8 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Про числа a, b и c известно, что $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (a + c)^2 = (a + b + c)^2$. Какие значения могут принимать a, b и c?

Ответ: $a = b = c = 0$.

Решение. Преобразуем обе части равенства, используя формулу квадрата суммы: $\left(a^2+2ab+b^2\right)+\left(b^2+2bc+c^2\right)+\left(a^2+2ac+c^2\right)=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$. После раскрытия скобок и приведения подобных получим, что $a^2+b^2+c^2=0$. Следовательно, $a = b = c = 0$.

1.2. Существует ли многоугольник с попарно различными сторонами, из которого после одного перегибания получается квадрат?

Ответ: существует.

Решение. Рассмотрим, например, прямоугольную трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = 5$, $BC = 4$ и меньшей боковой стороной $AB = 3$ (см. рис. 1). Ее стороны попарно различны, так как $CD=\sqrt{(AD-BC)^2+AB^2}=\sqrt{10}$.

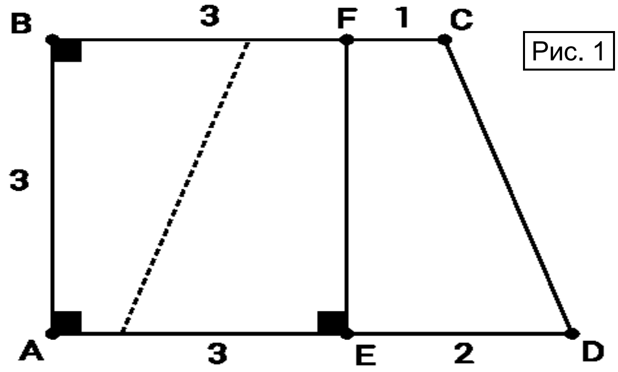


Рис. 1

На стороне BC отметим точку F так, что $CF = 1$ и опустим перпендикуляр FE на AD. Перегнув трапецию по прямой FE, получим квадрат $ABFE$ со стороной 3.

Существуют и другие примеры.

1.3. Найдите разность между наибольшим и наименьшим трехзначными числами, у каждого из которых совпадают частное и остаток при делении на 51.

Ответ: 884.

Решение. Рассматриваемые числа имеют вид: $x_n = 51n + n = 52n$, где n – натуральное число, не превосходящее 50. Так как они должны быть трехзначными, то наименьшее из них – это $x_2 = 52 \cdot 2 = 104$, а наибольшее – $x_{19} = 52 \cdot 19 = 988$. Их разность равна 884.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. При каком натуральном значении n значение выражения $\frac{3n+7}{3n-7}$ будет наименьшим?

Ответ: при $n = 2$.

Решение. Преобразуем дробь, используя почленное деление числителя на знаменатель: $\frac{3n+7}{3n-7}=\frac{3n-7+14}{3n-7}=\frac{3n-7}{3n-7}+\frac{14}{3n-7}=1+\frac{14}{3n-7}$. Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Заметим, что при $n = 1$ и $n = 2$ дробь $\frac{14}{3n-7}$ принимает отрицательные значения, а при всех остальных натуральных n – положительные. Значит, наименьшее значение выражения должно достигаться при одном из этих значений n.

Если $n = 1$, то $\frac{3n+7}{3n-7} = –2,5$; если $n = 2$, то $\frac{3n+7}{3n-7} = –13$. Таким образом, наименьшее значение исходного выражения достигается при $n = 2$.

Второй способ. Рассмотрим функцию $y = 1 + \dfrac{14}{3x-7}$. Ее графиком является гипербола с асимптотами $x = \dfrac{7}{3}$ и $y = 1$ (см. рис. 2). Значения этой функции в натуральных точках соответствуют значениям выражения, заданного в условии. Из всех точек с натуральными абсциссами ниже всех располагается точка (2; –13), значит, наименьшие значение достигается при $x = 2$.

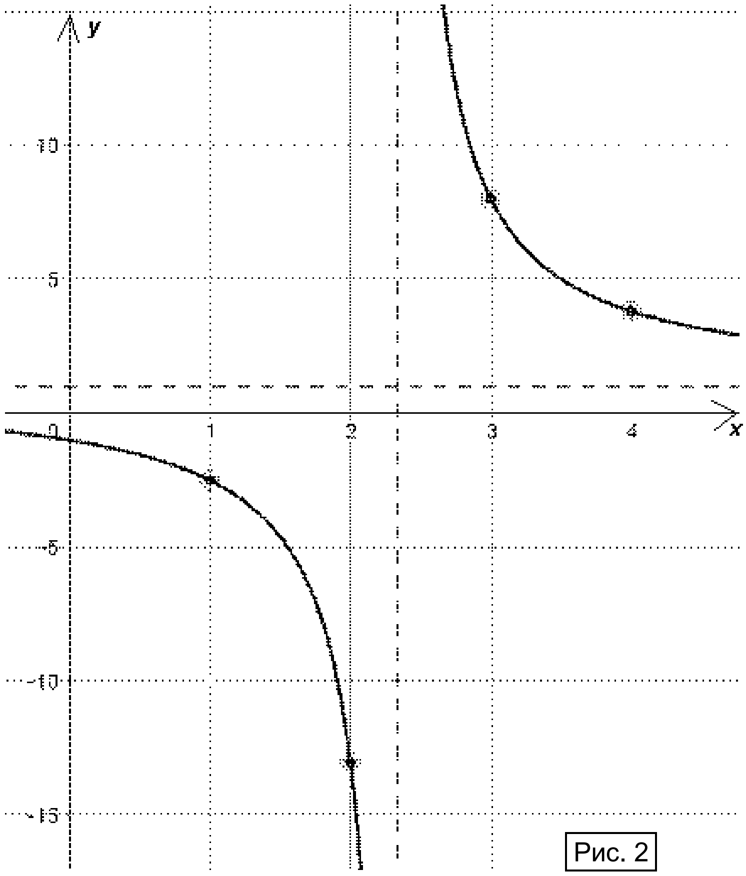


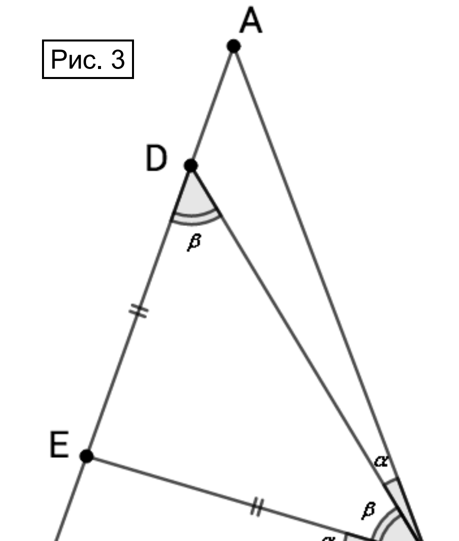
Рис. 2

2.2. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отметили точку E. На отрезке AE отложили отрезок $ED = BE$. Найдите угол DBC, если известно, что $\angle CBE = \angle DBA$.

Ответ: 60°.

Решение. Так как треугольник DBE – равнобедренный, то $\angle EBD = \angle EDB = \beta$. Пусть $\angle CBE = \angle DBA = \alpha$. Тогда $\angle B = \angle C = 2\alpha + \beta$, $\angle DBC = \alpha + \beta$ (см. рис. 3). По теореме о сумме углов для треугольника DBC: $\alpha + \beta + 2\alpha + \beta + \beta = 180°$, значит, $\alpha + \beta = 60°$.

Рис. 3



2.3. Какое наибольшее количество месяцев, содержащих по пять пятниц, может быть в одном году?

Ответ: 5 месяцев.

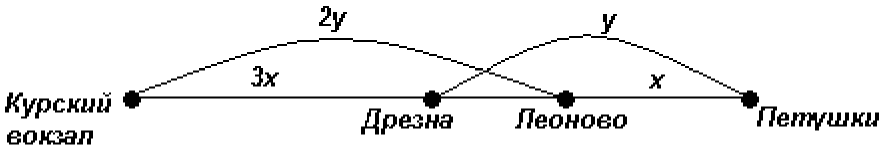
Решение. *Оценка*. В году либо 365, либо 366 дней. Так как $365 = 7 \cdot 52 + 1$, то каждый год состоит из 52 полных недель и одного или двух дополнительных дней, поэтому в году может быть не более, чем 53 пятницы. Так как в каждом месяце не меньше, чем 28 дней, то и не менее четырёх пятниц. Следовательно, пять пятниц может быть не более чем в $53 - 4 \cdot 12 = 5$ месяцах.

Пример. Из предыдущих рассуждений следует, что если 1 января попадает на пятницу, то в году будет ровно 53 пятницы и пять месяцев будут содержать по пять пятниц (*такое было, например, в 2016 году и вновь будет в 2021 году*).

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Электричка Москва – Петушки проходит начальный путь – от Курского вокзала до Дрезны – втрое дольше, чем от Леоново до Петушков. При этом на путь от Дрезны до Петушков у нее уходит в два раза меньше времени, чем от Курского вокзала до Леоново. Во сколько раз время пути от Курского вокзала до Петушков больше, чем от Дрезны до Леоново?

Ответ: в пять раз.



Решение. Обозначим время движения от Леоново до Петушков через x, а время движения от Дрезны до Петушков – через y. Тогда по условию время движения от Курского вокзала до Дрезны – $3x$, а от Курского вокзала до Леоново – $2y$ (см. схему).

Время движения от Москвы до Петушков можно найти двумя способами:

1) суммируя время движения от Курского вокзала до Леоново и от Леоново до Петушков, то есть $2y + x$;

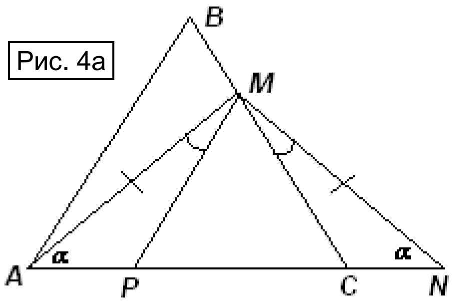
2) суммируя время движения от Курского вокзала до Дрезны и от Дрезны до Петушков, то есть $3x + y$.

Приравнивая эти выражения, получим: $2y + x = 3x + y \Leftrightarrow y = 2x$. Тогда время движения от Дрезны до Леоново равно $y - x = 2x - x = x$, а время движения от Курского вокзала до Петушков равно $3x + y = 3x + 2x = 5x$. Следовательно, искомое отношение равно пяти.

3.2. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AC за точку C – точка N, причем $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

Решение. Так как треугольник AMN – равнобедренный, то $\angle MAN = \angle MNA = \alpha$ (см. рис. 4 а, б).

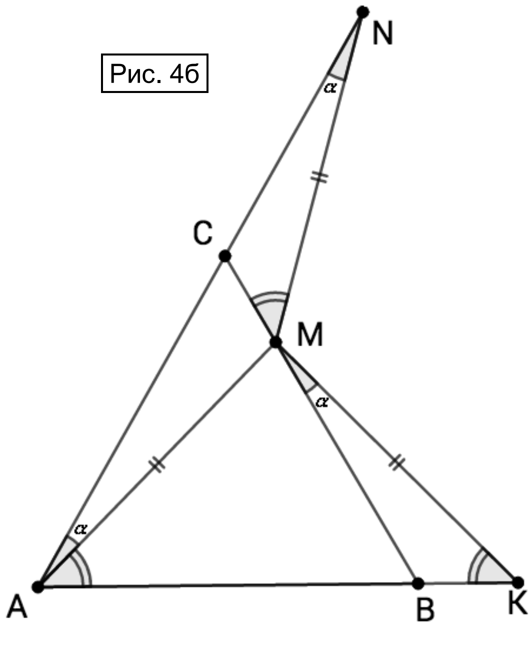
Рис. 4а



<u>Первый способ</u>. Через точку M проведем прямую, параллельную AB, до пересечения с AC в точке P (см. рис. 4а). Тогда треугольник PMC – равносторонний и $AP = BM$. Так как угол CPM – внешний для треугольника AMP, то $\angle AMP = \angle MPC - \angle MAP = 60° - \alpha$. Аналогично угол PCM – внешний для треугольника NMC, значит, $\angle NMC = 60° - \alpha$.

Таким образом, треугольники AMP и NMC равны (*это можно обосновать как по первому, так и по второму признаку равенства треугольников*). Следовательно, $BM = AP = CN$, что и требовалось доказать.

Рис. 4б



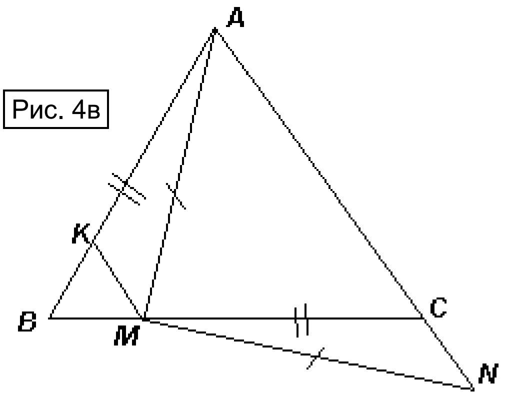
<u>Второй способ</u>. На луче AB отметим точку K так, что $MK = AM$ (см. рис. 4б). Тогда $\angle MKA = \angle MAB = 60° - \alpha$. Так как угол ACB – внешний для треугольника NCM, то $\angle CMN = \angle ACB - \angle MNA = 60° - \alpha$. Угол ABM – внешний для треугольника MBK, значит, $\angle BMK = \angle ABM - \angle MKA = 60° - (60° - \alpha) = \alpha$.

Таким образом, треугольники MNC и KMB равны (по стороне и прилежащим к ней углам), следовательно, $BM = CN$, что и требовалось доказать.

<u>Третий способ</u>. Через точку M проведем прямую, параллельную AC, которая пересечет AB в точке K (см. рис. 4в). Тогда каждый угол треугольника BMK равен 60°, то есть этот

треугольник –равносторонний. Следовательно, $\angle AKM = 120° = \angle MCN$. Кроме того, $AM = MN$ и $AK = AB - BK = AC - BM = MC$. Так как углы AKM и MCN – тупые, то их сумма не равна 180°, значит треугольники AKM и MCN равны (по четвертому признаку равенства треугольников: двум сторонам и углу, противолежащему большей стороне). Следовательно, $BM = CN$.

Рис. 4в



3.3. В каждой клетке таблицы 2019х2019 записали число 1 или число –1. Затем подсчитали произведения в каждой строке и в каждом столбце. Могла ли сумма всех полученных произведений оказаться равной 2020?

Ответ: не могла.

Решение. Первый способ. Пусть a_1, a_2, …, a_{2019} – произведения чисел по строкам, а b_1, b_2, …, b_{2019} – произведения чисел по столбцам. Тогда каждое a_i и каждое b_i (i = 1, 2, …, 2019) равно либо 1, либо –1. При этом произведение всех a_i равно произведению всех b_i, так как эти произведения равны произведению всех чисел таблицы. Следовательно, чётность количества –1 среди чисел a_i совпадает с чётностью количества –1 среди b_i, значит, среди 4038 подсчитанных произведений чётное количество –1. Но если сумма 4038 чисел, каждое из которых равно 1 или –1, равна 2020, то среди них должно быть (4038 – 2020) : 2 = 1009 минус единиц, то есть нечётное количество. Значит, сумма полученных произведений не может оказаться равной 2020.

Второй способ. Посмотрим, что происходит с суммой всех произведений по строкам и столбцам, если заменить одно из чисел в таблице на противоположное. При такой замене изменяются только произведения в строке и в столбце, в которых расположено данное число. Если оба эти произведения были равны 1, то они станут равны –1 и сумма, указанная в условии, уменьшится на 4. Если одно из произведений было равно 1, а другое –1, то каждое из них поменяет знак, а сумма не изменится. Если же эти произведения были равны –1, то они станут равны 1 и сумма увеличится на 4. Таким образом, остаток от деления на 4 всей суммы остаётся неизменным, то есть является инвариантом. Но если таблица изначально заполнена только единицами, то в ней все произведения по строкам и столбцам равны 1, а сумма этих произведений равна 4038, то есть даёт остаток 2 при делении на 4. Так как 2020 делится на 4 без остатка, то получить таблицу, в которой сумма произведений равна 2020, невозможно.

Четвёртый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. На доске были записаны четыре положительных числа. Каждый из шести школьников выбрал два из них и перемножил. В итоге все получили различные результаты, при этом у пяти школьников они были равны 2, 3, 4, 5 и 6. Найдите результат шестого школьника и докажите, что описанная ситуация возможна.

Ответ: результат шестого школьника: $\frac{12}{5} = 2,4$

Решение. Пусть на доске были записаны числа a, b, c и d. Тогда существует ровно шесть их попарных произведений: ab, cd, ac, bd, ad и bc Так как эти произведения различные, то они единственным образом разбиваются на три пары так, что произведение в каждой паре равно $abcd$. Значит, среди уже известных результатов есть две пары, в которых произведения равны.

Рассмотрим все попарные произведения уже известных результатов: 6, 8, 10, 12, 12, 15, 18, 20, 24, 30. Дважды повторяется только 12 = 2·6 = 3·4. Пусть искомый результат шестого школьника равен x, тогда $5 \cdot x = 12$, то есть $x = \frac{12}{5}$.

Покажем, что исходные числа *a*, *b*, *c* и *d*, удовлетворяющие условию задачи, действительно существуют. Из условия следует, что эти числа различные (иначе не могло быть шести различных результатов их попарного умножения). Пусть $a < b < c < d$, тогда однозначно определяется, что $ab = 2$; $ac = \frac{12}{5}$, $bd = 5$ и $cd = 6$. Далее возможны два случая: $bc = 3$ или $bc = 4$.

1) Если $bc = 3$, то $ab \cdot ac \cdot bc = (abc)^2 = 2 \cdot \frac{12}{5} \cdot 3 = \frac{72}{5}$, откуда $abc = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$, тогда $a = \frac{2\sqrt{10}}{5}$, $b = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $c = \frac{3\sqrt{10}}{5}$, $d = \sqrt{10}$.

2) Если $bc = 4$, то $ab \cdot ac \cdot bc = (abc)^2 = 2 \cdot \frac{12}{5} \cdot 4 = \frac{96}{5}$, откуда $abc = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{30}}{5}$, тогда $a = \frac{\sqrt{30}}{5}$, $b = \frac{\sqrt{30}}{3}$, $c = \frac{2\sqrt{30}}{5}$, $d = \frac{\sqrt{30}}{2}$.

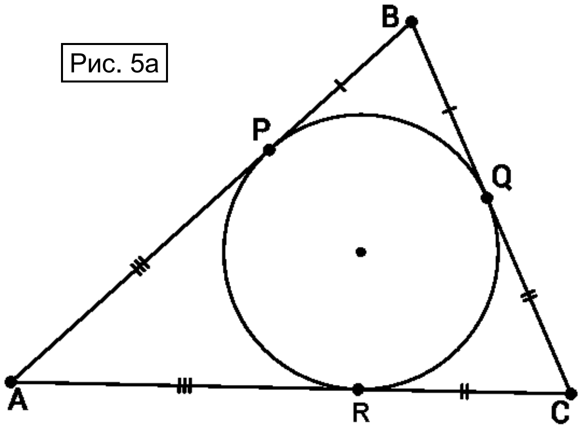
Отметим, что других примеров (с точностью до перестановок) не существует.

4.2. Дан параллелограмм *ABCD*, отличный от ромба. Вписанные окружности треугольников *ABC* и *ADC* касаются диагонали *AC* в точках *X* и *Y*. Вписанные окружности треугольников *BCD* и *BAD* касаются диагонали *BD* в точках *Z* и *T*. Докажите, что точки *X*, *Y*, *Z* и *T* являются вершинами прямоугольника.

Решение. Воспользуемся известным фактом: ***расстояние от вершины треугольника до точки касания стороны и вписанной окружности равно разности полупериметра и стороны, противолежащей этой вершине***.

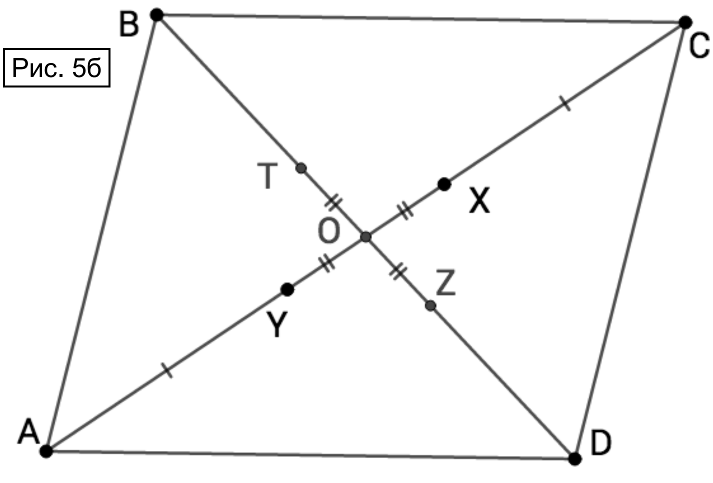
Действительно, пусть P, Q и R – точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со сторонами (см. рис. 5а). Тогда, отметив все попарно равные отрезки касательных, получим, что AP = AR, BP = BQ, CQ = CR. Следовательно, AP + BP + CR = p, значит, CR = p – AB.

Рис. 5а



Применяя это утверждение к треугольникам *ABC* и *ADC*, указанным в условии задачи, получим: $CX = p_{ABC} - AB$, $AY = p_{ADC} - CD$ (см. рис. 5б). Так как *ABCD* – параллелограмм, то треугольники *ABC* и *ADC* равны и *AB* = *CD*, следовательно, *CX* = *AY*. Значит, точка *O* пересечения диагоналей параллелограмма делит отрезок *XY* пополам.

Рис. 5б



Аналогично доказывается, что точка *O* делит пополам отрезок *TZ*, поэтому *TXZY* – параллелограмм. Докажем теперь, что *XY* = *ZT*.

Действительно, $XY = |AX - AY| = |(p_{ABC} - BC) - (p_{ADC} - CD)| = |CD - BC|$, а $ZT = |BZ - BT| = |(p_{BCD} - CD) - (p_{ABD} - AD)| = |AD - CD| = |CD - BC| = XY$.

Таким образом, в параллелограмме *TXZY* равны диагонали, то есть он является прямоугольником.

Доказать, что TXZY – параллелограмм, можно иначе: так как треугольники ABC и CDA симметричны относительно точки O пересечения диагоналей, то и точки *касания X и Y их вписанных окружностей со сторонами AC и CA соответственно симметричны относительно O. Следовательно OX = OY. Аналогично OZ = OT.*

Отметим также, что равенство XY = ZT выполняется для любого выпуклого четырехугольника.

4.3. При каких значениях n можно расположить по кругу $n > 3$ попарно различных натуральных чисел так, чтобы каждое число было равно либо наибольшему общему делителю, либо наименьшему общему кратному двух своих соседей?

Ответ: при всех четных $n > 5$.

Решение. Заметим, что если различные числа удовлетворяют условию, то у каждого числа, являющегося наибольшим общим делителем соседей, оба соседа больше его. И, наоборот, у каждого числа, являющегося наименьшим общим кратным соседей, оба соседа меньше его. Таким образом, числа чередуются по возрастанию. При нечетном n такое чередование по кругу невозможно.

Рассмотрим $n = 4$. Пусть напротив друг друга стоят меньшие числа a и b, являющиеся наибольшими общими делителями своих соседей. Тогда числа, стоящие рядом с ними, будут наименьшими общими кратными чисел a и b, то есть одинаковыми, а это противоречит условию.

Для любых четных $n \geq 6$ построим пример. Расставим $\frac{n}{2}$ различных простых чисел по кругу. Между каждыми двумя запишем их произведение. Этот набор n чисел удовлетворяет условию. Действительно, если p, q и r – различные простые числа, то НОК(p; q) = pq, а НОД(pq; qr) = q. При этом все числа, стоящие по кругу, будут различными в силу основной теоремы арифметики.