9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. На доске записано верное равенство вида $a^b = c$, где a, b и c – различные натуральные числа, при этом в обеих частях равенства использован один и тот же набор цифр. Один из возможных примеров такого равенства: $5^2 = 25$. Укажите ещё два примера (одну и ту же цифру можно использовать несколько раз).

Ответ: например, $11^2 = 121$ или $11^3 = 1331$ или $50^2 = 2500$ или $100^{10} = 1\underbrace{00\ldots0}_{20\,нулей}$.

Существует и много других примеров.

1.2. Можно ли на квадратном листе со стороной 1 разместить несколько непересекающихся кругов, сумма радиусов которых равна 2019?

Ответ: можно.

Решение. Разобьем, например, стороны данного квадрата на 10^4 равных отрезков и через их концы проведём прямые, параллельные сторонам квадрата. Тогда данный квадрат разобьётся на 10^8 квадратов со стороной 10^{-4}. В каждый такой квадрат поместим круг радиусом $\frac{2019}{10^8}$, центр которого совпадает с центром квадрата. Сумма радиусов этих кругов равна 2019. Так как $2\cdot\frac{2019}{10^8} < \frac{10^4}{10^8} = 10^{-4}$, то диаметр каждого круга меньше стороны квадрата, в котором он лежит, поэтому указанные круги не пересекаются.

1.3. Наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен половине большего из них. Обязательно ли он равен меньшему из этих чисел?

Ответ: обязательно.

Решение. По условию: НОД($2a$; b) = a и $2a > b$. Тогда b кратно a, то есть $b = ka$, где k – натуральное число. Следовательно, $a \le ka < 2a$, поэтому $k = 1$. Таким образом, $b = a$.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Из пунктов А и В одновременно начали движение навстречу друг другу пешеход и велосипедист. Через час пешеход оказался ровно посередине между пунктом А и велосипедистом. Ещё через 15 минут они встретились и продолжили свой путь. Сколько времени затратил пешеход на путь из А в В?

Рис. 1

Ответ: 5 часов.

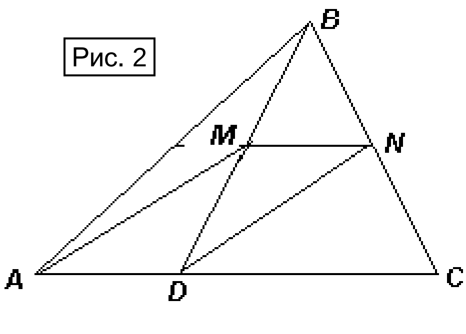
Решение. Пусть v км/ч – скорость велосипедиста, а p км/ч – скорость пешехода. Так как пешеход оказался ровно посередине между пунктом А и велосипедистом через час, то расстояние от А до В равно $2p + v$ (км) (см. рис. 1). Находясь на расстоянии p км друг от друга, они встретились через 15 минут, значит, $\frac{p}{p+v} = \frac{1}{4}$. Из этого равенства получим, что $v = 3p$.

Тогда искомое время равно $\frac{2p+v}{p} = 2 + \frac{v}{p}$ = 5 (ч).

2.2. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена такая точка D, что медиана AM треугольника ABD параллельна медиане DN треугольника BCD. Найдите $AD : DC$.

Ответ: $AD : DC = 1 : 2$.

Рис. 2



Решение. Так как M – середина BD, N – середина BC, то MN – средняя линия треугольника CBD (см. рис. 2). Значит, $MN \parallel CD$ и $MN = 0{,}5CD$. Кроме того, $MN \parallel AD$ и $AM \parallel DN$, поэтому $AMND$ – параллелограмм. Тогда $MN = AD$. Следовательно, $AD : DC = MN : 2MN = 1 : 2$.

2.3. В одном барабане было 8 шаров, из которых 3 красных, а в другом барабане – 7 шаров, из которых 4 красных. С равной вероятностью выбирают один из барабанов и вынимают из него один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет красным?

Ответ: $\frac{53}{112}$.

Решение. Вероятность выбрать один из барабанов равна $\frac{1}{2}$, поэтому вероятность достать красный шар из первого барабана равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}$ = $\frac{3}{16}$, а из второго – $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}$ = $\frac{2}{7}$. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{3}{16}$ + $\frac{2}{7}$ = $\frac{53}{112}$.

Решением является интуитивное применение формулы полной вероятности для события A – вытащить красный шар из какого-либо барабана. $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$, где H_1 и H_2 – события, состоящие в том, что мы берем шар из первого или второго барабана соответственно. $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$, $P(A|H_1)$, $P(A|H_2)$ – условные вероятности вытащить красный шар, если шар вынимается из первого или второго барабана соответственно.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Докажите, что при $a > 1$ выполняется неравенство: $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} < \frac{1}{\sqrt{a-1}}$.

Решение. Первый способ. Так как все части доказываемого неравенства принимают только положительные значения, то оно равносильно неравенству $\sqrt{a-1} < \frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}} < \sqrt{a}$.

Преобразуем среднюю часть: $\frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}$ = $\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}\right)}$ = $\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{2}$. Теперь докажем два неравенства по отдельности.

1) $\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{2}$ > $\sqrt{a-1}$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{a+1}$ > $\sqrt{a-1}$, а это верное неравенство.

2) По неравенству между средним арифметическим и средним квадратичным для двух различных положительных чисел, получим: $\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{2}$ < $\sqrt{\frac{a+1+a-1}{2}}$ = $\sqrt{a}$.

Второй способ. Сразу докажем два неравенства по отдельности.

1) $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{a} < 2a - 2\sqrt{a^2-1}$ $\Leftrightarrow$ $2\sqrt{a^2-1} < 2a - \frac{1}{a}$ $\Leftrightarrow$ $4a^2 - 4 < 4a^2 - 4 + \frac{1}{a^2}$ $\Leftrightarrow$ 0 < $\frac{1}{a^2}$, а это верно.

2) $\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} < \frac{1}{\sqrt{a-1}}$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{a+1} < \frac{1}{\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-1}$ $\Leftrightarrow$ $a+1 < \frac{1}{a-1} + 2 + a - 1$ $\Leftrightarrow$ 0 < $\frac{1}{a-1}$, что выполняется при $a > 1$.

3.2. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* на стороны *CD* и *AB* опущены перпендикуляры *AE* и *DF* соответственно. Найдите углы четырёхугольника, если $AE \geq BD$, $DF \geq AC$, $AD = 2AB$.

Ответ: два угла по 60° и два угла по 120°.

Решение. Так как перпендикуляр к прямой короче наклонной, проведённой к ней из той же точки, то $AC \geq AE \geq BD$ и $BD \geq DF \geq AC$ (см. рис. 3а). Следовательно, $AC = BD$. Тогда AE совпадает с AC, а DF совпадает с DB.

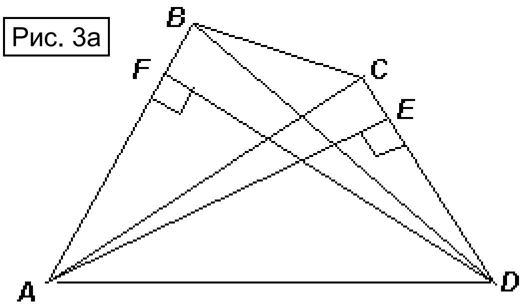


Рис. 3а

Так как $\angle ABD = \angle ACD = 90°$, то четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность с диаметром AD (см. рис. 3б).

Кроме того, прямоугольные треугольники ABD и DCA равны (по катету и гипотенузе), значит, $\angle ADB = \angle CAD$, поэтому $BC \parallel AD$, то есть $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

В прямоугольном треугольнике ABD катет AB равен половине гипотенузы AD, значит, $\angle ADB = 30°$, тогда $\angle BAD = 60° = \angle CDA$, $\angle ABC = \angle DCB =.120°$.

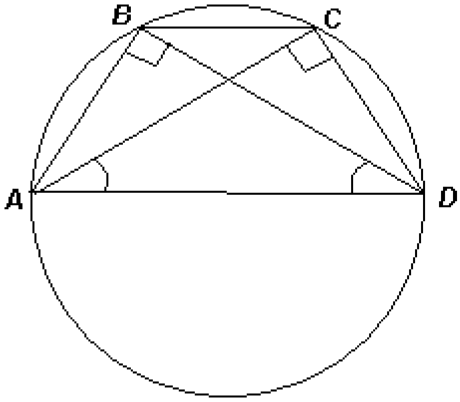


Рис. 3б

3.3. Семь целых чисел записаны по кругу. Сколько из них кратны трём, если известно, что сумма любых двух, стоящих подряд, не делится на 3 и сумма любых трёх, стоящих подряд, не делится на 3?

Ответ: 3.

Решение. Оценка. Если чисел, кратных трём, не меньше четырёх, то какие-то два из них будут стоять рядом, что противоречит условию. Значит, чисел, делящихся на три, не больше трёх.

Докажем, что среди любых трёх чисел, стоящих подряд, есть число, делящееся на 3. Действительно, рассмотрим какие-нибудь три числа, стоящие подряд. Пусть среди них нет кратных трём. Тогда, либо какие-то два из них имеют разные остатки при делении на 3 и их сумма кратна трём, либо все три имеют одинаковые остатки при делении на 3 и их сумма также кратна трём. Противоречие.

Следовательно, чисел, кратных трём, не может быть меньше трёх, иначе найдется тройка подряд идущих чисел не кратных трём. Таким образом, их ровно три.

Пример: 0 1 1 0 1 0 1.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3y, \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$.

Ответ: (2; 1), (–2; –1).

Решение. Перепишем систему в виде: $\begin{cases} \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3y - x, \\ \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = y \end{cases}$ и разделим первое уравнение на второе. Получим: $\begin{cases} \dfrac{3x - y}{x + 3y} = \dfrac{3y - x}{y}, \\ \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x - y)y = (3y - x)(x + 3y), \\ \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = y \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3xy - y^2 = 3xy + 9y^2 - x^2 - 3xy, \\ \dfrac{x+3y}{x^2+y^2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3xy - 10y^2 = 0, \\ \dfrac{x+3y}{x^2+y^2} = y \end{cases}.$$ Решим первое уравнение относительно *x*: $D = 49y^2$; $x = \dfrac{-3y \pm 7y}{2}$; $x = 2y$ или $x = -5y$.

1) $\begin{cases} x = 2y, \\ \dfrac{5y}{5y^2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -2, \\ y = -1 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} x = -5y, \\ \dfrac{-2y}{26y^2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5y, \\ \dfrac{-1}{13y^2} = 1 \end{cases}$. Решений нет.

Так как при делении уравнений была получена система, которая является следствием исходной, то необходимо сделать проверку. Подставив каждую из найденных пар в исходную систему, убеждаемся, что обе действительно являются её решениями.

4.2. В остроугольном треугольнике *ABC* отмечены точки *K* и *L* на стороне *AB*, *M* – на стороне *BC* и *N* – на стороне *AC* так, что *KLMN* – прямоугольник. Докажите, что середина его диагонали *KM* лежит на отрезке с концами в серединах стороны *AB* и высоты *CH*.

Решение. Предварительно докажем полезную лемму.

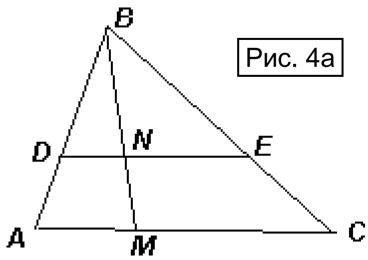


Рис. 4а

Лемма. Пусть в треугольнике *ABC* проведен отрезок *DE*, параллельный *AC* (см. рис. 4а). Луч с началом в вершине *B* пересекает *AC* и *DE* в точках *M* и *N* соответственно. Тогда $\dfrac{DN}{NE} = \dfrac{AM}{MC}$.

Доказательство. Рассмотрим гомотетию с центром *B*, при которой образом точки *A* является точка *D*. Так как *DE* || *AC*. то образом прямой *AC* является прямая *DE*. Значит, при этой гомотетии, точки *C* и *M* переходят в точки *E* и *N* соответственно. Тогда коэффициент гомотетии равен $\dfrac{DN}{AM} = \dfrac{NE}{MC}$, что равносильно утверждению леммы.

Вместо гомотетии можно рассмотреть две пары подобных треугольников: DBN и ABM; NBE и MBC. Из этих подобий следует цепочка равенств: $\dfrac{DN}{AM} = \dfrac{BN}{BM} = \dfrac{NE}{MC}$*. Тогда* $\dfrac{DN}{NE} = \dfrac{AM}{MC}$*, что и требовалось.*

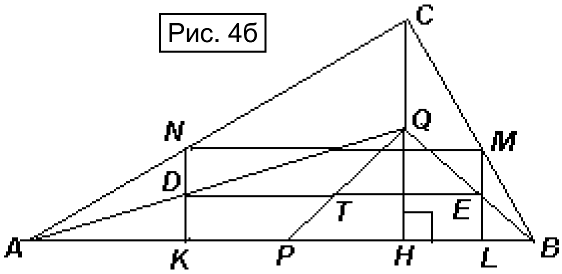


Рис. 4б

Перейдем к решению предложенной задачи. Пусть *P* – середина *AB*, *Q* – середина *CH*, прямые *QA* и *QB* пересекают стороны *KN* и *ML* данного прямоугольника в точках *D* и *E* соответственно (см. рис. 4б).

Так как *KN* || *CH*, то по доказанной лемме *D* – середина *KN*. Аналогично, *E* – середина *ML*. Следовательно, прямая *DE* является осью симметрии прямоугольника. Так как *DE* || *AB* и *P* – середина *AB*, то точка *T* пересечения *PQ* и *DE* является серединой отрезка *DE* (по лемме). Значит, *T* – точка пересечения диагоналей прямоугольника, делящая диагонали пополам.

Отметим, что продолжив эти рассуждения, можно доказать более общий факт: внутренние точки отрезка PQ являются геометрическим местом центров всех прямоугольников, построенных так, как указано в условии задачи.

4.3. Есть 30 гирь с массами 1 г, 2 г, ..., 30 г. Убрали 10 гирь, суммарная масса которых составляет треть от суммарной массы всех. Можно ли оставшиеся гири разбить на две части с равным количеством гирь и с равными массами, независимо от того, какие именно гири были убраны?

Ответ: можно.

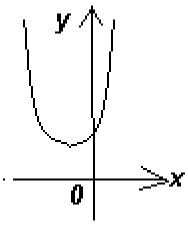
Решение. Суммарная масса всех гирь: $\frac{1+30}{2}\cdot 30$ = 465 (г). После того, как убрали 10 гирь, осталось 20 гирь, суммарная масса которых 310 г. Разобьём все изначально имевшиеся гири на пары с суммарной массой 31 г: (1; 30), (2; 29), ... , (15; 16). Таких пар 15, значит, после удаление десяти гирь, хотя бы 5 пар гирь останутся. Из этих десяти гирь с суммарной массой $31\cdot 5$ = 155 (г) будет состоять одна часть. Тогда суммарная масса остальных десяти будет равна 310 – 155 = 155 (г) и они составят вторую часть. Таким образом, условие задачи будет выполнено.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. Определите знаки коэффициентов *a* и *c* квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ и схематически изобразите его график, если известно, что $a + b + c > 0$ и $0 < b < 2\sqrt{ac}$. Обоснуйте ответ.

Ответ: $a > 0$, $c > 0$; график – см. рис. 5.

Рис. 5



Решение. Так как $0 < b < 2\sqrt{ac}$., то $b^2 < 4ac$. Следовательно, $D = b^2 - 4ac < 0$. Значит, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, то есть график (парабола) не пересекает ось абсцисс.

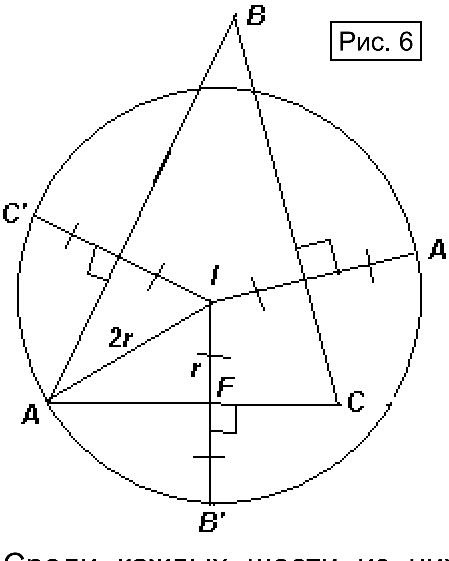
Так как $a + b + c = y(1) > 0$, то график целиком лежит в верхней полуплоскости. Тогда «ветви» параболы направлены вверх. Следовательно, $a > 0$. Тогда $c = y(0) > 0$.

Абсцисса вершины параболы: $x_в = -\frac{b}{2a}$ < 0, поэтому вершина параболы лежит левее оси ординат.

5.2. Точки *A*', *B*' и *C*' симметричны центру *I* вписанной окружности треугольника *ABC* относительно его сторон. Окружность, описанная около треугольника *A*'*B*'*C*', проходит через вершину *A*. Найдите угол *BAC*.

Ответ: 60°.

Рис. 6



Решение. Из условия задачи следует, что расстояние от *I* до сторон треугольника равно радиусу *r* вписанной окружности треугольника *ABC*. Тогда $A'I = B'I = C'I = 2r$, то есть точка *I* является центром описанной окружности треугольника *A'B'C'* (см. рис. 6). Так как эта окружность проходит через точку *A*, то $IA = 2r$.

Пусть *AC* и *IB*' пересекаются в точке *F*, тогда в прямоугольном треугольнике *AIF* катет *IF* в два раза меньше гипотенузы *IA*, значит, $\angle IAF = 30°$. Следовательно, $\angle BAC = 2\angle IAF = 60°$.

5.3. На собрание прибыло 201 человек из пяти стран. Среди каждых шести из них найдутся двое одинакового возраста. Докажите, что из некоторой страны на собрание приехало не менее пяти человек одного пола и одного возраста.

Решение. По принципу Дирихле из какой-то страны приехало не менее 41 человека. Из них не менее, чем 21 человек одного пола. Если среди них есть люди шести разных возрастов, то условие задачи не выполняется, значит возрастов не более пяти.

Если среди 21 человека одного пола не более пяти возрастов, то, опять же, по принципу Дирихле, среди них найдутся 5 человек одного возраста.