Математическая регата
25.03.2023
10 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+9=5y+z, \\ y^2+9=5z+x, \\ z^2+9=5x+y. \end{cases}$

Ответ: (3; 3; 3).

Решение. Сложив три уравнения почленно, получим следствие данной системы: $x^2 + y^2 + z^2 + 9\cdot 3 = 6x + 6y + 6z \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 3$.

Подставив полученные значения в каждое из уравнений, убеждаемся, что полученная тройка чисел действительно является решением исходной системы.

1.2. Один параллелограмм лежит внутри другого. Может ли сумма диагоналей внутреннего быть больше суммы диагоналей внешнего?

Ответ: может.

Решение. Рассмотрим, например, ромб $ABCD$, у которого $\angle A = 1°$, $\angle B = 179°$. Внутри него поместим прямоугольник $EFGH$ с тем же центром симметрии и сторонами, параллельными диагоналям ромба (см. рис. 1). Если стороны EF и GH прямоугольника достаточно близки к вершинам A и C ромба, то длины обеих диагоналей прямоугольника мало отличаются от длины диагонали AC ромба, а длина диагонали BD существенно меньше. Тогда сумма диагоналей прямоугольника больше суммы диагоналей ромба.

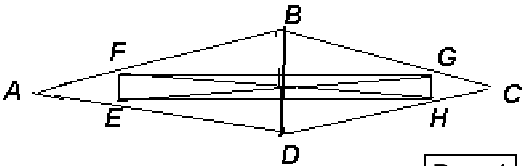


Рис. 1

Существуют и другие примеры.

1.3. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 по кругу в таком порядке, чтобы каждое число делилось на разность своих соседей?

Ответ: можно.

Решение. Например, см. рис. 2.

Рис. 2

5 8 7
3 1
2 4 6

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. На координатной плоскости постройте множество точек (x; y), для которых неравенство $|x\sin\alpha + y\cos\alpha| \le 1$ выполняется независимо от значения α.

Ответ: круг с центом $O(0; 0)$ и радиусом 1.

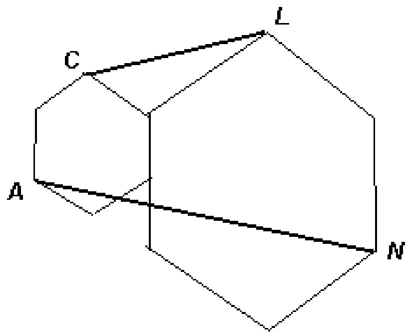
Решение. Заметим, что $x = y = 0$ удовлетворяет условию задачи. При остальных значениях этих переменных: $x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sin\alpha + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\alpha\right) =$

$\sqrt{x^2+y^2}\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha) = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin(\alpha+\beta)$, где $\cos\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Так как при любых значениях α и β выполняется неравенство $|\sin(\alpha+\beta)| \le 1$, то условию задачи удовлетворяют такие x и y, что $\sqrt{x^2+y^2} \le 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 1$.

Если же $x^2 + y^2 > 1$, то найдётся значение α, для которого исходное неравенство не выполняется, например, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.

2.2. Два правильных шестиугольника с отношением сторон 1 : 2 расположены так, как показано на рисунке. Найдите AN, если $CL = 6$.



Ответ: 12.

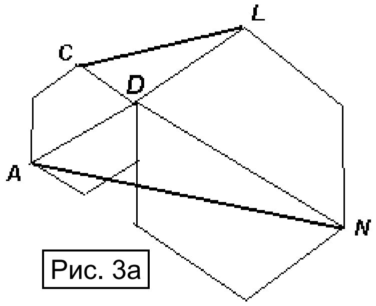


Рис. 3а

Решение. <u>Первый способ</u>. Отметим общую вершину D двух шестиугольников и проведём их большие диагонали AD и DN (см. рис. 3а). Они образуют со сторонами, сходящимися в вершине D, углы 60°, поэтому $\angle ADN = 120° = \angle CDL$. Кроме того, в любом правильном шестиугольнике большая диагональ в два раза больше стороны, значит, треугольник ADN подобен треугольнику CDL с коэффициентом $k = 2$. Следовательно, $AN = 2CL = 12$.

<u>Второй способ</u>. Введём обозначения так, как показано на рис. 3б, где K – точка пересечения лучей AF и DE. Так как угол правильного шестиугольника равен 120°, то треугольник EKF – равносторонний. Кроме того, точки F и K лежат на отрезке AM, причём $AM = AF + FK + KM = 2KM$.

Рассмотрим теперь треугольники AMN и LDC: $AM = 2KM = 2LD$, $MN = 2DC$ и $\angle AMN = \angle LDC = 120°$, следовательно, треугольник LDC подобен треугольнику AMN с коэффициентом $k = 2$. Следовательно, $AN = 2CL = 12$.

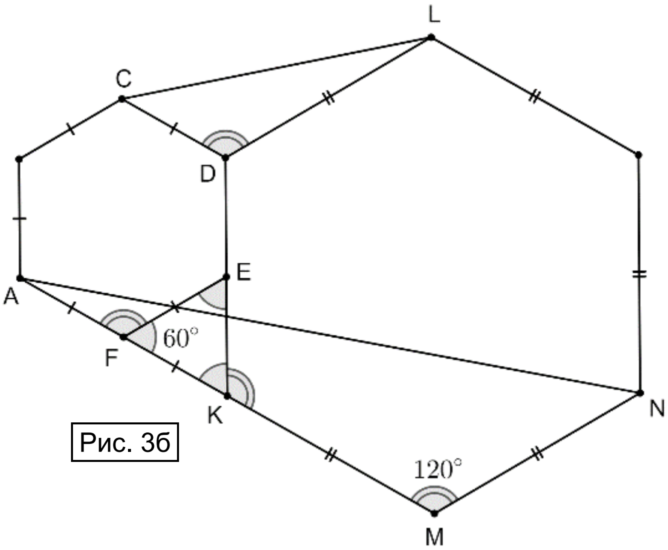


Рис. 3б

2.3. Можно ли раскрасить всю плоскость в два цвета – черный и белый – таким образом, чтобы на каждой окружности радиуса 1 лежали ровно две белые точки?

Ответ: можно.

Решение. Например, покрасим в белый цвет все параллельные между собой вертикальные прямые так, чтобы расстояние между любыми двумя соседними было равно 2. Остальные точки плоскости покрасим в чёрный цвет.

Тогда для единичных окружностей, центры которых равноудалены от двух соседних белых прямых, эти прямые будут касательными, а любая другая единичная окружность пересечёт только одну белую прямую. В обоих случаях на каждой окружности будут лежать ровно две белые точки.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Можно ли число 1111111122222222 (*восемь единиц и восемь двоек*) представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел?

Ответ: можно.

Решение. $1111111122222222 = \underbrace{11...1}_{16 единиц} + \underbrace{11...1}_{8 единиц} = \dfrac{\underbrace{99...9}_{16 девяток} + \underbrace{99...9}_{8 девяток}}{9} = \dfrac{10^{16} - 1 + 10^{8} - 1}{9} =$

$\dfrac{(10^8 - 1)(10^8 + 1) + (10^8 - 1)}{9} = \dfrac{(10^8 - 1)(10^8 + 2)}{9} = \dfrac{10^8 - 1}{3} \cdot \dfrac{10^8 + 2}{3} = 33333333 \cdot 33333334.$

Полученные восьмизначные сомножители можно угадать, если провести эксперименты на числах с меньшим и равным количеством единиц и двоек, но проверить такое представление умножением «в столбик» весьма затруднительно.

3.2. Найдите наибольшую возможную площадь ортогональной проекции правильного тетраэдра с ребром 1 на плоскость.

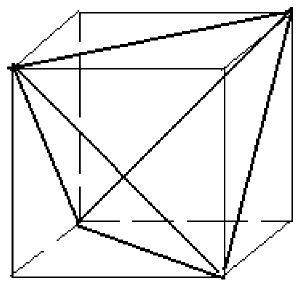
Ответ: 0,5.

Решение. Возможны два случая, рассматривая которые учтём, что длина проекции отрезка не превосходит длины самого отрезка.

1) Проекция тетраэдра – треугольник. Тогда длина каждой из его сторон не больше 1. Обозначим две стороны треугольника через a и b, а угол между ними – через γ. Тогда $S_{пр.} = \frac{ab\sin\gamma}{2} \le \frac{1}{2}$.

2) Проекция тетраэдра – четырёхугольник. Диагонали этого четырехугольника являются проекциями некоторых ребер тетраэдра, поэтому длина каждой из диагоналей не больше 1. Обозначим длины диагоналей через d_1 и d_2, а угол между ними – через φ. Тогда $S_{пр.} = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2} \le \frac{1}{2}$.

Рис. 4



Осталось доказать, что найдется плоскость, проекция на которую имеет площадь в точности $\frac{1}{2}$. Рассмотрим плоскость, параллельную двум скрещивающимся ребрам тетраэдра. Проекцией тетраэдра на такую плоскость является квадрат с диагональю 1, так как противоположные ребра правильного тетраэдра перпендикулярны. Наглядно в этом проще всего убедиться, рассмотрев параллелепипед, описанный около правильного тетраэдра, который является кубом (см. рис. 4).

3.3. Рассматриваются все последовательности длины 8, составленные из чисел 1, 0 и –1. У скольких из них сумма всех членов равна нулю?

Ответ: 1107.

Решение. Заметим, что количество нулей в каждой из требуемых последовательностей чётно, а количество 1 и –1 одинаково. Рассмотрим все возможные случаи, используя следующее рассуждение: выберем k позиций, на которых будут стоять 1, затем из оставшихся позиций выберем k позиций, на которых будут стоять –1, тогда на остальных позициях будут стоять нули. В каждом случае, искомое количество можно вычислить по формуле $C_8^k \cdot C_{8-k}^k$, где $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ – количество сочетаний из m элементов по n, k = 0; 1; 2; 3; 4.

1) Восемь нулей. Очевидно, что такая последовательность одна.

2) Шесть нулей, 1 и –1. Искомое количество равно $C_8^1 \cdot C_7^1 = \frac{8!}{1!7!} \cdot \frac{7!}{1!6!} = 56$.

3) Четыре нуля, две 1 и две –1. Искомое количество равно $C_8^2 \cdot C_6^2 = \frac{8!}{2!6!} \cdot \frac{6!}{2!4!} = 420$.

4) Два нуля, три 1 и три –1. Искомое количество равно $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = 560$.

5) Нулей нет, четыре 1 и четыре –1. Искомое количество равно $C_8^4 \cdot C_4^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$.

Таким образом, 1 + 56 + 420 + 560 + 70 = 1107.

Искомое количество последовательностей можно в каждом случае вычислять и по формуле перестановок с повторениями: $P_{m,n,n} = \frac{(m+n+n)!}{m!n!n!}$, *где m – количество нулей, n – количество 1 и количество –1.*

Четвёртый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Найдите все такие функции, определённые на R, что для всех x и y выполняется равенство $f(x + y + f(x)) = f(x + y) + yf(x)$.

Ответ: $f(x) = 0$.

Решение. Предположим, что для некоторого значения x $f(x) = a$, тогда подставив в исходное равенство $y = 0$, получим: $f(x + a) = a$. Учитывая это, сделаем ещё две подстановки в исходное равенство:

1) Вместо x подставим $x + a$ и $y = 0$. Тогда $f(x + a + f(x + a)) = f(x + a) \Leftrightarrow f(x + 2a) = a$.

2) Вместо y подставим a. Тогда $f(x + a + f(x)) = f(x + a) + af(x) \Leftrightarrow f(x + 2a) = a + a^2$.

Таким образом, $a = a + a^2$, то есть $a = 0$. Следовательно, $f(x) = 0$.

4.2. В треугольнике ABC угол ACB равен 120°, M – середина AB. На сторонах AC и BC отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = PQ = QB$. Найдите угол PMQ.

Ответ: 90°.

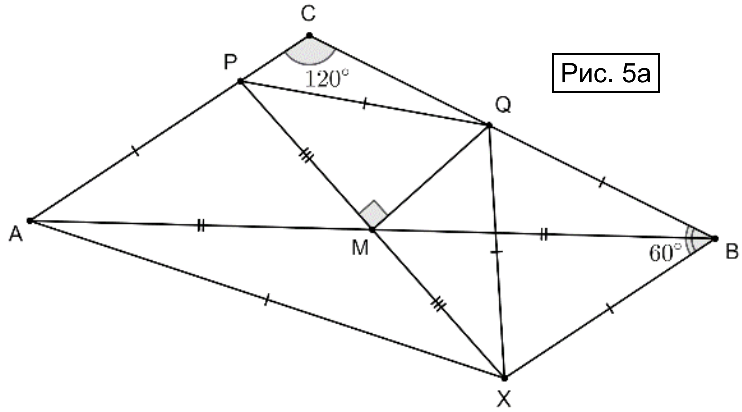


Рис. 5а

Решение. <u>Первый способ</u>. Пусть точка X симметрична P относительно M, тогда $BX \parallel AP$ и $BX = AP = BQ$ (см. рис. 5а). Кроме того, $\angle QBX = 60°$, поэтому треугольник BQX – равносторонний, откуда $QX = BQ = PQ$. Тогда медиана QM равнобедренного треугольника PQX является его высотой, то есть $\angle PMQ = 90°$.

<u>Второй способ</u>. Пусть точка N – середина PQ. Тогда из четырёхугольника $APQB$ получим, что $\overline{MN} = \frac{1}{2}\left(\overline{AP} + \overline{BQ}\right)$ (см. рис. 5б).

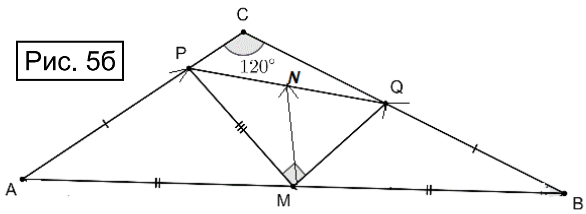


Рис. 5б

Следовательно, $\overline{MN}^2 = \frac{1}{4}\left(\overline{AP}^2 + \overline{BQ}^2 + 2\overline{AP} \cdot \overline{BQ}\right)$.

Учитывая, что $\left|\overline{AP}\right| = \left|\overline{BQ}\right| = \left|\overline{PQ}\right|$ и $\angle\left(\overline{AP}; \overline{BQ}\right)$ = 120°, получим: $MN^2 = \frac{1}{4}(2PQ^2 + 2PQ^2 \cdot \cos 120°) = \frac{1}{4}PQ^2$.

Следовательно, $MN = \frac{1}{2}PQ$. Таким образом, в треугольнике PMQ медиана MN равна половине стороны PQ, значит, $\angle PMQ = 90°$.

4.3. Петя записал в ряд n чисел, каждое из которых 1 или –1 ($n > 4$). Каждым вопросом Вася может узнать у него произведение любых трёх чисел. За какое наименьшее количество вопросов он сможет узнать произведение всех чисел, написанных Петей?

Ответ: если $n = 3k + r$, где $r = 0; 1; 2$, то за $k + r$ вопросов.

Решение. Пусть искомое количество вопросов равно s. Заметим, что каждое из записанных Петей чисел должно принадлежать хотя бы одной запрашиваемой тройке, иначе реальный знак произведения может отличаться от указанного Васей. Следовательно, $s \geq \frac{n}{3}$ (*). Далее рассмотрим три возможных случая.

1) Если $n = 3k$, то Вася разбивает записанные числа на k троек, за k вопросов узнаёт произведение чисел в каждой тройке. Перемножив полученные результаты, он найдёт произведение всех чисел.

2) Если $n = 3k + 1$, где $n \geq 7$, то Вася может сначала узнать произведения чисел с номерами 1, 2 и 3, 1, 4 и 5, 1, 6 и 7, а остальные числа разбить на $k – 2$ тройки. В общее произведение каждый множитель входит один раз, а первое число – 3 раза. Таким образом, за $k + 1$ вопрос узнать произведение можно. Меньшего количества вопросов не хватит в силу неравенства (*).

3) Если $n = 3k + 2$, то Вася может сначала узнать произведения чисел с номерами 1, 2 и 3, 1, 2 и 4, 1, 2 и 5, а остальные разбить на $k – 1$ тройку. В общее произведение первое и

второе число войдут по три раза, а остальные числа по одному разу. Таким образом, за $k + 2$ вопроса узнать произведение можно.

Ясно, что за k вопросов этого сделать нельзя. Докажем, что нельзя обойтись и $k + 1$ вопросом. Если Вася узнал произведения только у $k + 1$ тройки, то в силу (*) ровно одно число попало в две выбранные тройки, а остальные – в одну. Без ограничения общности можно считать, что в две тройки попало первое число. Пусть в одной из этих троек числа с номерами 1, 2 и 3, а в другой – с номерами 1, 4 и 5. Рассмотрим два ряда чисел: 1, 1, … , 1 (все единицы) и –1, –1, 1, –1, 1, 1, …, 1 (три –1, остальные 1). Значения произведений всех выбранных троек для обоих рядов одно и то же, а произведения всех чисел разные.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. В школе 1000 школьников и 35 классов. Каждому школьнику на лбу написали, сколько в его классе учеников. Чему может равняться сумма чисел, обратных записанным?

Ответ: 35.

Решение. Если в классе N учеников, то для учеников этого класса требуемая сумма – это N слагаемых, каждое из которых равно $\frac{1}{N}$, значит, эта сумма равна $N\cdot\frac{1}{N}$ = 1. Следовательно, искомая сумма равна количеству классов, то есть равна 35.

5.2. В остроугольном треугольнике ABC: BM – медиана, H – ортоцентр, P – основание перпендикуляра, опущенного из H на BM. Докажите, что $BM\cdot MP = AM^2$.

Решение. Пусть точки Q и G симметричны относительно точки M точкам P и H соответственно (см. рис. 7). Тогда G лежит на описанной окружности треугольника ABC и BG – диаметр этой окружности. Кроме того, угол GQM симметричен прямому углу HPM, поэтому $\angle GQM = 90°$. Так как угол BQG прямой, а BG – диаметр, то точка Q лежит на той же окружности. По теореме о степени точки $BM\cdot MQ = AM\cdot CM$, откуда $BM\cdot MP = AM^2$.

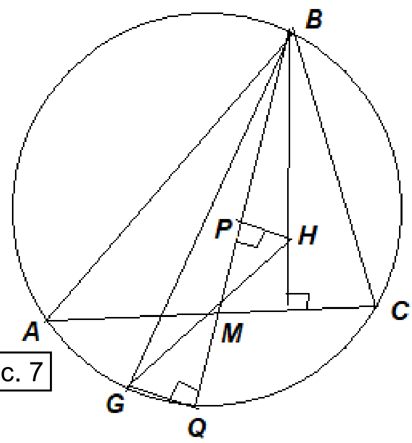


Рис. 7

5.3. Найдите все такие натуральные числа m и n, где $m > n$, что $m!\cdot n! = 10!$

Ответ: $m = 10$, $n = 1$ или $m = 7$, $n = 6$.

Решение. Так как 1! = 1, то одно из решений: $n = 1$, $m = 10$.

Пусть теперь $1 < n < m < 10$. Тогда $m!\cdot n! = (n!)^2\cdot(n + 1)\cdot(n + 2)\cdot \ldots \cdot m$ (1). Разложим число 10! на простые множители: $10! = 2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$ (2). Сравнивая (1) и (2), заметим, что все простые множители числа 10!, у которых чётный показатель степени, должны входить как в $m!$, так и в $n!$, а множитель 7 содержится только в числе $m!$. Следовательно, $5 \le n < 7$.

Если $n = 5$, то, учитывая, что $(5!)^2 = 2^6\cdot3^2\cdot5^2$, получим, что $10! = (5!)^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot7 = (5!)^2\cdot6\cdot7\cdot6$. Это не соответствует равенству (1). При $n = 6$ получим, что $(6!)^2\cdot7$ действительно равно 10!. То есть $n = 6$, $m = 7$.