9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Существуют ли два целых числа, разность квадратов которых равна 2018?

Ответ: нет.

Решение. Пусть существуют такие целые x и y, что $x^2 - y^2 = 2018$, тогда $(x+y)(x-y) = 2018$. Далее можно рассуждать по-разному.

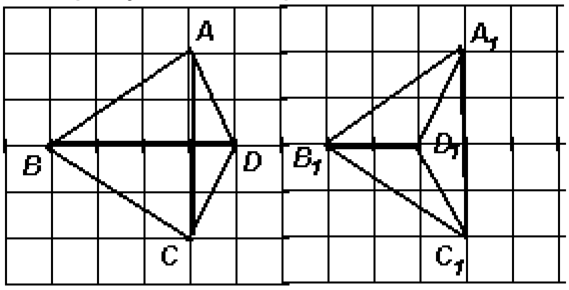
Первый способ. Так как $(x+y)-(x-y) = 2y$, то Числа $(x+y)$ и $(x-y)$ одинаковой четности. Нечетными эти числа быть не могут, так как их произведение четное. Следовательно, числа $(x+y)$ и $(x-y)$ – четные, поэтому $x^2 - y^2$ кратно 4, но 2018 не кратно 4. Противоречие.

Второй способ. 2018 = 2·1009 = (–2)(–1009) = 1·2018 = (–1)(–2018) и других разложений этого числа на множители не существует, так как 1009 – простое число. Во всех случаях полученные множители разной четности, а числа $(x+y)$ и $(x-y)$ одинаковой четности. Противоречие.

1.2. Стороны и одна из диагоналей одного четырехугольника соответственно равны сторонам и диагонали другого. Обязательно ли эти четырехугольники равны?

Ответ: не обязательно.

Рис. 1



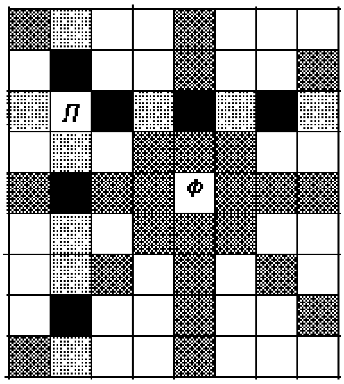
Решение. Достаточно рассмотреть, например, четырехугольник *ABCD* с перпендикулярными диагоналями и отразив вершину *D* относительно прямой *AC*, получить четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 1).

Четырехугольники *ABCD* и $A_1B_1C_1D_1$ удовлетворяют условию, но не равны.

1.3. На бесконечной шахматной доске стоят две фигуры: ладья и ферзь, из которых ни одна не бьет другую. Какое количество клеток может находиться под боем обеих фигур?

Ответ: 6 клеток.

Рис. 2



Решение. Расположим на клетчатой доске ферзя и ладью так, чтобы они не находились на одной горизонтали, вертикали или диагонали, и выделим клетки, которые они бьют. Клетки, которые бьет ладья, назовем «ладейными» (см. рис. 2). Горизонтали и вертикали, которые бьет ферзь, имеют две общие клетки с «ладейными». Кроме того, диагонали, которые бьет ферзь, имеют четыре общие клетки с «ладейными». Итого: шесть общих битых клеток.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Петя отправился пешком из лагеря в поселок. В 12.00, когда Петя был в *a* км от лагеря, его нагнал велосипедист, посадил и подвез, высадив в *a* км от поселка. После этого Петя пришел в поселок в 14.00. Сколько времени потребуется Пете на обратный путь пешком из поселка в лагерь, если известно, что на велосипеде его везли со скоростью вдвое большей, чем он ходит пешком?

Ответ: 4 часа.

Решение. Первый способ («арифметический»). За два часа обратного пути Петя пройдет *a* км и половину того расстояния, на которое его подвезли. Так как подобрали его также в *a* км от лагеря, то осталось ему пройти еще столько же, значит, весь обратный путь займет 4 часа.

Второй способ («алгебраический»). Пусть скорость Пети равна *v* км/ч, тогда скорость его езды на велосипеде равна 2*v* км/ч. Если *x* км Петя проехал на велосипеде, то расстояние от лагеря до поселка равно 2a + x (км). Составим уравнение: $\frac{a}{v}+\frac{x}{2v}=2 \Leftrightarrow$ $\frac{2a+x}{2v}=2$. Тогда $\frac{x+2a}{v}=4$, что и требуется.

2.2. Касательная к описанной окружности треугольника *ABC*, проведенная в точке *B*, пересекает прямую *AC* в точке *P*. Окружность с центром *P* и радиусом *PB* пересекает сторону *AC* в точке *Q*. Докажите, что *BQ* – биссектриса треугольника *ABC*.

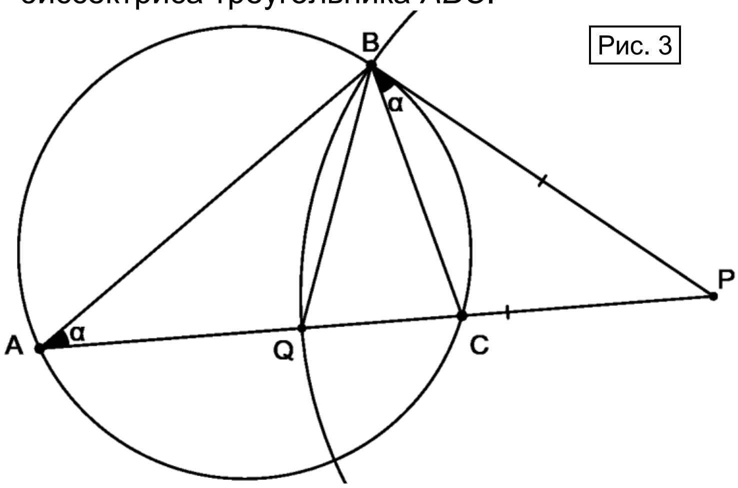


Рис. 3

Решение. Заметим, что $\angle PBC$ = $\angle BAC$ = α (угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу, см. рис. 3). Кроме того, треугольник *BPQ* – равнобедренный. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Воспользуемся тем, что $\angle PBQ = \angle PQB$. Так как *BQC* – внешний угол треугольника *ABQ*, то $\angle ABQ = \angle BQC - \alpha = \angle PBQ - \alpha = \angle CBQ$, что и требовалось.

Второй способ. Треугольники *PAB* и *PBC* подобны (по двум углам), значит, $\frac{PA}{PB}=\frac{PB}{PC}=\frac{AB}{BC}$. Тогда $PQ^2 = PB^2 = PA\cdot PC$. Кроме того, $\frac{AQ}{QC}=\frac{PA-PQ}{PQ-PC}$. Так как $\frac{PA}{PB}=\frac{PA-PQ}{PQ-PC} \Leftrightarrow PA\cdot PQ - PA\cdot PC = PA\cdot PQ - PQ^2$ и последнее равенство верное, то $\frac{AQ}{QC}=\frac{PA}{PB}$, то есть *BQ* – биссектриса треугольника *ABC*.

2.3. Найдите все такие натуральные *m* и *n*, что $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{7}$.

Ответ: *m* = *n* = 14; *m* = 56, *n* = 8; *m* = 8, *n* = 56.

Решение. Из условия задачи следует, что *m* > 7 и *n* > 7. Так как переменные входят в уравнение симметрично, то достаточно найти пары (*m*; *n*), в которых $m \ge n$.

Выразив *m* из данного уравнения, получим: $m=\frac{7n}{n-7}$. Тогда $\frac{7n}{n-7}\ge n$, то есть $n \le 14$. Таким образом, достаточно проверить *n* = 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14. Перебором получим, что *m* принимает натуральные значения в двух случаях: при *n* = 8 *m* = 56; при *n* = 14 *m* = 14.

При записи ответа учитываем симметричную пару.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Найдите наибольшее значение суммы $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}$, если $a+b+c=6$.

Ответ: 3.

Решение. Заданная сумма имеет смысл, если $a\ge 1$, $b\ge 1$ и $c\ge 1$. Пусть $x=\sqrt{a-1}$, $y=\sqrt{b-1}$, $z=\sqrt{c-1}$. Тогда $x^2+y^2+z^2=3$. Найдем наибольшее значение суммы $x+y+z$, учитывая, что каждое слагаемое принимает неотрицательные значения. Для этого оценим эту сумму «сверху».

Первый способ. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним квадратичным: $\frac{x+y+z}{3}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}=1$, откуда $x+y+z\le 3$.

Второй способ. Пусть $x+y+z=d$. Тогда, используя неравенство $m^2 + n^2 \ge 2mn$, получим: $d^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\le 3x^2+3y^2+3z^2=9$, откуда $d\le 3$.

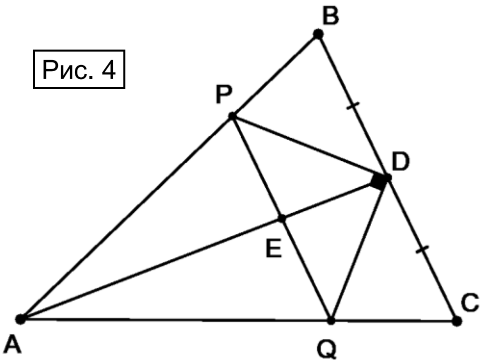
Значение 3 достигается, при $x = y = z = 1$, что соответствует $a = b = c = 2$.

3.2. В треугольнике *ABC* проведена медиана *AD*, *DP* и *DQ* – биссектрисы треугольников *ABD* и *ACD* соответственно, *E* – точка пересечения *AD* и *PQ*. Найдите *PQ*, если *DE* = 2.

Ответ: *PQ* = 4.

Решение. Воспользовавшись свойством биссектрисы треугольника, получим: $\frac{AP}{PB} = \frac{AD}{BD}$ и $\frac{AQ}{QC} = \frac{AD}{CD}$ (см. рис. 4). Так как *BD* = *CD*, то $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$, значит, *PQ* || *BC*. Тогда *E* – середина отрезка *PQ* (*следует из рассмотрения двух пар подобных треугольников или из гомотетии с центром A*)..

Рис. 4



Угол *PDQ* между биссектрисами смежных углов равен 90°, поэтому *DE* – медиана прямоугольного треугольника *PDQ*, проведенная к его гипотенузе. Следовательно, *PQ* = 2*DE* = 4.

3.3. Таблицу размером 3×3 надо заполнить числами –1, 0 и 1 так, чтобы суммы чисел в строках были одинаковыми. Сколькими способами это можно сделать? (*Способы считаются различными, если различаются полученные таблицы. Все числа использовать не обязательно.*)

Ответ: 831 способ.

Решение. 1) Сумму 3 можно получить единственным способом: 3 = 1 + 1 + 1, значит, и всю таблицу с такой суммой в каждой строке можно получить единственным способом. Аналогично и для суммы –3 = (–1) + (–1) + (–1).

2) Сумму 2 можно получить тремя способами: 2 = 1 + 1 + 0 = 1 + 0 + 1 = 0 + 1 + 1. Значит, всю таблицу можно заполнить 3^3 = 27 способами. Для суммы –2 ситуация аналогична.

3) Сумму 1 можно получить шестью способами: 1 = 1 + 0 + 0 = 0 + 1 + 0 = 0 + 0 + 1 = –1 + 1 + 1 = 1 + (–1) + 1 = 1 + 1 + (–1). Следовательно, таблицу можно заполнить 6^3 = 216 способами. Для суммы –1 ситуация аналогична.

4) Сумму 0 можно получить семью способами: 0 = 0 + 0 + 0, а также шесть перестановок чисел –1, 0 и 1. Тем самым, всю таблицу можно заполнить 7^3 = 343 способами

Итого: 1 + 27 + 216 + 343 + 216 + 27 + 1 = 831 способ.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Решите уравнение: $x\sqrt{1-x^2} + x = \sqrt{1+x^2}$

Ответ: $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

Решение. Выражения, входящие в уравнение, имеют смысл, если |*x*| ≤ 1. Кроме того, если –1 ≤ x ≤ 0, то левая часть принимает неположительные значения, а правая – положительные. Таким образом, 0 < *x* ≤ 1. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ («алгебраический»). Так как при указанных значениях *x* обе части уравнения принимают только положительные значения, то при возведении обеих частей в квадрат получим равносильное уравнение: $x^2 - x^4 + 2x^2\sqrt{1-x^2} + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow$ $x^2 - x^4 + 2x^2\sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \sqrt{1-x^2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow$ $x^4 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Полученное число лежит в указанном промежутке, так как 2 < $\sqrt{5}$ < 3 ⇔ 0,5 < $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ < 1 .⇔ $\sqrt{0{,}5}$ < $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ < 1.

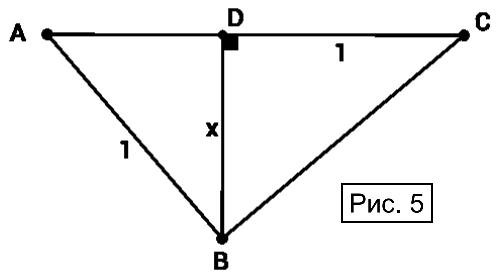


Рис. 5

Второй способ («геометрический»).

Рассмотрим треугольник *ABC*, в котором *AB* = 1, *BD* – высота, лежащая внутри треугольника, *CD* = 1, *BD* = *x* (см. рис.). Тогда *AD* = $\sqrt{1-x^2}$, *BC* = $\sqrt{1+x^2}$

Заметим, что левая часть уравнения – это $2S_{ADB} + 2S_{CDB} = 2S_{ABC}$. С другой стороны, $2S_{ABC}$ = $AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC$ = $\sqrt{1+x^2}$ ·sin∠*ABC*. Значит, sin∠*ABC* = 1, то есть ∠*ABC* = 90°.

Тогда $BD^2 = AD \cdot CD$, то есть $x^2 = \sqrt{1-x^2}$. Дальнейшие выкладки совпадают с приведенными выше.

4.2. Три стороны и диагонали одного четырехугольника соответственно равны трем сторонам и диагоналям другого. Обязательно ли эти четырехугольники равны?

Ответ: не обязательно.

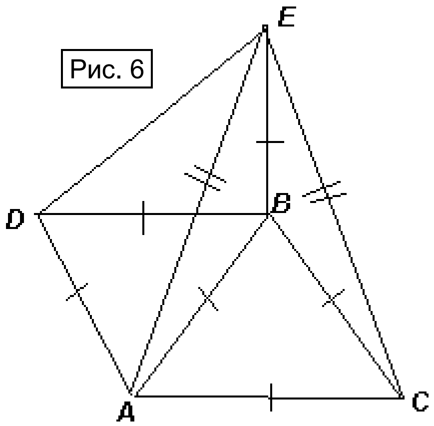


Рис. 6

Рассмотрим равносторонние треугольники *ABC* и *ABD* с общей стороной *AB*. На стороне *BD* получившегося ромба вне его построим равнобедренный прямоугольный треугольник *DBE* с гипотенузой *DE* (см. рис. 6). Проведем также отрезки *AE*, *CE* и *DE*.

Для четырехугольников *DABE* и *ACBE* выполняется условие задачи: стороны *DA* è *AB* первого соответственно равны сторонам *AC* и *CB* второго, а сторона *BE* – общая. Кроме того, *DB* = *AB* и *AE* = *CE* (в силу симметрии).

Но эти четырехугольники не равны, так как *DE* ≠ *AE* (например, потому, что ∠*ADE* = 105° > ∠*DAE*).

4.3. В шахматном турнире по круговой системе (каждый играет с каждым ровно один раз, победа – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0) каждый из шахматистов, избежавших трех последних мест, половину своих очков набрал во встречах с тремя участниками, занявшими последние три места. Найдите наибольшее возможное количество участников турнира.

Ответ: 10 шахматистов.

Решение. Пусть в турнире участвовало *n* шахматистов, тогда во встречах между шахматистами, избежавшими трех последних мест, разыграно $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ очков, а в их встречах с тремя «аутсайдерами» – $3(n-3)$ очка. Так как «аутсайдеры» могли отобрать какие-то очки у остальных, то $\frac{(n-3)(n-4)}{2} \le 3(n-3)$, откуда $n \le 10$.

Приведем пример для *n* = 10. Каждый из «аутсайдеров» во встречах между собой один раз выиграл и один раз проиграл, а всем остальным шахматистам они проиграли. Все партии между остальными семью участниками завершились вничью. Тогда каждый из «аутсайдеров» набрал 1 очко, а каждый из остальных – 6 очков, из которых 3 очка набрал во встречах с «аутсайдерами».

Существуют и другие примеры. Отметим, что если получить ответ перебором и построить пример, то оценку несложно провести прямым вычислением.

Действительно, пусть в турнире участвовало 11 человек, тогда в нем разыграно $\frac{11\cdot 10}{2}$ *= 55 очков, из которых 3 очка разыграли между собой «аутсайдеры», а Q =* $\frac{8\cdot 7}{2}$ *= 28 разыграли между собой остальные. Значит, во встречах «аутсайдеров» с остальными разыграно P = 55 – 3 –28 = 24 очка. Но для того, чтобы выполнялось* *условие задачи, должно выполняться неравенство P ≥ Q. Противоречие. Понятно, что при дальнейшем увеличении n «разрыв» между Q и P будет только увеличиваться.*

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. Составьте уравнение какого-нибудь приведённого квадратного трёхчлена $y = x^2 + px + q$, график которого пересекает оси координат в вершинах треугольника площади 15.

Ответ: например, $y = x^2 - x - 6$.

Решение. Пусть A и B – точки пересечения графика искомой функции с осью OX, C – точка его пересечения с осью OY (см. рис. 7). В приведенном примере: $A(-2; 0)$, $B(3; 0)$, $C(0; -6)$. Следовательно, $S_{ABC} = 0{,}5AB\cdot CO = 0{,}5\cdot5\cdot6 = 15$, что и требовалось.

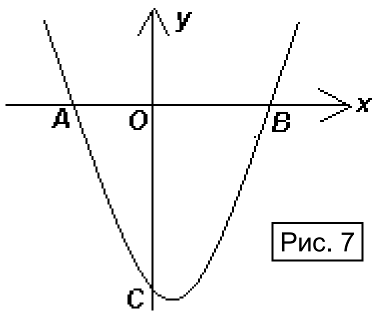


Рис. 7

Найти этот пример, а также другие возможные примеры можно, исходя из следующих рассуждений.

Так как в общем случае A(x_1; 0), B(x_2; 0), C(0; q), то $S_{ABC} = \dfrac{|x_2 - x_1|\cdot|q|}{2}$ *(см. рис. 7). Воспользуемся тем, что* $|x_2 - x_1| = \sqrt{D}$. *Действительно,* $(x_2 - x_1)^2 = x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 = (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q$. *Тогда, по условию задачи, получим:* $\sqrt{p^2 - 4q}\cdot|q| = 30$. *Любая пара (p; q), удовлетворяющая этому равенству, является решением. В частности, можно указать другие возможные ответы с целыми значениями p и q:* $y = x^2 + x - 6$; $y = x^2 \pm 4x - 5$, *а также трехчлен, график которого симметричен относительно оси OY:* $y = x^2 - \sqrt[3]{225}$.

5.2. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC пересекают AD в точках M и N соответственно. Докажите, что $AM = DN$.

Решение. Пусть серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC пересекаются в точке O – центре окружности, описанной около треугольника ABC (см. рис. 8). Проведем перпендикуляр OK к хорде AD, тогда K – середина AD. Докажем, что K – середина отрезка MN.

Действительно, $\angle ONM = \angle ANP = 90° - \angle PAN = 90° - \angle QAM = \angle OMN$, то есть треугольник MON – равнобедренный. Следовательно его высота OK является и его медианой.

Таким образом, отрезки AM и DN симметричны относительно точки K, значит, $AM = DN$.

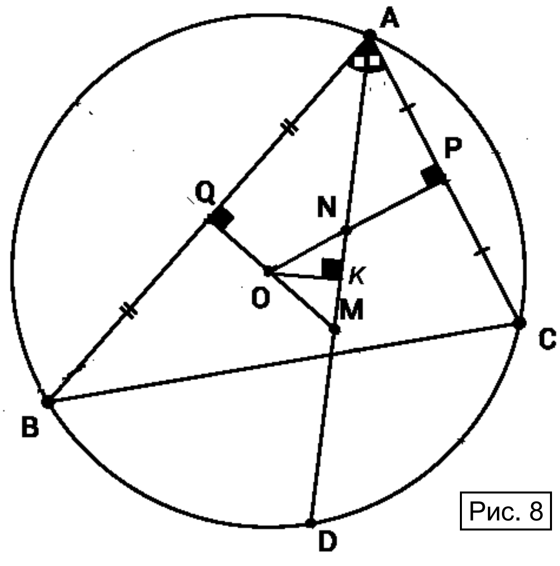


Рис. 8

5.3. Является ли простым число 16016003?

Ответ: не является.

Решение. Данное число можно разложить на множители, например, так: $16016003 = (16000000 + 16000 + 4) - 1 = (4000^2 + 2\cdot4000\cdot2 + 2^2) - 1 = (4000 + 2)^2 - 1 = 4002^2 - 1^2 = 4001\cdot4003$.

Отметим, что числа 4001 и 4003 являются простыми числами – «близнецами». Математикам до сих пор неизвестно, является ли множество пар простых чисел – «близнецов» конечным или бесконечным.