11 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Найдите наименьшее значение функции *y* = $2x^2-1+\dfrac{1}{x^2+1}$.

Ответ: 0.

Решение. <u>Первый способ</u>. Пусть $x^2+1=a$, тогда $y=a+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-3\ge 0$, так как $a\ge 1$ и $a+\dfrac{1}{a}\ge 2$. Равенство достигается при $a=1$.

<u>Второй способ</u>. Функция определена и непрерывна на *R*, $y'=4x-\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ = $2x\left(2-\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\right)$. Учитывая, что $\left(x^2+1\right)^2\ge 1$, получим: $y'=0$ только при $x=0$.

Так как $y'<0$ при $x<0$ и $y'>0$ при $x>0$, то $x=0$ – единственная точка минимума, в которой функция и принимает наименьшее значение: $y(0)=0$.

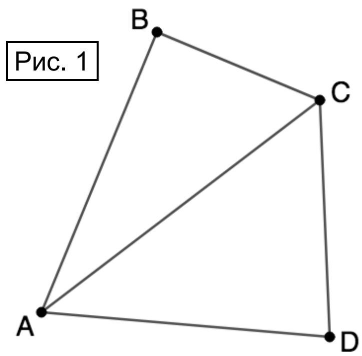
Можно воспользоваться производной и после замены переменной, указанной выше.

1.2. Каждая сторона четырехугольника меньше, чем 7. Обязательно ли его площадь меньше, чем 50?

Ответ: обязательно.

Решение. В любом четырёхугольнике есть диагональ, которая делит его на два треугольника. Пусть это диагональ *AC* в четырёхугольнике *ABCD* (см. рис. 1).

Рис. 1



Тогда S_{ABCD} = $\frac{1}{2}$(*AB*·*BC*·sin∠*B* + *CD*·*DA*· sin∠*D*) < $\frac{49}{2}$(sin∠*B* + sin∠*D*) ≤ 49 < 50.

Можно также рассматривать только выпуклый четырёхугольник, указав предварительно, что если длины их сторон соответственно равны, то площадь выпуклого четырёхугольника больше площади невыпуклого (первый получается из второго симметрией относительно диагонали, лежащей вне четырёхугольника).

1.3. Верно ли, что число $2^{202}+1$ делится на $2^{101}+2^{51}+1$?

Ответ: верно.

Решение. Заметим, что $2^{202}+1=(2^{101})^2+2\cdot2^{101}+1-2\cdot2^{101}=(2^{101}+1)^2-(2^{51})^2=(2^{101}-2^{51}+1)(2^{101}+2^{51}+1)$. Следовательно, $2^{202}+1$ делится на $2^{101}+2^{51}+1$.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

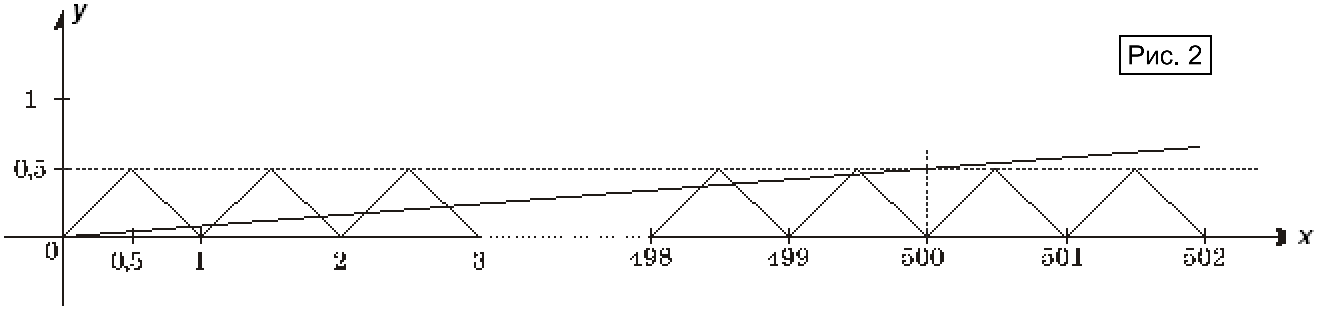
2.1. Пусть *d*(*x*) – расстояние от *x* до ближайшего целого числа. Сколько корней имеет уравнение *d*(*x*) = 0,001*x*?

Ответ: 1000.

Решение. Рассмотрим функцию *d*(*x*) на отрезке [0; 1]. Если 0 ≤ *x* ≤ 0,5, то *d*(*x*) = *x*, а если 0,5 < *x* ≤ 1, то *d*(*x*) = 1 – *x*. Из условия также следует, что функция *d*(*x*) – периодическая с периодом 1.Так как её множество значений – это [0; 0,5], то уравнение *d*(*x*) = 0,001*x* отрицательных корней не имеет.

Построим графики обеих частей уравнения на [0; +∞) (см. рис. 2). Прямая $y=0{,}001x$ проходит через точку (500; 0,5) и правее этой точки не имеет пересечений с графиком

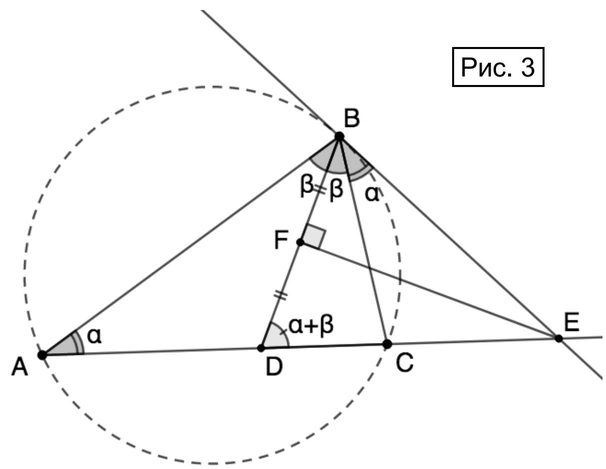
$y = d(x)$. На каждом из первых 500 отрезков длины 1 графики пересекаются два раза, значит, всего – 1000 точек пересечения. Таким образом, уравнение $d(x) = 0{,}001x$ имеет 1000 корней.



Функцию d(x) можно задать формулой: $d(x) = \begin{cases} \{x\}, \text{ если } n \le x \le n + 0{,}5, \\ 1 - \{x\}, \text{ если } n + 0{,}5 < x < n + 1 \end{cases}$, *где {x} – дробная часть числа x, n – любое целое число.*

2.2. В треугольнике *ABC* через середину биссектрисы *BD* проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе и пересекающая прямую *AC* в точке *E*. Докажите, что $DE^2 = AE \cdot EC$.

Решение. Проведем окружность, описанную около треугольника *ABC*, и докажем, что *EB* – касательная к ней (см. рис. 3). Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle DBA = \angle DBC = \beta$, тогда $\angle BDE = \alpha + \beta$. Из условия задачи следует, что треугольник *BED* – равнобедренный, поэтому $\angle DBE = \angle BDE = \alpha + \beta$. Значит, $\angle CBE = \alpha = \angle BAC$, откуда и следует, что *EB* – касательная к окружности.



По теореме о касательной и секущей получим: $DE^2 = EB^2 = AE \cdot EC$, что и требовалось.

2.3. В круговом шахматном турнире каждый участник выиграл белыми столько же партий, сколько все остальные в сумме выиграли черными. Верно ли, что у всех участников одинаковое количество побед?

Ответ: верно.

Решение. Выберем произвольного участника турнира. Количество всех его побед складывается из количества побед белыми и чёрными. По условию, белыми он выиграл столько же партий, сколько все остальные участники в сумме выиграли чёрными. Значит, количество всех побед выбранного участника равно суммарному количеству побед чёрными всех участников (включая его самого). Эти рассуждения применимы для любого участника, поэтому у всех шахматистов одинаковое количество побед.

Это рассуждение можно записать алгебраически. Пусть в турнире было n участников, а x_k и y_k – количество побед k-го участника белыми и чёрными соответственно. Тогда $x_k = y_1 + \ldots + y_{k-1} + y_{k+1} + \ldots + y_n$. *Прибавив к обеим частям этого равенства y_k, получим:* $x_k + y_k = \sum_{i=1}^{n} y_i$, *что выполняется для любого k = 1, 2, ..., n. Следовательно, у всех шахматистов одинаковое количество побед.*

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Найдите значение параметра *a*, для которого уравнение $x\sqrt{2-x}-(x-2)\sqrt{x}=a$ имеет единственный корень.

Ответ: $a=2$

Решение. Перепишем уравнение в виде: $x\sqrt{2-x}+(2-x)\sqrt{x}=a$.

1) Заметим, что если $x=t$ – корень этого уравнения, то $x=2-t$ – также его корень. Значит, если корень – единственный, то $t=2-t$, то есть $t=1$. Это возможно только при $a=2$.

2) Полученное условие является необходимым, но не достаточным. Для того, чтобы убедиться в его достаточности, надо доказать, что $x=1$ – единственный корень уравнения $x\sqrt{2-x}+(2-x)\sqrt{x}=2$.

Так как $0\le x\le 2$, то $x\sqrt{2-x}+(2-x)\sqrt{x}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x(2-x)}\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x}\right)=2 \Leftrightarrow x(2-x)\left(2+2\sqrt{x(2-x)}\right)=4$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пусть $t=\sqrt{x(2-x)}$, тогда уравнение примет вид: $t^2(2+2t)=4 \Leftrightarrow t^3+t^2=2 \Leftrightarrow (t^3-1)+(t^2-1)=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+2t+2)=0 \Leftrightarrow t=1$.

Далее: $\sqrt{x(2-x)}=1 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$, что è требовалось.

Второй способ. Так как $0\le x\le 2$, то $x(2-x)\le\left(\frac{x+2-x}{2}\right)^2=1$, тогда $2+2\sqrt{x(2-x)}\le 4$.

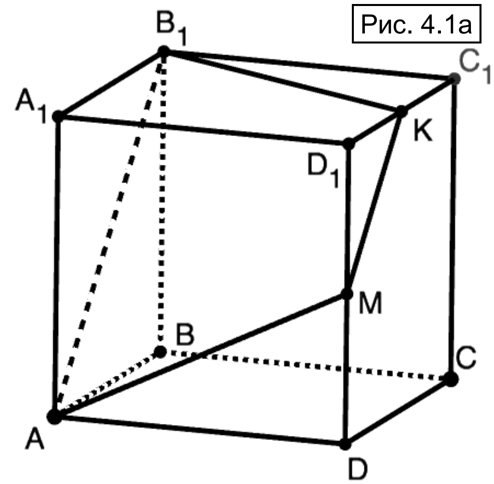
Следовательно, равенство $x(2-x)\left(2+2\sqrt{x(2-x)}\right)=4$ достигается тогда и только тогда, когда оно достигается в каждом из двух неравенств, то есть при $x=1$. Значит, этот корень – единственный.

3.2. Куб, длина ребра которого $2\sqrt{2}$, пересечён плоскостью. Найдите площадь сечения, если какие-то две стороны этого сечения равны 4 и 2.

Ответ: 9

Решение. Обозначим данный куб: $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Заметим, что длина диагонали его грани равна 4, а все остальные отрезки с концами на рёбрах одной грани имеют меньшую длину, поэтому одна из сторон сечения – это диагональ грани. Без ограничения общности можно считать, что это AB_1 (см. рис. 4.1а). Плоскость, содержащая AB_1, должна пересечь хотя бы одну из граней $A_1B_1C_1D_1$ или BB_1C_1C и хотя бы одну из граней AA_1D_1D или $ABCD$. Но сторона сечения, лежащая в любой из этих граней, не меньше, чем длина ребра, поэтому она не может быть равна 2. Значит, плоскость сечения пересекает грань CC_1D_1D, причём по отрезку, параллельному AB_1. Так как $DC_1 \parallel AB_1$, то этот отрезок соединяет середины двух соседних рёбер этой грани и параллелен DC_1.

Рис. 4.1а



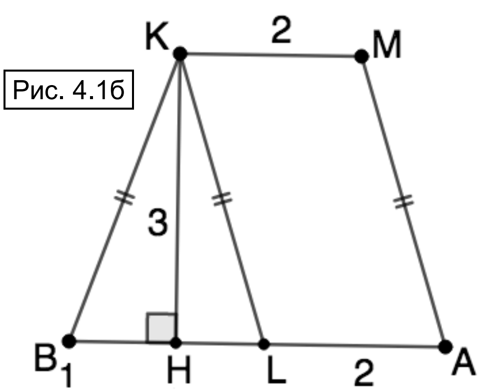


Рис. 4.1б

Пусть, например, это отрезок *KM*, соединяющий середины C_1D_1 и DD_1, тогда искомое сечение – равнобокая трапеция $AMKB_1$ (см. рис. 4.1а). Найдём её площадь, учитывая, что $AM^2 = B_1K^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2 = 10$. Проведём, например, высоту *KH* и отрезок *KL*, параллельный и равный *MA* (см. рис. 4.1б). Тогда $B_1H = 0{,}5B_1L = 1$, поэтому $KH = \sqrt{B_1K^2-B_1H^2} = 3$. $S_{AMKB1} = \frac{AB_1+MK}{2}\cdot KH = 9$.

Если сторона сечения, равная 2, соединяет середины ребер CC_1 и CD, то искомое сечение симметрично рассмотренному относительно диагонального сечения куба AB_1C_1D, поэтому его площадь такая же.

3.3. Даны 11 гирь попарно различного веса и каждая весит целое число граммов. Известно, что как бы ни разложить гири (все или часть) на две чаши, чтобы гирь на них было не поровну, всегда перевесит чаша, на которой гирь больше. Докажите, что хотя бы одна из гирь весит больше, чем 35 граммов.

Решение. Пусть $m_1 < m_2 < \ldots < m_{11}$ – веса гирь. Так как все эти веса целые, то для любых i, j ($1 \le i < j \le 11$) верно неравенство $m_j \ge m_i + (j - i)$.

Положим на левую чашу весов шесть самых лёгких гирь, а на правую – пять самых тяжёлых. Из условия следует, что левая чаша перевесит, то есть $m_1 + m_2 + \ldots + m_6 > m_7 + m_8 + \ldots + m_{11}$. При этом, согласно вышесказанному, $m_7 \ge m_2 + 5$, $m_8 \ge m_3 + 5$, …, $m_{11} \ge m_6 + 5$, поэтому $m_7 + m_8 + \ldots + m_{11} \ge m_2 + m_3 + \ldots + m_6 + 5\cdot5$. Таким образом, $m_1 + m_2 + \ldots + m_6 > m_2 + m_3 + \ldots + m_6 + 25$, откуда получим, что $m_1 > 25$. Следовательно, $m_{11} \ge m_1 + 10 > 35$, что и требовалось.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Найдите наименьшее значение выражения $(x - y)^2 + 3(y - z)^2 - 5(z - x)^2$, если $x\in[-1; 1]$, $y\in[-1; 1]$, $z\in[-1; 1]$.

Ответ: –17.

Решение. Если данное выражение рассматривать как квадратный трёхчлен относительно x, то «ветви» соответствующей параболы направлены вниз (старший коэффициент отрицателен), поэтому наименьшее значение выражения при любых значениях y è z может достигаться только на границах отрезка [–1; 1].

Аналогично, если данное выражение рассматривать как квадратный трехчлен относительно z, то наименьшее значение выражения при любых значениях x и y также может достигаться только на границах отрезка [–1; 1].

Рассмотрим все возможные случаи.

1) $x = z = 1$, тогда $(x - y)^2 + 3(y - z)^2 - 5(z - x)^2 = (1 - y)^2 + 3(y - 1)^2 = 4(y - 1)^2$. Наименьшее значение полученного выражения на отрезке [–1; 1] достигается при $y = 1$ и равно 0.

2) $x = z = -1$, тогда $(x - y)^2 + 3(y - z)^2 - 5(z - x)^2 = (-1 - y)^2 + 3(y + 1)^2 = 4(y + 1)^2$. Наименьшее значение этого выражения на отрезке [–1; 1] достигается при $y = -1$ и также равно 0.

3) $x = 1$, $z = -1$, тогда $(x - y)^2 + 3(y - z)^2 - 5(z - x)^2 = (1 - y)^2 + 3(y + 1)^2 - 20 = 4y^2 + 4y - 16 = (2y + 1)^2 - 17$. Наименьшее значение полученного выражения на отрезке [–1; 1] достигается при $y = -0{,}5$ и равно –17.

4) $x = -1$, $z = 1$, тогда $(x - y)^2 + 3(y - z)^2 - 5(z - x)^2 = (-1 - y)^2 + 3(y - 1)^2 - 20 = 4y^2 - 4y - 16 = (2y - 1)^2 - 17$. Наименьшее значение этого выражения на отрезке [–1; 1] достигается при $y = 0{,}5$ и также равно –17.

4.2. Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, вершины которых лежат на сторонах данного квадрата со стороной 1.

Ответ: образ контура данного квадрата при гомотетии, центром которой является его центр, а коэффициент равен $\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$.

Решение. Пусть правильный треугольник *KML* вписан в квадрат *ABCD* так, как показано на рис. 5а, а точка *P* – середина отрезка *KL.* Так как $\angle KPM = \angle KBM = 90°$, то вокруг четырёхугольника *KBMP* можно описать окружность. Следовательно, $\angle MBP = \angle MKP = 60°$. Аналогично, четырёхугольник *LCMP* – также вписанный, поэтому $\angle MCP = 60°$. Значит, треугольник *BPC* – также правильный.

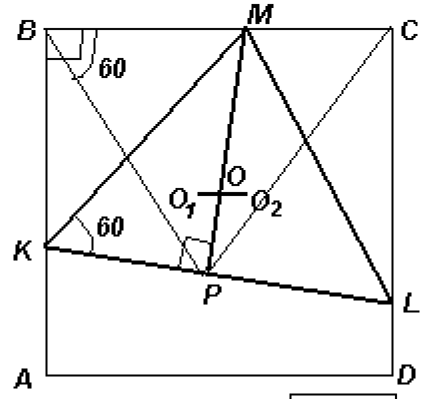


Рис. 5а

Таким образом, если точки *K, M* и *L* двигаются по сторонам *AB, BC* и *CD* соответственно, то точка *P* остается фиксированной, значит, фиксировано и её расстояние до прямой *BC*, равное $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, фиксировано и расстояние от центров *O* соответствующих треугольников до *BC*, равное $\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, поэтому эти центры принадлежат отрезку O_1O_2, параллельному *BC.*

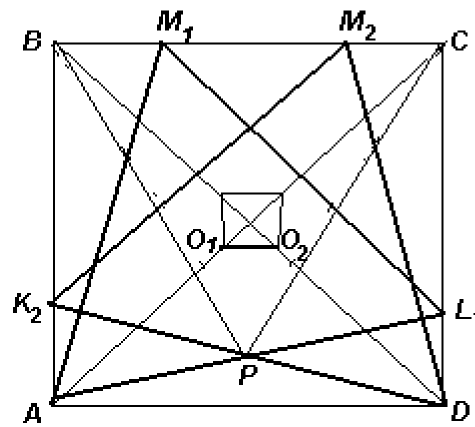


Рис. 5б

Концы этого отрезка соответствуют крайним положениям треугольника *KML:* O_1 – случаю, когда точка *K* совпадает с вершиной *A,* O_2 – случаю, когда точка *L* совпадает с вершиной *D* (см. рис. 5б). При этом, если точка *K* совпадает с *A,* то, в силу симметрии, точка O_1 лежит на диагонали *AC.* Аналогично, если *L* совпадает с *D*, то O_2 лежит на *BD*. Следовательно, если вершины *K, M* и *L* перемещаются по указанным сторонам данного квадрата, то центр *O* треугольника *KML* движется по отрезку O_1O_2 с концами на диагоналях *AC* и *BD*. При этом, в силу непрерывности, все промежуточные положения точки на этом отрезке достигаются.

Так как вершины треугольника *KML* могут располагаться на любых трёх сторонах данного квадрата, то искомое ГМТ состоит из четырех таких отрезков, которые образуют квадрат с вершинами, расположенными на диагоналях данного квадрата.

Его сторона равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$.

4.3. Существует ли восьмизначное число, являющееся точным квадратом, цифры которого идут в возрастающем порядке?

Ответ: не существует.

Решение. Предположим, что такое число *N* существует. Если в восьмизначном числе цифры идут в возрастающем порядке, то в нём отсутствуют ноль и ещё одна цифра. Квадрат числа либо делится на 4, либо при делении на 4 даёт остаток 1. Следовательно, согласно признаку делимости на 4, *N* не может оканчиваться на 78 или на 79 (эти числа при делении на 4 дают остатки 2 и 3 соответственно). Поэтому *N* оканчивается на 89, значит, оно нечётно и число, квадратом которого оно является, тоже нечётно.

Квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт остаток 1. Используя признак делимости на 8, получим, что *N* не может оканчиваться на 789 (это число при делении на 8 даёт остаток 5). Таким образом, помимо нуля, в записи числа *N* отсутствует цифра 7, то есть *N* = 12345689. Тогда его сумма цифр равна 38, поэтому число *N* при делении на 3 даёт остаток 2. Однако точный квадрат либо делится на 3, либо при делении на 3 даёт остаток 1. Противоречие. Следовательно, указанного числа не существует.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

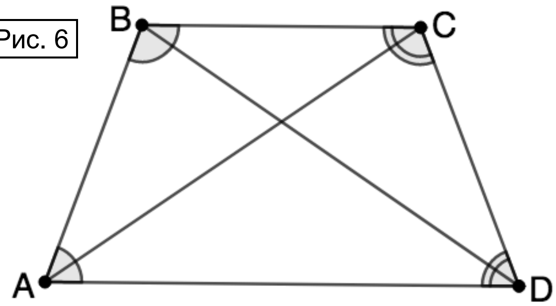
5.1. Пусть $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Докажите, что $x\sin x + \cos x \ge 1$.

Решение. Если $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, то значения синуса и косинуса неотрицательны. Кроме того, $\cos x \ge \cos^2 x$ и $x \ge \sin x$. Следовательно, $x\sin x + \cos x \ge \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

5.2. *ABCD* – трапеция. Радиусы окружностей, описанных около треугольников *ABC*, *BCD* и *ACD* равны R_1, R_2 и R_3 соответственно. Найдите радиус описанной окружности треугольника *ABD*.

Ответ: $\frac{R_1R_2}{R_3}$

Рис. 6



Решение. Обозначим искомый радиус через R_4. Для каждого из треугольников, указанных в условии, по следствию из теоремы синусов получим (см. рис. 6): $R_1 = \frac{AC}{2\sin\angle ABC}$ (1), $R_2 = \frac{BD}{2\sin\angle BCD}$ (2), $R_3 = \frac{AC}{2\sin\angle ADC}$ (3), $R_4 = \frac{BD}{2\sin\angle BAD}$ (4). Перемножим почленно (1) на (2) и (3) на (4): $R_1R_2 = \frac{AC}{2\sin\angle ABC}\cdot\frac{BD}{2\sin\angle BCD}$ и $R_3R_4 = \frac{AC}{2\sin\angle ADC}\cdot\frac{BD}{2\sin\angle BAD}$.

Так как $\sin\angle BAD = \sin\angle ABC$ и $\sin\angle ADC = \sin\angle BCD$, то равны правые части полученных равенств, значит, равны и левые части: $R_1R_2 = R_3R_4$. Следовательно, $R_4 = \frac{R_1R_2}{R_3}$.

5.3. Найдите все такие простые числа p и q, что $7p + q$ и $pq + 11$ – также простые числа.

Ответ: $p = 2$, $q = 3$ или $p = 3$, $q = 2$.

Решение. Пусть числа $7p + q$ и $pq + 11$ – простые, тогда они больше трёх, поэтому не делятся ни на 2, ни на 3. Если оба числа p и q нечётны, то $7p + q$ делится на 2. Следовательно, одно из чисел p или q чётно, то есть равно 2. Рассмотрим два случая.

1) $p = 2$. Тогда числа $14 + q$ и $2q + 11$ – простые. Если q при делении на 3 даёт остаток 1, то $14 + q$ делится на 3, а если q при делении на 3 даёт остаток 2, то $2q + 11$ делится на 3. Значит, остаётся единственный вариант: $q = 3$. Осталось проверить, что при этих значениях p и q условия задачи выполняются: $14 + 3 = 17$, $2\cdot 3 + 11 = 17$.

2) $q = 2$. Тогда числа $7p + 2$ и $2p + 11$ – простые. Если p при делении на 3 даёт остаток 1, то $7p + 2$ делится на 3, а если p при делении на 3 даёт остаток 2, то $2p + 11$ делится на 3. Таким образом, $p = 3$. Проверкой убеждаемся, что найденные значения удовлетворяют условию: $7\cdot 3 + 2 = 23$, $2\cdot 3 + 11 = 17$.