма равна A и он присутствует среди сумм, выписанных Васей. При этом различным наборам Пети соответствуют различные наборы Васи с той же суммой. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между равными суммами, записанными Петей и Васей, что и требовалось.

Существуют симметричные наборы из пятнадцати чисел, для которых все Петины суммы будут различными, например: $–3^6$; $–3^5$; ...; –1; 0; 1; ...; 3^5; 3^6. Тогда и все Васины суммы будут различными.

4.2. На катете AC прямоугольного треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM = BC$, а на катете BC – точка N так, что $BN = MC$. Найдите угол между прямыми AN и BM.

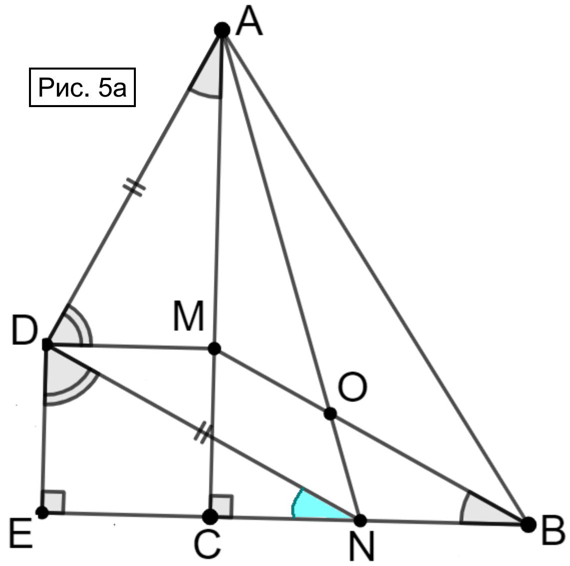
Ответ: 45°.

Решение. Пусть прямые AN и BM пересекаются в точке O, тогда угол AOM – искомый.

Первый способ. Вне треугольника ABC построим квадрат $CEDM$ (см. рис. 5а). Тогда $EN = CE + CN = CN + CM = CN + NB = CB$. Значит, прямоугольные треугольники EDN, CMB и MDA равны по двум катетам ($DE = MC = DM$ и $EN = CB = MA$). Следовательно, $ND = AD$ и $\angle EDN = \angle MDA$. Тогда $\angle ADN = \angle MDE = 90°$.

Таким образом, треугольник AND – равнобедренный и прямоугольный, значит, $\angle AND = 45°$. Кроме того, из равенства треугольников следует, что $\angle DNE = \angle MBC$, поэтому $BM \parallel ND$. Тогда $\angle AOM = \angle AND = 45°$..

Рис. 5а



Для школьников, уже знакомых со свойствами параллелограмма, можно предложить другое рассуждение.

<u>Второй способ</u>. Восставим в точке B перпендикуляр к BC, а через точку A проведем прямую, параллельную BM. Пусть они пересекаются в точке K, тогда $AMBK$ – параллелограмм (см. рис. 5б). Тогда $KB = AM = BC$, поэтому прямоугольные треугольники BMC и KNB равны (по двум катетам). Следовательно, $AK = BM = KN$. Кроме того, $\angle CBM = \angle BKN = \alpha$, значит, $\angle KBL = 90° - \alpha$, а $\angle KLB = 90°$ (L – точка пересечения BM и KN).

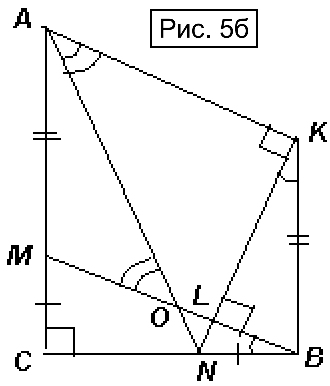


Рис. 5б

Так как $AK \parallel BM$, то $\angle AKN = \angle KLB = 90°$. Таким образом, треугольник AKN – прямоугольный и равнобедренный, значит, $\angle KAN = 45°$. Тогда, используя ту же параллельность, получим, что $\angle AOM = \angle KAN = 45°$.

4.3. Может ли являться квадратом число, десятичная запись которого состоит из нескольких (*более одной*) одинаковых цифр?

Ответ: не может.

Решение. Возведя в квадрат цифры от 0 до 9, получим что квадраты натуральных чисел могут оканчиваться только на одну из следующих цифр: 0; 1; 4; 5; 6; 9.

Кроме того, точные квадраты при делении на 4 могут давать только остаток 0 или остаток 1. Действительно, квадрат четного числа делится на 4, а квадрат нечетного числа $2n + 1$ равен $(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1$. Поэтому, используя признак делимости на 4, получим, что квадраты не могут оканчиваться на 11, 55, 66 и 99.

Число не может записываться одними нулями, поэтому осталось рассмотреть случай, когда оно состоит из четверок. Разделив его на 4 (которое само является квадратом), получим число, записываемое единицами, которое, как показано выше, квадратом не является. Значит, и число, записываемое четверками, не может быть точным квадратом.

Также можно рассуждать иначе. Указанное число представимо в виде: а$\cdot\overline{11...1}$. *Значения а, равные 2, 3, 7 и 8, исключаются, исходя из того, что на эти цифры точные квадраты оканчиваться не могут. Также а не может быть равно 5 или 6, так как в этих случаях число делится соответственно на 5 или на 2, но не делится соответственно на 25 или на 4. В оставшихся случаях, когда а равно 1, 4 или 9, достаточно показать, что число* $\overline{11...1}$ *не является точным квадратом. Действительно,* $\overline{11...1}$ *при делении на 4 дает остаток 3, что невозможно для квадратов натуральных чисел (это показано выше).*