Математическая регата
25.11.2023
11 класс
Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2-6x+6y=0, \\ y^2-2xy+9=0 \end{cases}$.

Ответ: $\left(3\sqrt{2};3\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$, $\left(-3\sqrt{2};-3\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$.

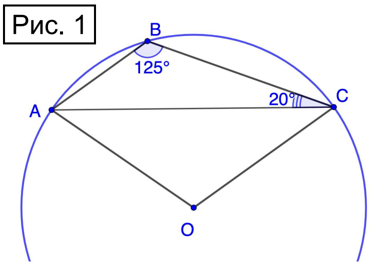
Решение. Сложим уравнения почленно: $x^2+y^2-6x+6y-2xy+9=0 \Leftrightarrow (x-y-3)^2=0 \Leftrightarrow x-y=3$ (формула квадрата трёхчлена). Подставив $y = x - 3$ в любое из уравнений исходной системы, получим, что $x^2=18 \Leftrightarrow x=\pm 3\sqrt{2}$.

Если $x=3\sqrt{2}$, то $y=3\sqrt{2}-3=3\left(\sqrt{2}-1\right)$. Если $x=-3\sqrt{2}$, то $y=-3\sqrt{2}-3=-3\left(\sqrt{2}+1\right)$

После сложения уравнений можно вместо формулы квадрата трёхчлена дважды использовать формулу квадрата разности: $x^2+y^2-6x+6y-2xy+9=0 \Leftrightarrow (x-y)^2-6(x-y)+9=0 \Leftrightarrow (x-y-3)^2=0$.

1.2. В треугольнике *ABC*: ∠*A* = 35°, ∠*C* = 20°, O – центр описанной окружности. Докажите, что точки *A*, *B*, *C* и *O* являются вершинами трапеции.

Рис. 1



Решение. Так как угол *B* данного треугольника равен 125°, то центр *O* описанной окружности лежит вне треугольника (см. рис. 1). Тогда ∠*AOC* = 2(180° – 125°) = 110°, откуда ∠*ACO* = ∠*CAO* = 35° = ∠*BAC*. Следовательно, *CO* || *AB*.

При этом *ABCO* не является параллелограммом, так как не равны его противолежащие углы *O* и *B*. Значит, *ABCO* – трапеция, что и требовалось.

1.3. По кругу отмечены 2023 точки, каждая из которых окрашена в один из двух цветов. Обязательно ли среди них найдутся две точки одного цвета, разделённые ровно шестнадцатью точками?

Ответ: обязательно.

Решение. Пронумеруем все точки по часовой стрелке числами от 1 до 2023 и рассмотрим только те из них, номера которых кратны семнадцати: 17, 34, …, 2023. Среди этих точек между каждыми двумя соседними находится ровно 16 точек. При этом количество рассматриваемых точек равно 2023 : 17 = 119, то есть оно нечётно, поэтому цвета этих точек не могут чередоваться. Следовательно, какие-то две соседние точки из рассмотренных окрашены в один цвет.

Второй тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов)

2.1. Сравните, не используя калькулятор: cos5 и 0,5.

Ответ: cos5 < 0,5.

Решение. Первый способ. Заметим, что $0{,}5=\cos\frac{\pi}{3}$, где $0<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$, а $\cos 5=\cos(-5)=\cos(2\pi-5)$. Докажем, что $\frac{\pi}{3}<2\pi-5<\frac{\pi}{2}$. Действительно: 1) $2\pi-5>\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 6\pi-15>\pi \Leftrightarrow 5\pi>15 \Leftrightarrow \pi>3$; 2) $2\pi-5<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4\pi-10<\pi \Leftrightarrow 3\pi<10$. Последние полученные неравенства верные.

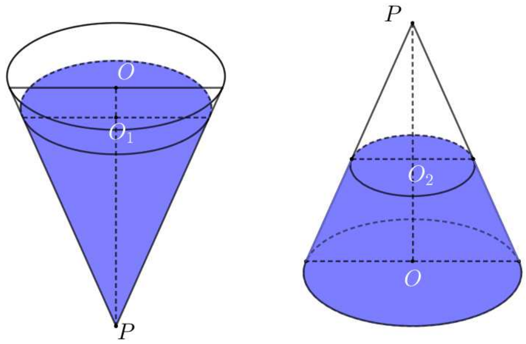
Так как на промежутке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ функция *y* = cos*x* убывает, то из неравенства $2\pi-5>\frac{\pi}{3}$ следует, что $\cos 5<\cos\frac{\pi}{3}=0{,}5$.

Второй способ. Заметим, что 0,5 = $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{3}$, где $\pi < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$ и $\pi < 5 < 2\pi$. На промежутке (π; 2π) функция $y = \cos x$ возрастает. Так как $\pi > 3$, то $\frac{5\pi}{3} > 5$, значит, 0,5 = $\cos\frac{5\pi}{3} > \cos 5$.

2.2. В сосуд, имеющий форму конуса с вершиной внизу, налили воды так, что расстояние от вершины до уровня воды равно 2 см. Сосуд закупорили и перевернули. Теперь расстояние от дна до уровня воды равно 1 см. Найдите высоту конуса. *Уровень воды параллелен основанию конуса.*

Ответ: $\frac{3+\sqrt{93}}{6} \approx 2{,}3$.

Рис. 2



Решение. Пусть высота конуса $PO = H$, круг с центром O_1 – уровень воды в первом случае, а круг с центром O_2 – во втором случае (см. рис. 2). Пусть также V – объём конуса, V_0 – объём части конуса, заполненной водой.

Тогда из подобия конуса и его «верхушки» следует, что $\frac{V_0}{V} = \left(\frac{PO_1}{PO}\right)^3$ и $\frac{V - V_0}{V} = \left(\frac{PO_2}{PO}\right)^3 = \left(\frac{PO - OO_2}{PO}\right)^3$. Сложив эти равенства почленно и учитывая, что $PO_1 = 2$, $OO_2 = 1$, получим: $1 = \frac{8}{H^3} + \frac{(H-1)^3}{H^3}$. После упрощения получим квадратное уравнение $3H^2 - 3H - 7 = 0$. Его корни: $\frac{3 \pm \sqrt{93}}{6}$. Отрицательный корень не является решением задачи, то есть $H = \frac{3+\sqrt{93}}{6} \approx 2{,}3$.

Вместо подобия можно ссылаться на гомотетию с центром P. Также отметим, что конус не обязательно прямой и круговой, в частности сосуд может иметь форму произвольной пирамиды.

2.3. Запись девятизначного числа, делящегося на 37, разбили на две части и переставили эти части друг с другом. Обязательно ли полученное девятизначное число будет делиться на 37?

Ответ: обязательно.

Решение. Пусть девятизначное число разбили на k-значное число A и $(9 - k)$-значное число B (сначала идёт A, потом B). Тогда исходное число равно $A \cdot 10^{9-k} + B$, а после перестановки получилось число $B \cdot 10^k + A$. По условию первое число делится на 37. Умножив второе число на 10^{9-k}, получим число $B \cdot 10^9 + A \cdot 10^{9-k} = 999999999B + (A \cdot 10^{9-k} + B)$. Так как оба слагаемых кратны 37, а умножение числа на степень десятки не влияет на делимость на 37, то полученное девятизначное число делится на 37.

Можно ограничиться рассмотрением случая, когда в девятизначном числе переставляют в начало только последнюю цифру, поскольку перестановку любого количества цифр можно получить, последовательно перенося по одной цифре с конца в начало.

Третий тур (20 минут; каждая задача – 8 баллов)

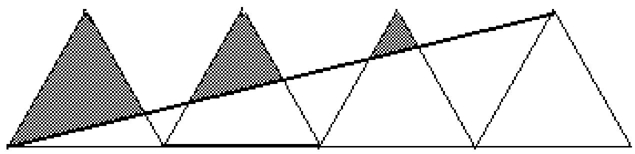
3.1. Решите уравнение: $16\sqrt[3]{x-1} = x^3 + 8$.

Ответ: 2; $\pm\sqrt{5} - 1$.

Решение. Пусть $\sqrt[3]{x-1}$ = *t*, тогда *x* = t^3 + 1. Получим: $\begin{cases} t^3 + 1 = x, \\ x^3 + 8 = 16t \end{cases}$. Умножим первое уравнение на – 8 и сложим со вторым: $x^3 - 8t^3 = 16t - 8x \Leftrightarrow (x-2t)(x^2 + 2xt + 4t^2) + 8(x-2t) = 0 \Leftrightarrow (x-2t)\,((x+t)^2 + 3t^2 + 8) = 0$. Так как вторая скобка принимает положительные значения при любых значениях переменных, то *x* = 2*t*. Тогда $\sqrt[3]{x-1} = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x^3 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ или $x = \pm\sqrt{5} - 1$.

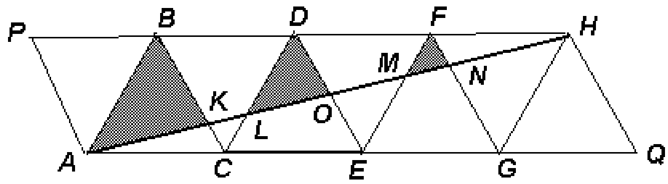
Возможна также замена $2\sqrt[3]{x-1} = y$.

3.2. Прямая пересекает четыре равных равносторонних треугольника, стоящих в ряд (см. рисунок). Найдите сумму площадей закрашенных частей, если площадь каждого треугольника равна 6.



Ответ: 7.

Рис. 3



Решение. Проведём прямую, на которой лежат «верхние» вершины данных треугольников и заметим, что между каждой парой соседних данных треугольников лежит им равный равносторонний треугольник. Введём обозначения так, как показано на рис. 3, построив на стороне *AB* еще один такой же треугольник. Так как точки *B*, *D* и *F* делят отрезок *PH* на четыре равные части, а отрезки *PA*, *BC*, *DE*, *FG* и *HQ* параллельны, то треугольники *ABK*, *LDO* и *MFN* подобны (по углам), причём *PA* : *BK* : *DO* : *FN* = 4 : 3 : 2 : 1. Следовательно, площади этих треугольников относятся как 9 : 4 : 1. При этом $S_{ABK} = \dfrac{3}{4} S_{ABC}$ = 4,5, значит, S_{LDO} = 2 и S_{MFN} = 0,5.

Таким образом, искомая сумма площадей равна 4,5 + 2 + 0,5 = 7.

Отметим, что APHQ – параллелограмм, разбитый на 8 равных треугольников, поэтому площадь треугольника AHP равна $\dfrac{6 \cdot 8}{2}$ *= 24. Это может помочь, если вычислять площади закрашенных треугольников другими способами.*

3.3. В центрах шестнадцати клеток шахматной доски стоят 8 белых и 8 чёрных фишек. Известно, что ни в одной строке и ни в одном столбце нет фишек одного цвета. Для каждой белой фишки подсчитали расстояние до чёрной фишки, стоящей с ней в одном столбце. Найдите наибольшее значение суммы этих расстояний. (*Расстояние между центрами двух соседних клеток равно 1*)**.**

Ответ: 32.

			Б				Ч
		Б				Ч	
	Б				Ч		
Б				Ч			
			Ч				Б
		Ч				Б	
	Ч				Б		
Ч				Б			

Рис. 4

Решение. *Оценка*. Из условия следует, что в каждой строке и в каждом столбце стоит по одной белой и чёрной фишке. Пронумеруем строки снизу вверх, а столбцы – слева направо. Обозначим через w_i и b_i номера строк, в которых стоят белая и чёрная фишки в *i*-м столбце соответственно. Тогда сумма, о которой говорится в условии, равна $\sum_{i=1}^{8} |\, w_i - b_i \,|$.

Избавившись от знаков модуля в этой сумме, получим выражение из 16 чисел, среди которых каждое число от 1 до 8 встречается дважды, при этом перед восемью из них стоит знак «+», а перед остальными восемью – знак «–». Следовательно, эта сумма не превосходит 2(8 + 7 + 6 + 5 – 4 – 3 – 2 – 1) = 32.

Пример. См. рис. 4.
Существуют и другие примеры.

Четвёртый тур (25 минут; каждая задача – 9 баллов)

4.1. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют соотношениям $a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + bc$ и $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{ab+cd}{ad+bc}$.

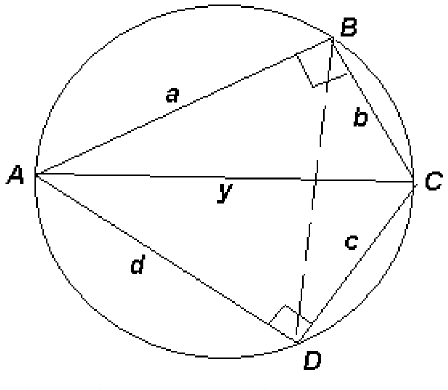
Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Пусть $a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + bc = x^2$, тогда существуют два треугольника с общей стороной x: 1) со сторонами a и d и углом 60° между ними; 2) со сторонами b и c и углом 120° между ними. Следовательно, существует четырехугольник со сторонами a, b, c, d (в некотором порядке) и противоположными углами 120° и 60°. Этот четырехугольник является вписанным. Его площадь S_1 равна сумме площадей указанных треугольников, то есть $S_1 = 0{,}5ad\sin 60° + 0{,}5bc\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}(ad+bc)$, откуда $ad + bc = \frac{4}{\sqrt{3}}S_1$.

Пусть $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = y^2$, тогда существуют два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой y: один – с катетами a и b, другой – с катетами c и d. Следовательно, существует четырехугольник со сторонами a, b, c, d (в некотором порядке) и противоположными прямыми углами. Он также является вписанным, а его площадь $S_2 = \frac{1}{2}(ab+cd)$, откуда $ab + cd = 2S_2$.

Так как площадь вписанного четырехугольника можно вычислить по формуле $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, то она зависит только от длин сторон и не зависит от их порядка. Значит, $S_1 = S_2 = S$, поэтому $\frac{ab+cd}{ad+bc} = 2S : \frac{4}{\sqrt{3}}S = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Рис. 5

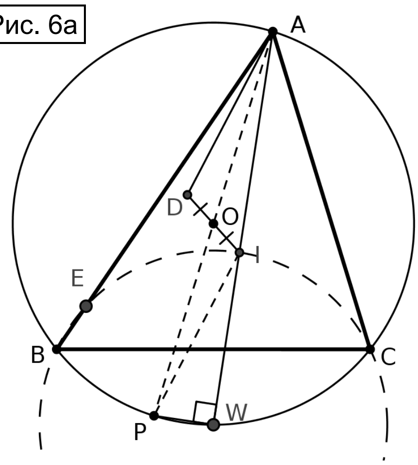


Эту же идею можно реализовать иначе. Пусть, по-прежнему, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = y^2$. На отрезке $AC = y$ как на диаметре построим окружность, в одой из полуокружностей построим точку B так, что $AB = a$, а в другой – точку D так, что $AD = d$. Так как углы ABC и ADC прямые, то $BC = b$, $DC = c$ (см. рис. 5).

Четырёхугольник $ABCD$ вписанный, пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle BCD = 180° - \alpha$. По теореме косинусов для треугольников ABD и CBD: $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180° - \alpha)$, то есть $a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$. Вычитая из этого равенства данное: $a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + bc$, получим, что $ad(1 - 2\cos\alpha) = -bc(1 - 2\cos\alpha) \Leftrightarrow (1 - 2\cos\alpha)(ad + bc) = 0$. Так как $ad + bc > 0$, то $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Тогда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Теперь заметим, что $\frac{ab+cd}{ad+bc} = \frac{(0{,}5ab+0{,}5cd)\sin\alpha}{0{,}5ad\sin\alpha+0{,}5cd\sin\alpha} = \frac{S_{ABC}+S_{ADC}}{S_{BAD}+S_{BCD}}\cdot\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, *так как числитель и знаменатель дроби равны площади четырёхугольника $ABCD$.*

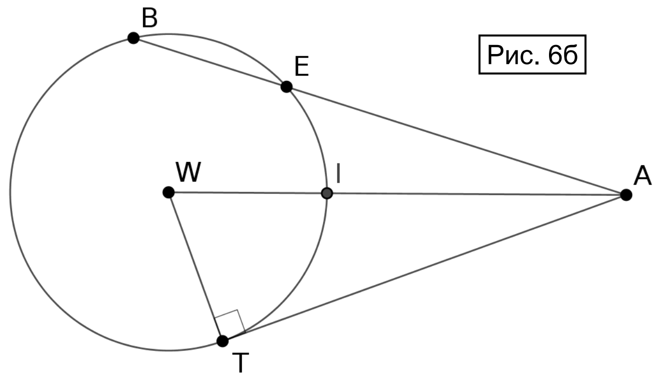
4.2. В остроугольном треугольнике *ABC* построена точка *D*, симметричная центру *I* вписанной окружности относительно центра *O* описанной окружности. Докажите, что $AD^2 = 4R^2 - AB\cdot AC$, где *R* – радиус описанной окружности треугольника *ABC*.



Решение. Пусть биссектриса *AI* пересекает описанную окружность в точке *W.* Проведем диаметр *AP* (см. рис 6а). Тогда *ADPI* – параллелограмм и *AD* = *PI*. Значит, доказываемое равенство можно записать в виде: $AB\cdot AC = 4R^2 - AD^2 = AP^2 - PI^2$ (1). Кроме того, так как *AP* – диаметр окружности, то угол *AWP* – прямой. Тогда правую часть равенства (1) можно преобразовать: $AP^2 - PI^2 = (AW^2 + PW^2) - (WI^2 + PW^2) = AW^2 - WI^2$.

Таким образом, задача сводится к доказательству равенства $AB\cdot AC = AW^2 - WI^2$ (2).

Воспользуемся известным фактом: *WB* = *WC* = *WI*, который называют *теоремой трилистника* или *леммой о трезубце*. Центр *W* описанной окружности треугольника *BIC* лежит на биссектрисе угла *BAC*, поэтому точки пересечения этой окружности со сторонами угла *BAC* попарно симметричны относительно биссектрисы *AW*. В частности, симметричны точки *C* и *E*, значит, *AE* = *AC*.



Пусть *AT* – касательная к описанной окружности треугольника *BIC* (см. рис. 6б). Тогда $AB\cdot AE = AT^2$ (3). Из треугольника *AWT* по теореме Пифагора $AT^2 = AW^2 - WT^2 = AW^2 - WI^2$ (4). Из равенств (3) и (4), учитывая также, что *AC* = *AE*, получим: $AB\cdot AC = AB\cdot AE = AT^2 = AW^2 - WI^2$, то есть равенство (2), которое равносильно утверждению задачи.

В заключительной части решения можно обойтись без теоремы Пифагора, если использовать степень s точки A относительно окружности (BIC): $s = AB\cdot AE = AB\cdot AC = AW^2 - WI^2$. *Это утверждение, равно как и теорему о трилистнике, школьники могут использовать без доказательства.*

4.3. Сумма одиннадцати натуральных чисел равна 441. Найдите наименьшее значение, которое может принимать наименьшее общее кратное всех этих чисел.

Ответ: 42.

Решение. *Оценка*. Заметим, что хотя бы одно из чисел не меньше, чем 41. Действительно, если каждое число меньше, чем 41, то их сумма не превосходит $40\cdot 11 = 440$, что противоречит условию. Следовательно, НОК всех чисел не меньше, чем 41. Но оно не может быть равно 41, поскольку 41 делится только на 1 и 41, при этом $11\cdot 41 = 451 > 441$, а если заменить хотя бы одно число 41 на 1, то сумма уменьшится на 40 и будет меньше 441. Значит, НОК всех чисел не меньше, чем 42.

Пример. 21, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42. Сумма этих чисел равна $21 + 10\cdot 42 = 441$.

Оценку можно провести иначе. Пусть a – наименьшее из чисел, b – наибольшее, n – НОК всех чисел. Тогда a < b, так как 441 не делится на 11. Следовательно, $a \le \frac{n}{2}$, $b \le n$, *и сумма всех чисел не превосходит* $a + 10b \le \frac{n}{2} + 10n = \frac{21n}{2}$, *откуда* $n \ge \frac{441\cdot 2}{21} = 42$. *Такая оценка служит подсказкой для построения примера.*

Пятый тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов)

5.1. Петя задумал три числа и записал на доске средние арифметические для каждой пары из них. Вася заметил, что числа, обратные к записанным Петей, образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что если Петя возведет в квадрат задуманные числа, то также получит члены арифметической прогрессии.

Решение. Пусть Петя задумал числа *a*, *b*, *c* и записал на доске $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$. Вася заметил, что $\frac{2}{b+c}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}$ (характеристическое свойство арифметической прогрессии). Тогда $2(a+b)(c+a)=(b+c)(c+a)+(b+c)(a+b)$ $\Leftrightarrow$ $2ac+2bc+2a^2+2ab$ = $bc+c^2+ab+ac+ab+ac+b^2+bc$ $\Leftrightarrow$ $2a^2=b^2+c^2$ $\Leftrightarrow$ $a^2=\frac{b^2+c^2}{2}$.

Следовательно, числа b^2, a^2 и c^2 образуют арифметическую прогрессию.

5.2. Верно ли, что в любом многоугольнике найдутся такие две стороны, что одна больше другой менее, чем в два раза?

Ответ: верно.

Решение. Пусть в каком-то n-угольнике это не так, тогда упорядочим длины его сторон по возрастанию: $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{n-1} < a_n$. Тогда $2a_1 \le a_2$, $2a_2 \le a_3$, ..., $2a_{n-1} \le a_n$. Сложив почленно эти неравенства, получим: $2a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} \le a_n$.

Это противоречит теореме о длине ломаной: если её вершины не лежат на одной прямой, то $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} > a_n$.

5.3. Шесть мальчиков и шесть девочек встали в круг, чередуясь. Каждый из них записал на ладони число, отличное от нуля. Оказалось, что каждое число, записанное мальчиком, равно сумме чисел, записанных стоящими с ним рядом девочками, а каждое число, записанное девочкой, равно произведению чисел, записанных стоящими рядом с ней мальчиками. Какова может быть сумма всех двенадцати чисел?

Ответ: 4,5.

Решение. Пусть числа на ладонях у мальчиков и девочек по кругу соответственно равны m_1, d_1, m_2, d_2, …, m_6, d_6, где m_i – числа у мальчиков, d_i – числа у девочек. Тогда по условию $d_1 = m_1m_2$, $d_2 = m_2m_3$. Сложив эти два равенства, получим $m_2 = d_1 + d_2 = m_2(m_1 + m_3)$. Так как все числа у детей отличны от нуля, то из последнего равенства следует, что $m_1 + m_3 = 1$. Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Аналогично доказывается, что $m_3 + m_5 = m_5 + m_1 = 1$, откуда $m_1 = m_3 = m_5 = 0,5$. Таким же образом можно доказать, что $m_2 = m_4 = m_6 = 0,5$. Значит, у каждой девочки записано число 0,5·0,5 = 0,25, а сумма всех двенадцати чисел равна 0,5·6 + 0,25·6 = 4,5.

<u>Второй способ</u>. Аналогично доказывается, что $m_2 + m_4 = m_3 + m_5 = m_4 + m_6 = m_5 + m_1 = m_6 + m_2 = 1$, откуда следует, что удвоенная сумма всех чисел, записанных мальчиками, равна 6, а сама сумма равна 3. Каждое число, записанное девочкой, входит в эту сумму два раза, поэтому сумма чисел, записанных девочками, в два раза меньше, то есть равна 1,5. Таким образом, сумма всех двенадцати чисел равна 3 + 1,5 = 4,5.