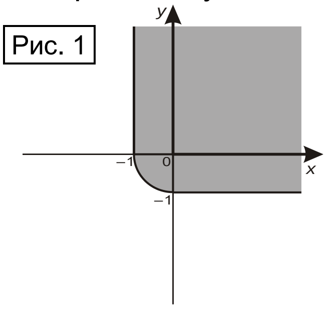
10 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. На координатной плоскости изобразите множество точек, удовлетворяющих условию $\left(x-|x|\right)^2+\left(y-|y|\right)^2\le 4$.

Рис. 1



Ответ: см. рис. 1.

Решение. Рассмотрим каждую координатную четверть по отдельности:

1) $x\ge 0$, $y\ge 0$. Неравенство выполняется для координат всех точек.

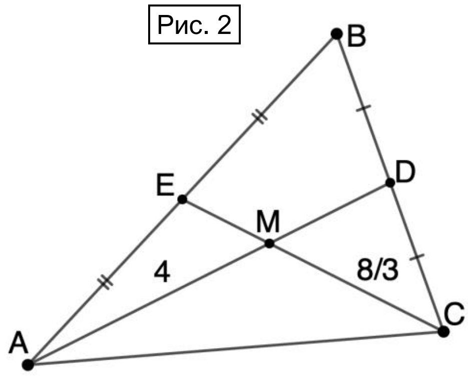
2) $x\le 0$, $y\ge 0$. Неравенство примет вид: $4x^2\le 4$. Таким образом, $-1\le x\le 0$.(полоса)

3) $x\le 0$, $y\le 0$. Неравенство примет вид: $x^2+y^2\le 1$ (четверть круга).

4) $x\ge 0$, $y\le 0$. Неравенство примет вид: $4y^2\le 4$. Таким образом, $-1\le y\le 0$ (полоса).

1.2. Площадь треугольника равна 16. Найдите угол между его медианами, длины которых 4 и 6.

Рис. 2



Ответ: 90°.

Решение. Пусть *AD* = 6 и *CE* = 4 – заданные медианы треугольника *ABC*, *M* – точка их пересечения (см. рис. 2). Тогда *AM* = $\frac{2}{3}$*AD* = 4, *CM* = $\frac{2}{3}$*CE* = $\frac{8}{3}$,

$S_{AMC}=\frac{1}{3}S_{ABC}=.\frac{16}{3}$.

Так как $S_{AMC}=\frac{1}{2}AM\cdot CM\cdot\sin\angle AMC$, то $\sin\angle AMC$ = 1, то есть $\angle AMC$ = 90°.

1.3. Можно ли раскрасить клетки квадрата размером 6×6 в два цвета так, чтобы клеток одного цвета было больше, чем клеток другого, а в каждом прямоугольнике размером 1×4 было поровну клеток каждого цвета?

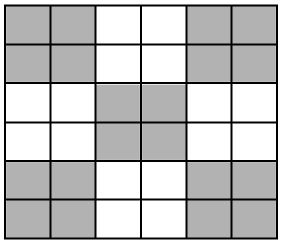


Рис. 3

Ответ: можно.

Решение. Разобьем, например, квадрат размером 6×6 на девять квадратов размером 2×2, которые раскрасим в шахматном порядке (см. рис. 3), тогда условие задачи выполняется.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. При делении x^2+4x-b на $x-a$ получается остаток 2. Найдите наименьшее возможное значение *b* (*a* и *b* – действительные числа).

Ответ: $b=-6$

Решение. Запишем указанное деление с остатком: $x^2+4x-b=(x-a)(x+c)+2$. Подставив $x=a$, получим: $a^2+4a-b=2\Leftrightarrow(a+2)^2=6+b$, значит, $b\ge-6$.

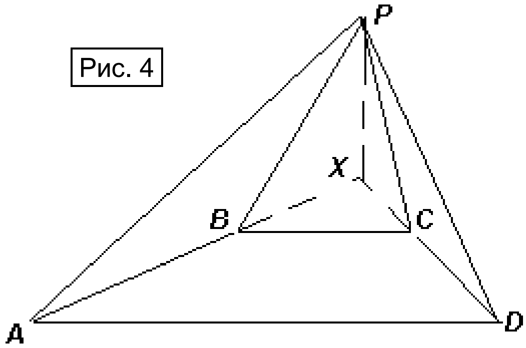
Покажем, что значение $b=-6$ достигается. Действительно, $x^2+4x+6=(x+2)^2+2$, а это и означает, что при делении x^2+4x-b на $x-a$ при $b=-6$ и $a=-2$ получится остаток 2.

Равенство $a^2+4a-b=2$ можно также получить из теоремы Безу.

2.2. Основанием пирамиды с вершиной *P* является четырёхугольник *ABCD*, у которого сумма углов *A* и *D* в пять раз меньше суммы углов *B* и *C*. Найдите угол между плоскостями граней *PAB* и *PCD*, если они обе перпендикулярны основанию.

Ответ: 60°.

Решение. Пусть плоскости APB и CPD пересекаются по прямой PX (точка X лежит в плоскости ABC, см. рис. 4). Так как $(APB)\perp(ABC)$ и $(CPD)\perp(ABC)$, то $PX\perp(ABC)$. Тогда угол BXC – линейный угол двугранного угла с ребром PX.



Из условия задачи следует, что в четырёхугольнике $ABCD$ сумма углов A и D равна 60°, значит, $\angle BXC$ = 120°. Полученный угол – тупой, поэтому угол между указанными плоскостями равен 60°.

2.3. По кругу лежат 10 монет орлами вверх. Разрешается одновременно перевернуть либо 4 монеты, лежащие подряд, либо 4 монеты, лежащие по две с обеих сторон от какой-то монеты. Можно ли в результате таких операций положить все монеты орлами вниз?

Ответ: нет.

Решение. Раскрасим монеты в черный и белый цвета, чередуя их. Тогда будет 5 монет белых и 5 черных. Заметим, что каждая из операций, указанных в условии, меняет состояние двух белых и двух черных монет. Следовательно, количество монет каждого цвета, лежащих орлом вверх, будет всегда нечётно. Если же все монеты перевернуты, то количество как белых, так и черных монет, лежащих орлом вверх, должно стать равным нулю, то есть чётным. Противоречие.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Имеет ли ненулевые рациональные решения уравнение $x^3 + x^2y + y^3 = 0$?

Ответ: нет.

Решение. Если $x=0$, то и $y=0$. Верно и обратное. Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Пусть $x\neq 0$, $y\neq 0$, и $t=\frac{x}{y}$. Тогда уравнение примет вид: $t^3+t^2+1=0$. Докажем, что оно не имеет рациональных корней, тогда таких решений нет и в исходном уравнении.

Если многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1 имеет рациональные корни, то они являются целыми делителями свободного члена. Таким образом, достаточно проверить, что корнями полученного уравнения не являются ±1, что и соответствует действительности.

<u>Второй способ</u>. Пусть несократимая дробь $t=\frac{m}{n}$, где $m\in Z$, $m\neq 0$, $n\in N$, является корнем данного уравнения. Тогда уравнение $m^3+m^2n+n^3=0$ должно иметь ненулевые целочисленные решения. Так как m является делителем правой части, то и левая часть делится на m, откуда n кратно m. Аналогично получим, что m кратно n. Учитывая, что $n>0$, получим: $n=\pm m$. Подстановкой убеждаемся, что это возможно, только при $m=n=0$. Таким образом, в последнем уравнении целых ненулевых решений нет, следовательно, рациональных ненулевых решений нет и в исходном уравнении.

3.2. Выпуклый n-угольник разрезан на квадраты и правильные треугольники. Докажите, что $n\leq 12$.

Решение. Предположим, что n > 12. Тогда, так как сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°, то найдется его внешний угол, градусная мера которого меньше, чем 30° (по принципу Дирихле). Рассмотрим вершину этого угла – в ней «сходятся» только квадраты и правильные треугольники, углы которых равны 90° и 60° соответственно. Следовательно, градусная мера внешнего угла, должна быть кратна 30 (поскольку 180, 90 и 60 делятся на 30 нацело), то есть она не может быть меньше, чем 30°. Полученное противоречие показывает, что $n \leq 12$.

3.3. Рассматриваются всевозможные пятизначные числа, в десятичной записи которых цифры убывают. Каких из них больше: с суммой цифр 22 или с суммой цифр 23?

Ответ: поровну.

Решение. Сумма всех цифр от 0 до 9 равна 45. Заметим, что любой группе из пяти попарно различных цифр с суммой 22 соответствует ровно одно число, в десятичной записи которого цифры убывают. Сопоставим этой группе цифр другую группу, в которой каждая цифра n заменена на цифру $(9 - n)$. Все цифры новой группы будут попарно различны, а их сумма будет равна $5\cdot 9 - 22 = 23$. Этой группе цифр будет также соответствовать ровно одно число, в десятичной записи которого цифры убывают.

Так как соответствие между указанными группами взаимно однозначное, то искомых чисел с суммами цифр 22 и 23 одинаковое количество.

Можно подсчитать, что это количество равно 20, поэтому, при желании, можно каждую группу чисел выписать.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Существует ли такая бесконечная последовательность квадратов натуральных чисел, что для любого натурального n сумма первых n ее членов также является квадратом натурального числа?

Ответ: существует.

Решение. <u>Первый способ</u>. Рассмотрим $\{a_n\}$: $a_1 = 3$; $a_2 = 4$ и для всех $n \geq 2$ $a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{2}$. Докажем, что $a_1^2 + a_2^2 + ...a_n^2 = (1 + a_n)^2$, используя метод математической индукции.

Действительно, 1) База индукции: $a_1^2 + a_2^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = (1 + a_2)^2$. 2) Шаг индукции: пусть равенство верно при $n = k$. Тогда при $n = k + 1$ получим: $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2 + a_{k+1}^2 =$ $\left(1 + a_k\right)^2 + \left(a_k + \frac{a_k^2}{2}\right)^2 = 1 + 2a_k + a_k^2 + a_k^2 + a_k^3 + \frac{a_k^4}{4} = \left(1 + a_k + \frac{a_k^2}{2}\right)^2 = \left(1 + a_{k+1}\right)^2$.

Таким образом, последовательность $\{b_n\} = \{a_n^2\} = \{3^2, 4^2, 12^2, 84^2, ...\}$ – искомая.

<u>Второй способ</u>. Воспользуемся тем, что числа вида $m^2 - n^2$, $2mn$ и $m^2 + n^2$, где m и n – взаимно простые числа разной четности, в точности описывают все простейшие пифагоровы тройки. При этом, число $m^2 + n^2$ нечётное, а любое нечётное число можно представить в виде разности двух соседних квадратов: $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$.

Значит, каждая частичная сумма искомой последовательности может породить новую пифагорову тройку, но уже как один из «катетов», тогда второй «катет» – это новое число последовательности, а «гипотенуза» – следующая частичная сумма.

Приведём пример построения искомой последовательности описанным методом. Исходная тройка: $9^2 + 40^2 = 41^2$. Так как $41 = 21^2 - 20^2$, то $41^2 + (2\cdot 20\cdot 21)^2 = (20^2 + 21^2)^2$. Таким образом, $9^2 + 40^2 + 840^2 = 841^2$ Теперь процесс можно повторить с числом 841, используя, что $841 = 421^2 - 420^2$, и так далее.

Таким образом, последовательность $\{\tilde{n}_n\} = \{9^2, 40^2, 840^2, ...\}$ – искомая.

4.2. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены произвольные точки M и K соответственно, O – середина отрезка MK. Докажите, что $AO + CO > AM + CK$.

Решение. <u>Первый способ</u>. Предварительно сформулируем и докажем лемму, которую иногда называют «неравенством резинки».

<u>Лемма</u>. Если точка P лежит внутри треугольника ABC, то $BP + CP < AB + AC$.

<u>Доказательство</u>. Пусть луч BP пересекает сторону AC в точке M (см. рис. 5а). Тогда, используя неравенство треугольника для треугольников PMC и BAM, получим: $BP + CP < BP + PM + MC = BM + MC < BA + AM + MC < AB + AC$, что и требовалось.

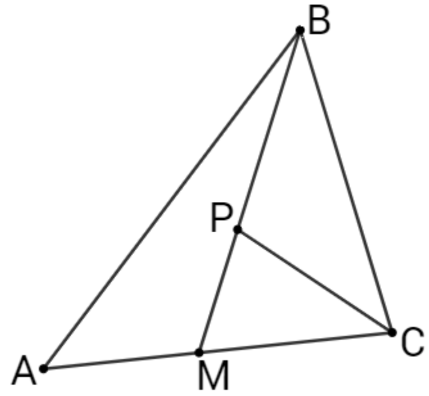


Рис. 5а

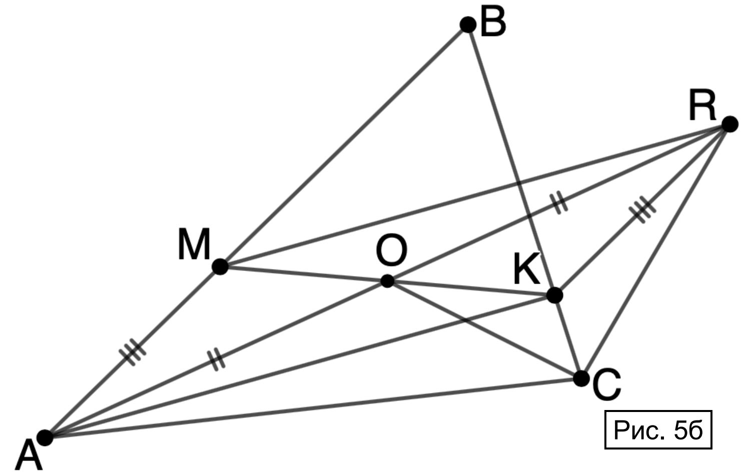


Рис. 5б

Вернемся к нашей задаче.

Удвоив медиану *AO* треугольника *AMK*, получим, что *AMRK* –параллелограмм (см. рис. 5б). Заметим, что точка *R* лежит вне треугольника *ABC*, так как $\angle$*ÂAK* + $\angle AKB < \angle MAK + \angle AKR = 180°$. Следовательно, точка *К* лежит внутри треугольника *COR*.

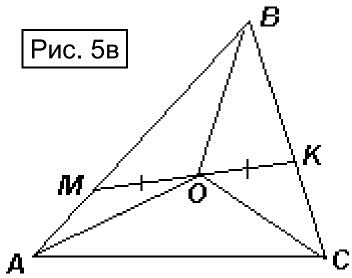


Рис. 5в

Для треугольника *COR* и точки *K* применим «неравенство резинки»: $CO + OR > KR + KC = AM + CK$. Следовательно, $AO + CO > AM + CK$, что и требовалось.

<u>Второй способ</u>. Проведём отрезок *BO* (см. рис. 5в). Из треугольника *AOB*: $AO + BO > AM + BM$, а из треугольника *BOC*: $CO + BO > CK + BK$. Сложив почленно эти неравенства, получим: $AO + CO + 2BO > AM + CK + BM + BK$.

Так как *BO* – медиана треугольника *MBK*, то $BM + BK > 2BO$. Следовательно, $AO + CO > AM + CK$, что и требовалось.

4.3. На каркасе единичного куба находятся восемь муравьев. Докажите, что найдутся два муравья, расстояние между которыми не больше, чем 1.

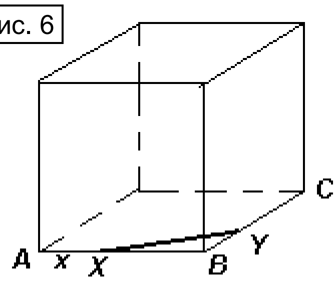


Рис. 6

Решение. <u>Первый способ</u>. Предположим, что это не так.. Назовём «углом» три половинки рёбер, сходящиеся в одной вершине. Таких «углов» – восемь.

Если в одном углу находятся два муравья, то расстояние между ними не превосходит расстояния между серединами двух ребёр, сходящихся в одной вершине, которое равно $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

Если же в каждом углу сидит ровно один муравей, то рассмотрим все расстояния от каждого муравья до вершины угла, в котором он находится. Пусть наибольшее из них у муравья, который находится в углу *A* на ребре *AB*, и оно равно *x*. Без ограничения общности можно считать, что в соседнем углу *B* находится муравей *Y* на ребре *BC* (см. рис. 6). Тогда $XB = 1 – x$, $BY \le x$, следовательно, $XY \le XB + BY \le 1$, что и требовалось.

<u>Второй способ</u>. Каждому муравью сопоставим ребро, на котором он находится (если муравей сидит в вершине, то можно выбрать любое из трёх рёбер, сходящихся в этой вершине). Если какое-то ребро оказалось сопоставлено двум муравьям, то расстояние между этими муравьями не превосходит 1.

Если это не так, то выбрано восемь рёбер, а так как вершин тоже восемь, то какие-то из этих рёбер обязательно образуют цикл. Действительно, граф из восьми вершин без циклов содержит не более семи рёбер (это либо дерево, в котором семь ребер, либо в нем несколько компонент связности, каждая из которых является деревом, тогда ребер еще меньше).

Пусть в этом цикле *k* рёбер, тогда сумма их длин равна *k*. На них сидят *k* муравьев, поэтому при обходе цикла найдутся два муравья, расстояние между которыми по каркасу не превосходит 1. Значит, и обычное расстояние между ними не больше, чем 1.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. Решите уравнение: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x$.

Ответ: 1.

Решение. Первый способ. Заметим, что $x=1$ является корнем уравнения. Докажем, что других корней нет.

Действительно, левая часть уравнения определена при $x\ge 1$. При $x>1$ $\sqrt{x-1}>0$, $\sqrt{x+3}>2$, значит, $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}>2$. При этом, $4-2x<2$.

Доказательство отсутствия других корней можно провести иначе, сославшись на то, что при x > 1 функция f(x) = $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}$ *возрастает, а функция g(x) = 4 – 2x убывает.*

Второй способ. Пусть $\sqrt{x-1}$ = $a \ge 0$, $\sqrt{x+3}$ = $b \ge 0$. Так как левая часть уравнения определена при $x\ge 1$, то $\sqrt{(x-1)(x+3)}$ = $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+3}$ = ab. Кроме того, $a^2 + b^2 = 2x + 2$, значит, $4 - 2x = 6 - a^2 - b^2$.

Исходное уравнение примет вид: $a + b + 2ab = 6 - a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a + b)^2 + (a + b) - 6 = 0$. Учитывая, что $a + b \ge 0$, получим: $a + b = 2$. Уравнение $\sqrt{x-1}$ + $\sqrt{x+3}$ = 2 имеет единственное решение $x=1$, так как при $x>1$ его левая часть возрастает.

5.2. В треугольнике ABC проведена высота CD. Известно, что $AD\cdot BD = CD^2$. Обязательно ли треугольник ABC – прямоугольный?

Ответ: не обязательно.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник $A'BC$ и проведём его высоту *ÑD* из вершины прямого угла (см. рис. 7). Тогда, по свойству высоты, проведённой к гипотенузе, $A'D\cdot BD = CD^2$.

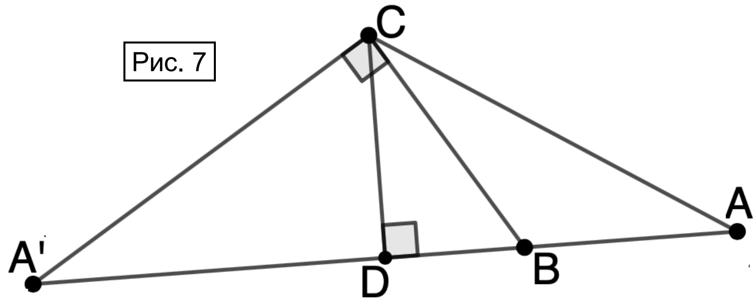


Рис. 7

Пусть точка A симметрична вершине A' относительно точки D, тогда $AD = A'D$. Значит, для треугольника ABC выполняется равенство $AD\cdot BD = CD^2$, где CD – его высота, но этот треугольник – тупоугольный.

Если в условие задачи добавить, что высота ÑD лежит внутри треугольника, то утверждение о том, что ABC – прямоугольный, станет верным.

5.3. Найдите корни приведённого квадратного уравнения, если и они, и сумма коэффициентов этого уравнения являются простыми числами.

Ответ: 2 и 3.

Решение. Пусть искомые числа – это n и m. Тогда они являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 - (n + m)x + nm = 0$. Сумма его коэффициентов равна $nm - n - m + 1 = (n - 1)(m - 1)$. По условию, это число – простое, значит, одна из скобок должна быть равна 1, а другая быть простым числом, то есть один из корней равен 2, а другой – на 1 больше простого числа и сам является простым, поэтому это 3.