7 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

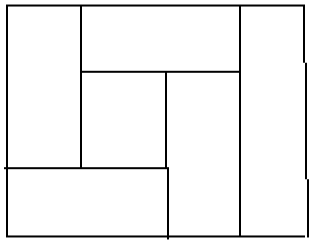
1.1. Сравните дроби: $\frac{101^2-99^2}{201^2-199^2}$ и $\frac{201^2-199^2}{301^2-299^2}$.

Ответ: вторая дробь больше:

Решение. $\frac{101^2-99^2}{201^2-199^2}=\frac{200\cdot 2}{400\cdot 2}=\frac{1}{2}$, а $\frac{201^2-199^2}{301^2-299^2}=\frac{400\cdot 2}{600\cdot 2}=\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$.

1.2. Сложите прямоугольник из шести прямоугольников так, чтобы любые два соседних примыкали друг к другу разными по длине сторонами.

Рис. 1



Ответ: например, см. рис. 1.

Такой пример может получиться из следующих соображений: в центр квадрата со стороной 3 помещаем квадрат со стороной 1, а вокруг него четыре прямоугольника размером 1×2. Затем сбоку пристраиваем любой прямоугольник со стороной 3.

1.3. Незнайка записал натуральное число, делящееся на 17, зачеркнул в нем последнюю цифру, умножил вычеркнутую цифру на 5 и вычел это из получившегося после зачеркивания числа. Знайка не видел ни первоначального числа, ни нового, но утверждает, что новое число также делится на 17. Прав ли Знайка?

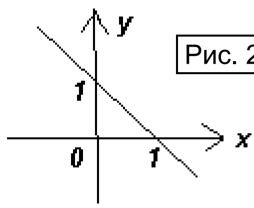
Ответ: Знайка прав.

Решение. Представим число, написанное Незнайкой, в виде $10a+b$, где b – его последняя цифра. По условию это число делится на 17. После зачёркивания последней цифры получилось число a, а после всех произведённых действий – число $a-5b$. Так как $a-5b=51a-5(10a+b)$, а числа $51a$ и $10a+b$ кратны 17, то и полученное число делится на 17.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. На координатной плоскости постройте множество точек, одновременно удовлетворяющих условиям: $|x-1|=|y|$ и $|y-1|=|x|$.

Рис. 2а

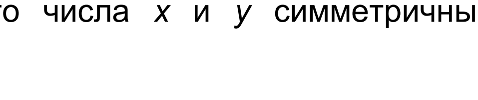


Ответ: см. рис. 2а.

Решение. Первый способ. Запишем заданные условия в виде равносильной системы: $\begin{cases}|x-1|^2=|y|^2,\\ |y-1|^2=|x|^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x+1=y^2,\\ y^2-2y+1=x^2\end{cases}$. Сложив эти уравнения почленно и произведя упрощения, получим: $x+y=1$.

Подставив это в каждое из заданных равенств, убеждаемся, что получатся тождества. Это означает, что искомое множество задается на координатной плоскости прямой $x+y=1$.

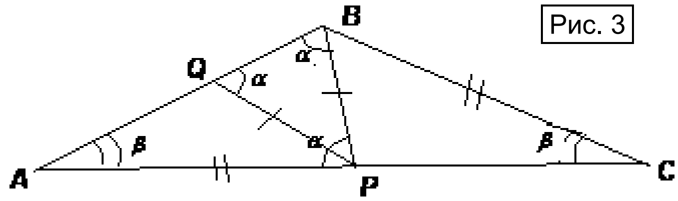
Рис. 2б



Второй способ. Рассмотрим числа x и y на координатной прямой. Заданные условия равносильны тому, что расстояние от x до 1 равно расстоянию от y до 0 и расстояние от x до 0 равно расстоянию от y до 1. Один из возможных случаев такого расположения чисел x и y – см. рис. 2б. Это, в свою очередь, равносильно тому, что числа x и y симметричны относительно середины отрезка [0; 1], то есть $\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}$.

Таким образом, искомое множество задается графиком функции $y=1-x$.

2.2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка P так, что $AP = AB$. На стороне AB отмечена точка Q так, что $PQ = PB$. Докажите, что $AQ = CP$.



Решение. Из условия задачи следует, что $BC = AB = AP$, $\angle BPA = \angle PBA = \angle BQP = \alpha$ и $\angle BCA = \angle BAC = \beta$ (см. рис. 3). Докажем равенство треугольников AQP и CPB, из которого и будет следовать, что $AQ = CP$. В этих треугольниках $AP = BC$ и $QP = PB$. Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Используя теорему о внешнем угле для треугольников AQP и CPB получим, что $\angle APQ = \alpha - \beta = \angle CBP$. Следовательно, треугольники AQP и CPB равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $AQ = CP$.

Учитывая, что $\angle AQP = 180^\circ - \alpha = \angle CPB$, можно также доказывать равенство треугольников AQP и CPB по стороне и двум прилежащим углам.

<u>Второй способ</u>. Так как $\angle QAP = \angle PCB = \beta$, то либо треугольники AQP и CPB равны, либо $\angle AQP + \angle CPB = 180^\circ$ (*полупризнак равенства треугольников*). Покажем, что второй случай невозможен. Действительно, $\angle AQP > 90^\circ$, так как является внешним углом при основании BQ равнобедренного треугольника BPQ, а $\angle CPB > 90^\circ$, так как является внешним углом при основании BP равнобедренного треугольника BAP. Таким образом, $\Delta AQP = \Delta CPB$, значит, $AQ = CP$.

2.3. В шахматном фестивале участвовало 320 человек: мастера и любители. Каждый мастер дал сеанс одновременной игры десяти любителям, при этом, каждому любителю удалось сыграть в шести сеансах. Сколько мастеров участвовало в этом фестивале?

Ответ: 120.

Решение. Пусть на фестивале было x мастеров и $320 - x$ любителей. Подсчитаем общее количество партий, сыгранных между мастерами и любителями. С одной стороны, каждый мастер сыграл 10 партий, значит, это количество равно $10x$. С другой стороны, оно равно $6(320 - x)$, так как каждый любитель сыграл с 6 мастерами.

Таким образом, $10x = 6(320 - x)$, откуда $x = 120$.

Третий тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

3.1. Коля стрелял в тире. Если он попадал в цель, то ему давали еще 3 дополнительных патрона. А если он попадал в цель два раза подряд, то за второе попадание ему давали 4 патрона. Сначала Коле дали 15 патронов, он сделал 44 выстрела, и патроны у него закончились. Сколько раз Коля попал в цель, если три раза подряд он не попал ни разу?

Ответ: 9 раз.

Решение. <u>Первый способ</u>. Всего Коля получил 44 – 15 = 29 дополнительных патронов. За каждый успешный выстрел он получал 3 патрона, и еще один, если этот выстрел был повторным попаданием. Значит, всего Коля попал в цель $\frac{29-t}{3}$ раза, где t – количество повторных попаданий.

Для того, чтобы полученная дробь принимала натуральные значения, число t должно давать остаток 2 при делении на 3. Кроме того, $t < 5$, иначе количество попаданий будет не больше восьми, из которых повторных – не больше четырёх.

Таким образом, $t = 2$, поэтому в цель Коля попал 9 раз.

<u>Второй способ</u>. Пусть x – количество первых попаданий, за которое Коля получил $3x$ дополнительных патронов. После каких-то из этих x выстрелов последовало y попаданий в цель и Коля получил ещё $4y$ патронов. Так как всего было истрачено 44 патрона, то $15 + 3x + 4y = 44$, откуда $3x + 4y = 29$.

Учитывая, что x и y – натуральные числа, причём $x \geq y$, получим: $5 \leq x \leq 9$. Кроме того, x – нечётное число. Подстановкой $x = 5$; 7; 9; находим единственное решение полученного уравнения: $x = 7$; $y = 2$. Тогда искомое количество попаданий – это $x + y = 9$.

Возможны также похожие рассуждения, если в качестве переменных выбраны количество одиночных попаданий и количество двойных.

3.2. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и B и медиана, проведённая из вершины C, образовали равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: 90°, 60°, 30°.

Решение. Пусть I – точка пересечения заданных биссектрис, CM – медиана, P и Q – точки пересечения медианы с биссектрисами, PIQ – равнобедренный прямоугольный треугольник, указанный в условии (см. рис. 4).

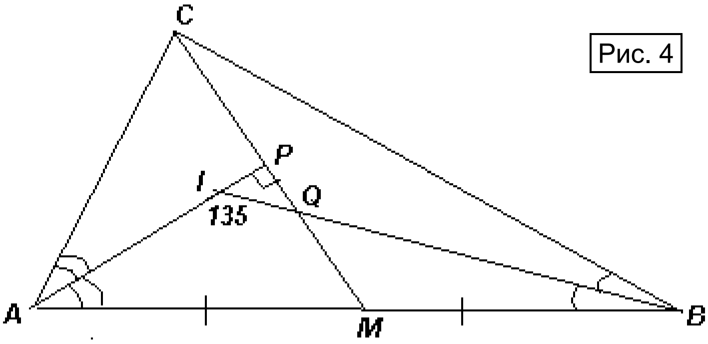


Рис. 4

Так как $\angle AIB = 90° + 0{,}5\angle ACB > 90°$, то угол I треугольника PIQ прямым быть не может. Тогда, без ограничения общности, можно считать, что $\angle IPQ = 90°$. Значит, $\angle AIB = 135°$. Из равенства $90° + 0{,}5\angle ACB = 135°$ получим, что $\angle ACB = 90°$.

Так как AP – биссектриса и высота треугольника CAM, то $AC = AM = 0{,}5AB$, то есть катет AC прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы. Следовательно, $\angle ABC = 30°$, $\angle BAC = 60°$.

3.3. Расставьте в клетках таблицы размером 3×3 числа от 1 до 9 так, чтобы суммы чисел по трём горизонталям, трём вертикалям и обеим диагоналям были различными.

Решение. Пример требуемой расстановки – см. рис. 5. Суммы по горизонталям (снизу вверх) равны 6, 21 и 18, по вертикалям (слева направо) – 16, 17 и 12, а по диагоналям – 15 и 19.

Рис. 5

7	**6**	**5**
8	**9**	**4**
1	**2**	**3**

Четвертый тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

4.1. В строчку записано 100 чисел. Каждое число, начиная со второго, не меньше предыдущего; сумма всех чисел равна 10; сумма любых 30 чисел не меньше, чем 2. Какое наименьшее число может стоять на 96-м месте?

Ответ: $\frac{1}{15}$.

Решение. Оценка. Рассмотрим первые 30 записанных чисел. Так как их сумма не меньше двух, то тридцатое число не меньше, чем их среднее арифметическое, то есть не меньше, чем $2 : 30 = \frac{1}{15}$. Искомое число не меньше тридцатого, значит, оно также не меньше, чем $\frac{1}{15}$.

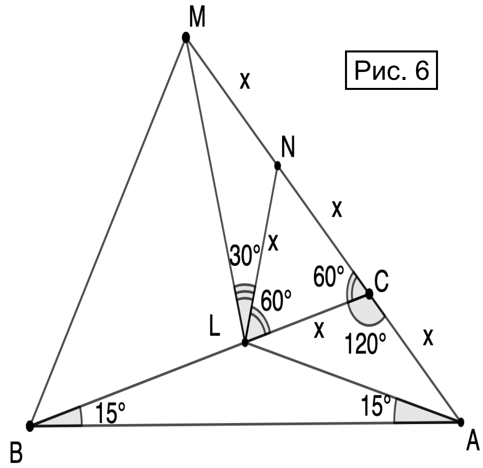
Пример. Указанное значение достигается, если каждое из первых девяносто девяти чисел равно $\frac{1}{15}$, а последнее равно $10 - 99\cdot\frac{1}{15} = 3{,}4$.

Условия задачи выполняются, так как сумма всех чисел равна 10; сумма любых 30 чисел не меньше, чем 2, а каждое число, начиная со второго, не меньше предыдущего

Существуют и другие примеры.

4.2. В треугольнике ABC: $\angle A = 45°$, $\angle B = 15°$. На луче AC отмечена точка M так, что $CM = 2AC$. Найдите угол AMB.

Ответ: $75°$.



Решение. На стороне BC отметим точку L так, что $\angle LAB = 15°$, тогда $\angle CAL = 30°$, поэтому треугольник CLA – равнобедренный: $CL = CA = x$ (см. рис. 6).

Пусть теперь N – середина отрезка MC, тогда треугольник CNL – равнобедренный с углом LCN, который равен $60°$, то есть этот треугольник – равносторонний. В треугольнике CLM: $LN = 0{,}5CM$, следовательно, $\angle CLM = 90°$. Тогда $\angle ALM = 120°$, поэтому $\angle AML = 30°$. Значит, $ML = AL = BL$. Таким образом, $\angle BML = (180° - \angle BLM) : 2 = 45°$, следовательно, $\angle AMB = \angle AML + \angle BML = 75°$.

Можно также рассуждать иначе: сначала опустить перпендикуляр ML на BC, откуда будет следовать, что угол CML равен 30°. Тогда будет обратный порядок счёта углов.

Попутно получено, что точка L – центр описанной окружности треугольника AMB.

4.3. Натуральные числа a и b таковы, что их сумма является произведением двух различных простых чисел. Докажите, что $a^3 + b^3$ не является точным квадратом.

Решение. Пусть $a + b = pq$, где p и q – различные простые числа. Тогда, если a делится на одно из этих простых чисел, то и b на него делится (и наоборот). При этом, ни одно из чисел a или b не может одновременно делиться и на p, и на q. Действительно, если, например, a делится на p и на q, то оно делится и на pq, но тогда $a + b > pq$. Таким образом, на одно из указанных простых чисел не делится ни a, ни b. Без ограничения общности можно считать, что они оба не делятся на p.

Предположим, что число $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)((a + b)^2 - 3ab) = pq(p^2q^2 - 3ab)$ является квадратом натурального числа. Тогда выражение в скобках должно в разложении на простые множители содержать число p. Так как p^2q^2 кратно p, то и $3ab$ кратно p. Но ни a, ни b на p не делятся, поэтому остаётся единственная возможность: $p = 3$.

Если a не делится на q, то аналогично доказывается, что $q = 3$, а это противоречит условию $p \neq q$. Если же a делится на q, то b тоже делится на q, и из равенства $a + b = 3q$ получим, что одно из этих чисел равно q, а второе – $2q$.Но тогда $a^3 + b^3 = 9q^3$, а это число квадратом являться не может, поскольку содержит в разложении на простые множители q в нечётной степени.