8 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Найдите значение выражения $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)...\left(1+\frac{1}{2m}\right)\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)$.

Ответ: 1.

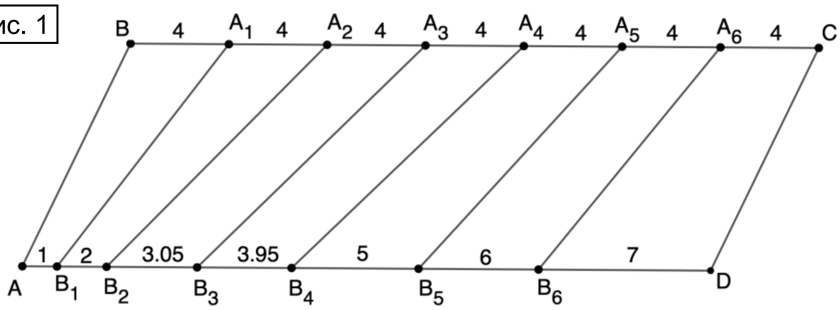
Решение. Заметим, что $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}$ = 1, $\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}$ = 1, ..., $\left(1+\frac{1}{2m}\right)\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)=\frac{2m+1}{2m}\cdot\frac{2m}{2m+1}$ = 1. Следовательно, значение выражения равно 1.

1.2. Существует ли параллелограмм, который можно разрезать на семь попарно неравных трапеций?

Ответ: существует.

Решение. Например, см. рис. 1.

Рис. 1



1.3. На какую цифру нужно заменить * так, чтобы разность 98765 – 4321* была кратна 12?

Ответ: на цифру 7.

Решение. Требуемое условие выполняется, если заданная разность делится на 3 и на 4. Значит, разность должна быть чётной, поэтому вместо * должна стоять нечётная цифра. Для делимости на 3 необходимо, чтобы суммы цифр чисел 98765 и 4321* имели одинаковые остатки при делении на 3. Суммы цифр этих чисел равны 35 и 10 + * соответственно, следовательно, цифра * должна иметь остаток 1 при делении на 3. Таких нечётных цифр две: 1 и 7, причём 1 не подходит, так как 65 – 11 = 54 не делится на 4. Если же * = 7, то заданная разность равна 55548, что кратно 12.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Каждый цветок на поляне цветет ровно 30 дней. Известно, что каждый день пять цветков увядают, а взамен распускаются пять новых. Сколько цветущих цветков на поляне?

Ответ: 150 цветков.

Решение. Назовем пять цветков одного «возраста» – «букетом». Из условия задачи следует, что количество цветущих букетов на поляне постоянно: каждый день один букет увядает, а взамен распускается новый.

Рассмотрим первый день цветения произвольного букета. Цветки в нём начнут увядать после того, как пройдет 30 дней. За этот период успевают зацвести (и не увянуть) еще 29 букетов. Именно эти букеты (и только они) цветут на тридцатый день. Следовательно, ежедневно на поляне находятся $30\cdot5 = 150$ цветущих цветков.

2.2. *O* – центр квадрата *ABCD*. Точка *P* внутри квадрата такова, что треугольник *AĐD* – равносторонний. *M* и *N* – середины отрезков *BP* и *CP*. Докажите, что треугольник *MÎN* – также равносторонний.

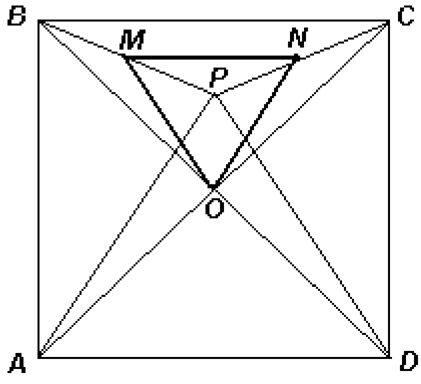


Рис. 2

Решение. Из условия задачи следует, что *MN* || *BC* || *AD* (см. рис. 2). Проведём диагонали квадрата, тогда *OM* – средняя линия треугольника *BPD*, значит, *OM* || *PD*. Аналогично, *ON* – средняя линия треугольника *APC*, значит, *ON* || *PA*. Таким образом, стороны треугольника *MÎN* соответственно параллельны сторонам равностороннего треугольника *AĐD*, поэтому треугольник *MÎN* – также равносторонний.

Можно также использовать другое свойство средней линии треугольника и получить, что стороны треугольника MON вдвое меньше соответствующих сторон треугольника APD.

2.3. В десяти лунках, расположенных по кругу, лежат 55 камней. В любых двух лунках разное количество камней и пустых лунок нет. Докажите, что найдутся три лунки, стоящие подряд, в которых в сумме меньше, чем 16 камней.

Решение. Из условия задачи следует, что количества камней в лунках – все числа от 1 до 10. Предположим, что существует расположение камней, при котором в любых трёх подряд стоящих лунках находится не меньше, чем 16 камней. Выделим в этой расстановке лунку с 10 камнями, тогда остальные девять лунок разбиваются на три непересекающиеся тройки рядом стоящих лунок, в которых в сумме 45 камней. Но, согласно предположению, в каждой тройке, как минимум, 16 камней, то есть в сумме не меньше, чем 48 камней. Противоречие.

Следовательно, найдутся три лунки, стоящие подряд, в которых в сумме меньше, чем 16 камней.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

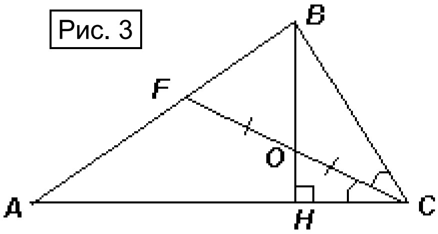
3.1. Про положительные числа a, b и c известно, что $a^2 < b$, $b^2 < c$, $c^2 < a$. Докажите, что каждое их этих чисел меньше единицы.

Решение. <u>Первый способ</u>. Почленно перемножим данные неравенства. Получим: $a^2b^2c^2 < abc$, то есть $abc < 1$. Следовательно, хотя бы одно из данных чисел меньше единицы. Не умаляя общности, пусть $a < 1$. Тогда $c^2 < a < 1$, то есть $c < 1$. Значит, $b^2 < c < 1$, поэтому $b < 1$. Таким образом, каждое из данных чисел меньше единицы.

<u>Второй способ</u>. Если $a^2 < b$, то $a^4 < b^2 < c$. Если $a^4 < c$, то $a^8 < c^2 < a$. Из неравенства $a^8 < a$ следует, что $a < 1$. Рассматривая аналогичным образом неравенства $b^2 < c$ è $c^2 < a$, получим, что $b < 1$ и $c < 1$ соответственно.

3.2. Биссектриса CF и высота BH треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите углы треугольника, если $CO = OF$ и $BO = 2OH$.

Рис. 3



Ответ: 90°, 60°, 30°.

Решение. Так как CO – биссектриса треугольника BCH, то $\frac{CH}{BC} = \frac{OH}{BO} = \frac{1}{2}$ (см. рис. 3). Учитывая, что треугольник BCH – прямоугольный, а его катет равен половине гипотенузы, получим: $\angle HBC = 30°$, значит, $\angle BCH = 60°$. Кроме того, $\angle OCB = 30° = \angle OBC$, поэтому $OC = OB = OF$. Следовательно, $\angle FBC = 90°$, тогда $\angle BAC = 30°$.

3.3. В семье шестеро детей. Пятеро из них старше самого младшего на 2, 6, 8, 12 и 14 лет соответственно. Сколько лет младшему, если возрасты всех детей – простые числа?

Ответ: 5 лет.

Решение. Проверим сначала простые числа, меньшие шести. Очевидно, что искомое число нечётное, число 3 условию не удовлетворяет, так как 3 + 6 = 9 – не простое число. Число 5 удовлетворяет условию, так как 5 + 2 = 7, 5 + 6 = 11, 5 + 8 = 13, 5 + 12 = 17, 5 + 14 = 19, то есть возрасты всех детей действительно простые числа.

Докажем, что этот ответ – единственный. Для этого рассмотрим остатки от деления на 5 всех чисел, прибавляемых к возрасту младшего ребёнка: у числа 2 – остаток 2, у числа 6 – остаток 1, у числа 8 – 3, у числа 12 – 2, у числа 14 – 4. Таким образом, присутствуют все остатки от 1 до 4. Следовательно, если возраст младшего ребенка не кратен пяти, то прибавление к нему числа с остатком, дополняющим его до пяти, даст число кратное пяти и большее пяти, то есть составное.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Можно ли, используя только сложение и вычитание, получить ноль из квадратов первых двухсот натуральных чисел?

Ответ: можно.

Решение. Заметим, что разность квадратов двух соседних чисел $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$. Разобьём все заданные квадраты на пары: $(1^2; 2^2)$, $(3^2; 4^2)$, ..., $(199^2; 200^2)$. Разности чисел в этих парах образуют последовательность 3, 7, 11, … , 399, в которой сто чисел.

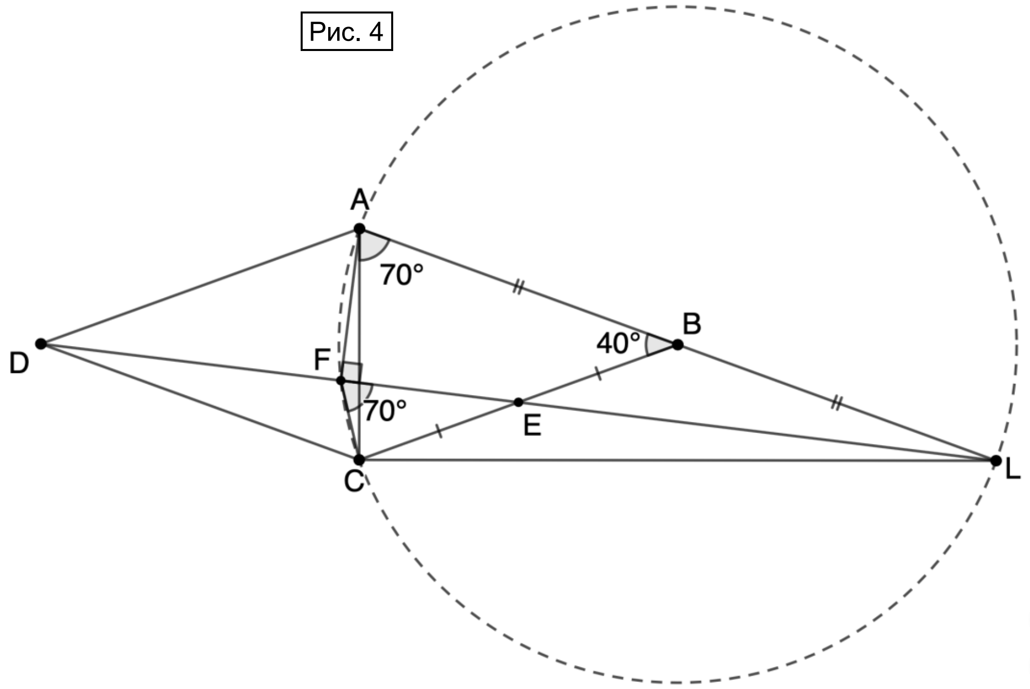
Полученные числа опять разобьём на пары: (3; 7), (11, 15), ..., (395; 399). Разность чисел в этих парах образуют последовательность 4, 4, … , 4, в которой пятьдесят чисел.

Проделывая описанную операцию еще раз, получим 0, 0, … 0. (двадцать пять нулей), сумма которых равна нулю.

Указанную процедуру можно «модифицировать». Упорядочим квадраты по возрастанию и разобьём их последовательно на группы по восемь слагаемых. Тогда $((n + 7)^2 - (n + 6)^2) - ((n + 5)^2 - (n + 4)^2) - ((n + 3)^2 - (n +2)^2) + ((n +1)^2 - n^2) = (2m + 13) - (2m + 9) - (2m + 5) + (2n + 1) = 0$ *для любых восьми квадратов, идущих подряд.*

4.2. Угол B ромба $ABCD$ равен 40°, E – середина BC, F – основание перпендикуляра, опущенного из A на DE. Найдите угол DFC.

Рис. 4



Ответ: 110°.

Решение. См. рис. 4. Продлим DE до пересечения с прямой AB в точке L, тогда треугольники DCE и LBE равны (по стороне и прилежащим углам), откуда $CD = BL$. Значит, $AB = BL = BC$, то есть $\angle ACL = 90^\circ$. Так как $\angle AFL = 90^\circ$, то точки A, F, C и L лежат на одной окружности с центром в точке B. Следовательно, $\angle CFL = \angle CAL = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$, значит, $\angle DFC = 110^\circ$.

4.3. В однокруговом футбольном турнире играют восемь команд, четыре из которых выходят в финал. Какое наименьшее количество очков гарантирует выход в финал? (*Победа – 3 очка, ничья – 1 очко, поражение – 0.*)

Ответ: 16.

Решение. Докажем, что 16 очков гарантируют выход в финал. Пусть это не так, тогда каждая из первых пяти команд набрала не меньше, чем 16 очков, то есть в сумме они набрали не меньше, чем 80 очков. Три последние команды набрали в сумме не меньше, чем 6 очков, разыгранных в матчах между собой. Тогда всего в турнире разыграно не меньше, чем 86 очков. Но в турнире сыграно $\frac{8 \cdot 7}{2}$ = 28 матчей, поэтому разыграно не больше, чем 28·3 = 84 очка. Противоречие.

При этом 15 очков может не хватить для выхода в финал, так как такое количество очков могут набрать пять команд. Пример – см. таблицу.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**Sum**
A		3	3	0	0	3	3	3	**15**
B	0		3	3	0	3	3	3	**15**
C	0	0		3	3	3	3	3	**15**
D	3	0	0		3	3	3	3	**15**
E	3	3	0	0		3	3	3	**15**
F	0	0	0	0	0		1	1	**2**
G	0	0	0	0	0	1		1	**2**
H	0	0	0	0	0	1	1		**2**