Математическая регата
2.03.2024
10 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Решите неравенство: $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-2x}>\sqrt{3}$.

Ответ: [– 3; 4,5].

Решение. Выражение в левой части определено при $-3 \le x \le 4{,}5$.

1) Если $-3 \le x < 0$, то $\sqrt[4]{9-2x}>\sqrt{3}$ и $\sqrt{x+3}\ge 0$, поэтому $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-2x}>\sqrt{3}$

2) Если $x=0$, то $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-2x}=\sqrt{3}+\sqrt[4]{9}>\sqrt{3}$.

3) Если $0 < x \le 4{,}5$, то $\sqrt{x+3}>\sqrt{3}$ и $\sqrt[4]{9-2x}\ge 0$, поэтому $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-2x}>\sqrt{3}$

Таким образом, неравенство выполняется для всех допустимых значений *x*.

1.2. При каких значениях *n* > 2 можно разбить произвольный треугольник на *n* трапеций?

Ответ: при любых.

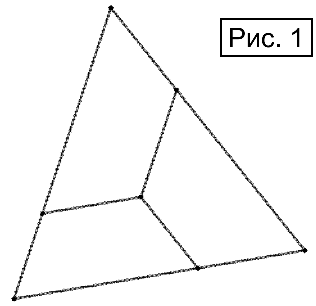


Рис. 1

Решение. Любой треугольник можно разбить на три трапеции, если через точку внутри треугольника провести отрезки, параллельные его сторонам (см. рис. 1). В каждом из получившихся четырехугольников две стороны параллельны, а две другие – нет, так как одна из них лежит на стороне треугольника, а другая – на прямой, параллельной другой стороне.

Если в любой трапеции провести, например, отрезок, параллельный основаниям, то она разобьется на две трапеции. Эту операцию можно повторить любое количество раз, поэтому можно получить любое количество трапеций, большее трёх.

1.3. Можно ли расставить по кругу числа 0, 1, 2, ..., 9 так, чтобы сумма любых трёх чисел, стоящих подряд, была меньше 15?

Ответ: нельзя.

Решение. Предположим, что такая расстановка существует. Найдем в ней число 0 и подсчитаем сумму следующих трёх непересекающихся троек чисел двигаясь, например, по часовой стрелке. С одной стороны, эта сумма должна быть меньше, чем 15·3 = 45, а с другой стороны это сумма всех оставшихся чисел, которая равна 45. Противоречие.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Известно, что числа 2*a* + *b*, 2*b* + *c* и 2*c* + *a* являются членами бесконечной в обе стороны арифметической прогрессии. Верно ли, что число 5*a* – 2*b* также является членом этой прогрессии?

Ответ: верно.

Решение. Пусть данные члены прогрессии имеют номера *m* + 1, *n* + 1 и *p* + 1 соответственно (целые числа *m*, *n* и *p* могут быть положительными, отрицательными или нулём), а x_1 и *d* – первый член и разность прогрессии. Тогда $2a+b=x_1+md$, $2b+c=x_1+nd$, $2c+a=x_1+pd$.

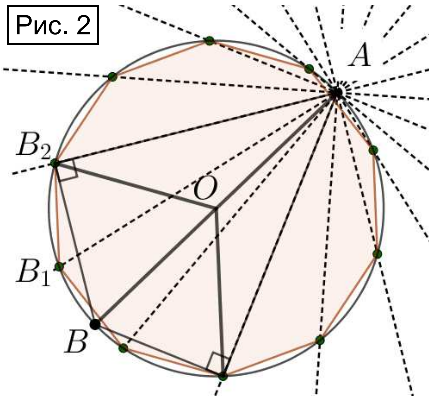
Заметим, что $5a-2b=2(2a+b)-2(2b+c)+(2c+a)$ = $2(x_1+md)-2(x_1+nd)+(x_1+pd)$ = $x_1+(2m-2n+p)d$. Следовательно, $5a-2b$ является членом арифметической прогрессии с номером $2m-2n+p+1$.

Подобрать коэффициенты, с помощью которых число 5a – 2b выражается через три данных члена прогрессии, можно, например, методом неопределённых коэффициентов. Пусть: $5a-2b=x(2a+b)+y(2b+c)+z(2c+a)$, *тогда* $2x+z=5$, $x+2y=-2$, $y+2z=0$. *Решив полученную систему уравнений, например, способом подстановки, получим: x = 2, y = – 2, z = 1.*

2.2. $N > 2$ прямых, проходящих через фиксированную точку, делят плоскость на $2N$ равных углов. Из произвольной точки плоскости, не принадлежащей ни одной из данных прямых, опущены перпендикуляры на эти прямые. Докажите, что основания перпендикуляров являются вершинами правильного многоугольника.

Решение. Пусть A – точка, через которую проходят прямые a_1, a_2, …, a_N, B – точка, из которой опущены перпендикуляры BB_1, BB_2, …, BB_N, O – середина отрезка AB (см. рис. 2). Каждый из отрезков OB_i является медианой прямоугольного треугольника AB_iB, значит, каждый из них равен половине AB, следовательно, все B_i лежат на окружности с центром O и диаметром AB.

Рис. 2



Рассмотрим дугу этой окружности, заключённую между двумя соседними точками B_i и B_{i+1}. Её угловая величина в два раза больше величины вписанного угла $B_{i+1}AB_i$, то есть угла между двумя соседними прямыми a_i и a_{i+1}. По условию, углы между любыми двумя соседними прямыми равны, значит, все точки B_i делят окружность на равные дуги, поэтому они являются вершинами правильного N-угольника.

Можно рассуждать немного по-другому. Из каждой точки B_i отрезок AB виден под прямым углом, поэтому все такие точки лежат на окружности с диаметром AB. А вписанный в эту окружность угол между соседними перпендикулярами равен углу между соседними прямыми, к которым они проведены, поэтому точки B_i делят окружность на равные дуги.

2.3. В каждой клетке таблицы размером 3×3 записано натуральное число так, что среди шести их сумм по строкам и по столбцам нет равных (сами числа не обязательно различные). Какое наименьшее значение суммы всех чисел в этой таблице?

Ответ: 17.

Решение. Наименьшая из сумм по строкам и по столбцам не может быть меньше чем 3, поскольку является суммой трёх натуральных чисел. По условию все шесть сумм по строкам и по столбцам различны, поэтому если их сложить, то результат будет не меньше, чем 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33. Но этот результат должен быть равен удвоенной сумме всех чисел в таблице, значит, эта сумма не может быть меньше чем 17.

1	1	1	3
1	2	2	5
2	3	4	9
4	6	7	

Рис. 3

На рис. 3 – один из примеров, когда сумма 17 достигается.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

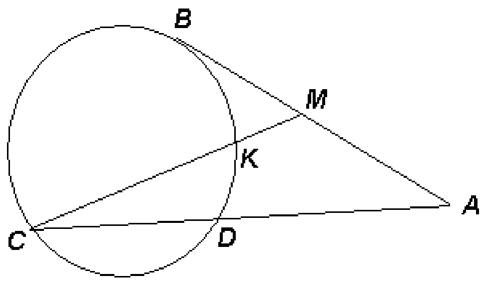
3.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^3 - xyz = -5, \\ y^3 - xyz = 2, \\ z^3 - xyz = 21 \end{cases}$.

Ответ: (1; 2; 3), $\left(-\frac{5}{\sqrt[3]{18}}; \frac{1}{\sqrt[3]{18}}; \frac{7}{\sqrt[3]{18}}\right)$.

Решение. Исходная система равносильна системе $\begin{cases} x^3 = xyz - 5, \\ y^3 = xyz + 2, \\ z^3 = xyz + 21 \end{cases}$. Перемножим уравнения почленно: $x^3y^3z^3 = (xyz-5)(xyz+2)(xyz+21)$. Сделав замену переменных $xyz = a$, получим уравнение: $a^3 = (a - 5)(a + 2)(a + 21)$, которое после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых сводится к квадратному: $18a^2 - 73a - 210 = 0$. Его решения: $a = 6$ или $a = -\frac{35}{18}$.

Следовательно, $\begin{cases} x^3 = 1, \\ y^3 = 8, \\ z^3 = 27 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^3 = -\dfrac{125}{18}, \\ y^3 = \dfrac{1}{18}, \\ z^3 = \dfrac{343}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -\dfrac{5}{\sqrt[3]{18}}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{18}}, \\ z = \dfrac{7}{\sqrt[3]{18}} \end{cases}$.

3.2. Из точки *A* проведена к окружности касательная *AB* и секущая *AC* (точки *B* и *C* лежат на окружности). *D* – вторая точка пересечения *AC* с окружностью (см. рисунок), *M* – середина *AB*. Отрезок *CM* пересекает окружность в точке *K*. Найдите угол *MAK*, если $\angle DCK$ = 18°.



Ответ: 18°.

Решение. Из точки *M* к окружности проведены касательная *MB* и секущая *MC* (см. рис. 4). Тогда, по теореме о квадрате касательной $MC \cdot MK = MB^2$. Так как *M* – середина *AB*, то *MB* = *MA*, а равенство $MC \cdot MK = MA^2$ равносильно пропорции $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{MA}{MK}$. В треугольниках *MAK* и *MCA* есть общий угол *M* и стороны, образующие этот угол, пропорциональны, значит, эти треугольники подобны. Тогда $\angle MAK = \angle MCA$ = 18°.

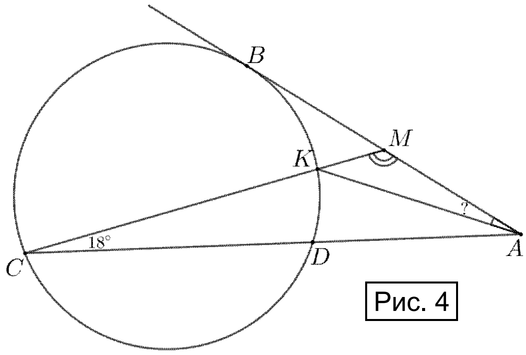


Рис. 4

3.3. На окружности отмечено *n* точек. Рассматриваются все тройки отрезков с концами в отмеченных точках, в которых каждые два отрезка имеют общую точку (внутреннюю, либо один из концов). Сколько всего таких троек?

Ответ: $C_n^3 + C_n^4 \cdot 8 + C_n^5 \cdot 5 + C_n^6$.

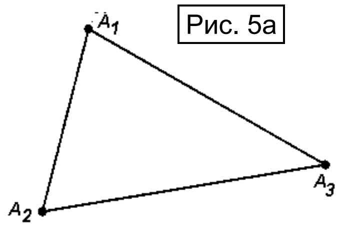


Рис. 5а

Решение. Три отрезка, удовлетворяющие условию, могут соединять 3, 4, 5 или 6 точек.

1) Отрезки соединяют ровно 3 точки (см. рис. 5а), которые можно выбрать C_n^3 способами. Соединить эти точки отрезками можно единственным образом.

2) Отрезки соединяют ровно 4 точки. Из одной точки (пусть из точки A_1) обязательно должны выходить хотя бы два отрезка, но для оставшихся отрезков существует два различных вида расположения (см. рис. 5б). Выбрать четыре точки можно C_n^4 способами. Для каждого выбора четырёх точек существует 8 способов соединить их отрезками в соответствии с условием (4 способа выбрать изображённую сторону выпуклого четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ на рисунке слева и 4 способа выбрать вершину, в которой сходятся три отрезка, на рисунке справа).

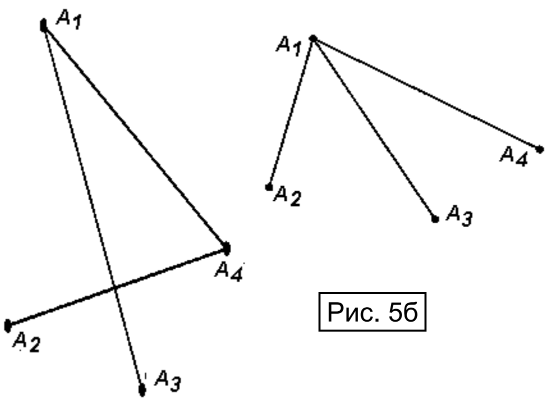


Рис. 5б

3) Отрезки соединяют ровно 5 точек. В этом случае ровно два отрезка имеют общую вершину, третий отрезок соединяет две оставшиеся точки (см. рис. 5в). Выбрать пять точек можно C_n^5 способами. Для каждого выбора пяти точек существуют пять вариантов проведения отрезков (по количеству точек, в которых сходятся два отрезка).

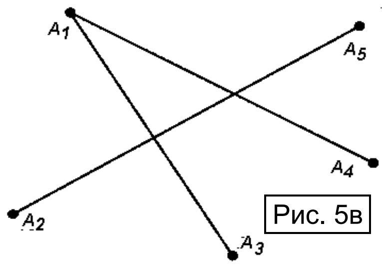


Рис. 5в

4) Отрезки соединяют ровно 6 точек (см. рис. 5г). Выбрать шесть точек можно C_n^6 способами. Для каждого выбора шести точек существует ровно один способ проведения отрезков, так как концы любого отрезка должны находиться по разные стороны от прямых, содержащих два других отрезка.

Таким образом, искомое количество троек равно $C_n^3 + C_n^4 \cdot 8 + C_n^5 \cdot 5 + C_n^6$.

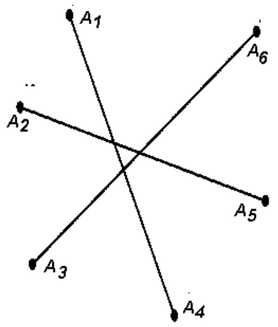


Рис. 5г

Четвёртый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Решите уравнение: sin15*x* = 15sin*x*.

Ответ: $k\pi$, $k \in Z$.

Решение. Докажем, что уравнение sin15*x* = 15sin*x* равносильно уравнению sin*x* = 0.

Первый способ. Достаточно для любых $n \in N$ и $n \geq 2$ доказать неравенство $n|\sin x| \geq |\sin nx|$, где равенство достигается тогда и только тогда, когда sin*x* = 0. Докажем это по индукции.

1) База индукции. $2|\sin x| \geq |\sin 2x| \Leftrightarrow 2|\sin x| \geq |2\sin x \cos x| \Leftrightarrow |\sin x|(1-|\cos x|) \geq 0$, что выполняется для всех *x*. Если sin*x* ≠ 0, то |cos*x*| < 1, поэтому равенство достигается только при sin*x* = 0.

2) Шаг индукции. Предположим, что $k|\sin x| \geq |\sin kx|$, причем равенство достигается только при $\sin x = 0$. Тогда: $|\sin((k+1)x)| = |\sin(kx)\cos x + \sin x \cos(kx)| \leq |\sin(kx)\cos x| + |\sin x \cos(kx)| \leq |\sin(kx)| + |\sin x|$ $\leq (k+1)|\sin x|$, что и требовалось. Кроме того, неравенство $(k+1)|\sin x| \geq |\sin kx| + |\sin x|$ обращается в равенство тогда и только тогда, когда $|\sin kx| = k|\sin x|$, то есть только при $\sin x = 0$ (согласно предположению индукции).

Таким образом, все решения уравнения $\sin 15x = 15\sin x$ находятся среди решений уравнения sin*x* = 0, то есть среди чисел вида $k\pi$, $k \in Z$. При этом, sin15$k\pi$ = 0 = 15sin$k\pi$, значит, все такие числа являются решениями исходного уравнения.

Фактически уравнение $\sin nx = n\sin x$ *решено для всех натуральных n ≥ 2.*

Второй способ. Прибавим к обеим частям данного уравнения sin*x* и воспользуемся формулами суммы синусов и синуса двойного угла. Тогда sin15*x* + sin*x* = 16sin*x* ⇔ 2sin8*x*cos7*x* = 16sin*x* ⇔ 2sin4*x*cos4*x*cos7*x* = 8sin*x* ⇔ 2sin2*x*cos2*x*cos4*x*cos7*x* = 4sin*x* ⇔ sin*x*cos*x*cos2*x*cos4*x*cos7*x* = sin*x* ⇔ sin*x* = 0 или cos*x*cos2*x*cos4*x*cos7*x* = 1.

1) sin*x* = 0 ⇔ *x* = $k\pi$, $k \in Z$.

2) Равенство cos*x*cos2*x*cos4*x*cos7*x* = 1 может выполняться только в случае, когда модуль каждого из косинусов равен 1. Значит, множество решений этого уравнения является подмножеством решений уравнения |cosx| = 1 ⇔ sin*x* = 0.

Отметим, что график функции y = 15sinx получается из графика y = sin15x растяжением в 15 раз по обеим осям. Общие нули этих функций: x = kπ, k∈Z и других общих точек у них нет. Можно доказать, что в указанных точках эти графики касаются.

4.2. Равнобедренные треугольники *ABC* и *A'B'C'* лежат в параллельных плоскостях так, что точка *C'* равноудалена от вершин треугольника *ABC*, а точки *A'* и *B'* удалены на такое же расстояние от прямых, содержащих стороны этого треугольника. Найдите отношение площадей треугольников *A'B'*C' и *ABC*.

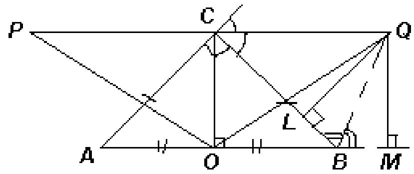
Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение. Из условия задачи следует, что ортогональной проекцией точки *C*’ на плоскость *ABC* является центр *O* окружности радиуса *R*, описанной около треугольника *ABC*. Пусть проекциями точек *A*’ и *B*’ на плоскость *ABC* являются точки *P* и *Q* соответственно. Тогда либо обе эти точки являются центрами вневписанных окружностей треугольника ABC, либо одна из них – центр вписанной окружности, а другая – центр вневписанной.

Поскольку радиусы этих окружностей также равны R (равенство прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету), то второй случай невозможен. Следовательно, точки P и Q являются центрами вневписанных окружностей, касающихся боковых сторон треугольника ABC, значит, PQ – основание равнобедренного треугольника PQO, равного треугольнику $A'B'C'$.

Пусть AB – основание равнобедренного треугольника ABC. Докажем, что если в этом треугольнике равны радиусы описанной и вневписанных окружностей (касающихся сторон AC и BC), то угол C – прямой. Действительно, биссектрисы внешних углов при вершине C, на которых лежат центры P и Q вневписанных окружностей, параллельны AB, значит расстояние от точки C до прямой AB равно радиусу вневписанной окружности и, как было доказано ранее, равно радиусу OC описанной окружности (см. рис. 6). При этом, точки C и O лежат на серединном перпендикуляре к AB, значит, точка O является серединой отрезка AB, поэтому треугольник ABC – прямоугольный.

Рис. 6



Таким образом, у треугольников ABC и PQO основания AB и PQ параллельны, а высота CO – общая. Так как $AB = 2R$, $PQ = 2CQ = \dfrac{2QL}{\sin 45^\circ} = 2R\sqrt{2}$, то $\dfrac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{S_{\Delta PQO}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{PQ}{AB} = \sqrt{2}$.

4.3. Верно ли, что в любом бесконечном множестве, состоящем из натуральных чисел, найдутся три различных числа, сумма двух из которых делится на третье?

Ответ: неверно.

Решение. Построим бесконечную последовательность $\{a_n\}$ по следующему правилу: $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_n = a_1a_2\ldots a_{n-1} + 1$ при $n \geq 3$. Заметим, что каждый её член, начиная со второго, больше предыдущего хотя бы вдвое и даёт остаток 1 при делении на все предыдущие члены. Поэтому если $i < j < k$, то $a_i + a_j < a_k$. Для того чтобы сумма $a_i + a_k$ делилась на a_j, должно выполняться $a_i \equiv -1 \pmod{a_j}$, то есть $a_i = a_j - 1$, что не так. А сумма $a_j + a_k$ при делении на a_i даёт остаток 2.

Таким образом, в построенной последовательности сумма любых двух чисел не делится ни на какое третье.

Существуют и другие примеры.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. Решите уравнение: $x^3 - 2024x + \sqrt{2023} = 0$.

Ответ: $\sqrt{2023}$, $\dfrac{-\sqrt{2023} \pm \sqrt{2027}}{2}$.

Решение. Пусть $\sqrt{2023} = a$. Тогда уравнение примет вид: $x^3 - (a^2 + 1)x + a = 0$. Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. $x^3 - (a^2 + 1)x + a = 0 \Leftrightarrow (x^3 - a^2x) - (x - a) = 0 \Leftrightarrow x(x - a)(x + a) - (x - a) = 0 \Leftrightarrow (x - a)(x^2 + ax - 1) = 0 \Leftrightarrow x = a$ или $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$.

Таким образом, $x = \sqrt{2023}$ или $x = \dfrac{-\sqrt{2023} \pm \sqrt{2027}}{2}$.

Отметим, что разложить многочлен в левой части уравнения на множители можно иначе: заметим, что a – его корень, и разделим этот многочлен на $x - a$.

<u>Второй способ</u>. Так как $x = 0$ не является корнем полученного уравнения, то это уравнение можно записать в виде квадратного относительно переменной a: $xa^2 - a - (x^3 -$

x) = 0. Его дискриминант $D = 1 + 4x(x^3 - x) = 4x^4 - 4x^2 + 1 = (2x^2 - 1)^2$, поэтому его корни: $a = \frac{-1 \pm (2x^2 - 1)}{2x}$.

Таким образом, $2ax = 2x^2$ или $2ax = 2 - 2x^2$. Из первого уравнения, учитывая, что $x \neq 0$ получим: $x = a$. Второе уравнение равносильно уравнению $x^2 + ax - 1 = 0$, корни которого найдены выше.

5.2. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка E. Расстояния от вершин B и D до прямой CE равны m и n. Найдите длину стороны квадрата.

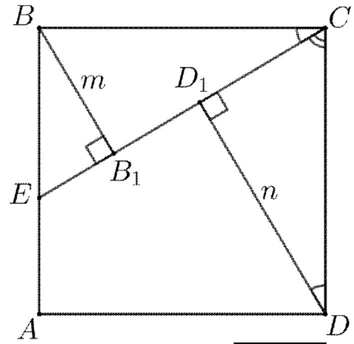


Рис. 7

Ответ: $\sqrt{m^2 + n^2}$.

Решение. Проведем перпендикуляры $BB_1 = m$ и $DD_1 = n$ из точек B и D на прямую CE (см. рис. 7). Заметим, что $\angle BCB_1 + \angle DCD_1 = 90°$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Так как $\angle CDD_1 + \angle DCD_1 = 90°$, то $\angle BCB_1 = \angle CDD_1$. Кроме того, $BC = CD$, поэтому прямоугольные треугольники BCB_1 и DCD_1 равны (по гипотенузе и острому углу), откуда $CB_1 = DD_1 = n$. По теореме Пифагора для треугольника BCB_1: $BC = \sqrt{BB_1^2 + CB_1^2} = \sqrt{m^2 + n^2}$.

Второй способ. Пусть $\angle BCB_1 = \alpha$, тогда $\angle DCD_1 = 90° - \alpha$. Из прямоугольных треугольников BCB_1 и DCD_1 получим: $m = BC \cdot \sin\alpha$, $n = CD \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$. После возведения каждого равенства в квадрат и сложения, учитывая, что $BC = CD = a$ и $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, получим: $m^2 + n^2 = a^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$, откуда $a = \sqrt{m^2 + n^2}$.

5.3. Про натуральные числа m и n известно, что $m \geq n$ и НОК(m; n) = 75НОД(m; n). Докажите, что $m \geq 8n$.

Решение. Обозначим НОД(m, n) = d, откуда $m = dm_1$, $n = dn_1$. Тогда числа m_1 и n_1 взаимно просты, а НОК(m, n) = dm_1n_1. Перепишем равенство из условия: $dm_1n_1 = 75d \Leftrightarrow m_1n_1 = 75$. Число 75 представимо в виде произведения двух взаимно простых чисел только двумя способами: $75 = 75\cdot1 = 25\cdot3$. В обоих случаях больший сомножитель превосходит меньший хотя бы в 8 раз, а так как $m : n = m_1 : n_1$, то $m \geq 8n$.