## 7 класс

### Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

**1.1.** Сравните числа: $\frac{5932\cdot 6001-69}{5932+6001\cdot 5931}$ и 1. *Обоснуйте ответ*.

**Ответ**: числа равны.

**Решение**. Преобразуем числитель дроби: 5932·6001 – 69 = (5931 + 1) ·6001 – 69 = 5931·6001 + 6001 – 69 = 5931·6001 + 5932. Тогда $\frac{5932\cdot 6001-69}{5932+6001\cdot 5931}$ = $\frac{5931\cdot 6001+5932}{5932+6001\cdot 5931}$ = 1.

*Также можно рассмотреть разность числителя и знаменателя и убедиться, что она равна нулю.*

**1.2.** Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого длины рёбер – натуральные числа, площадь поверхности – квадрат натурального числа, а объём – простое число?

**Ответ**: не существует.

**Решение.** Предположим, что это не так. Объём прямоугольного параллелепипеда – это произведение трёх его измерений (трёх ребер, выходящих из одной вершины). Произведение трёх натуральных чисел является простым числом только в случае, когда два из них – единицы, а третье – простое число. Тогда гранями параллелепипеда будут два квадрата со стороной 1 и четыре прямоугольника со сторонами 1 и $p$ (где $p$ – простое). Значит, площадь его поверхности равна $4p + 2$, а это – четное число, которое не делится на 4. Если натуральное число делится на 2, но не делится на 4, то оно не является точным квадратом. Полученное противоречие показывает, что такого параллелепипеда не существует.

**1.3.** Известно, что число $\overline{aba}$ делится на 13. Делится ли на 13 число $\overline{bab}$?

**Ответ**: делится.

**Решение**. <u>Первый способ</u>. Найдем разность: $\overline{bab}$ – $\overline{aba}$ = $100b + 10a + b – (100a + 10b + a) = 91b – 91a = 91(b – a) = 13\cdot 7(b – a)$. Полученное число делится на 13, значит, и число $\overline{bab}$ делится на 13.

<u>Второй способ</u>. Приписав число $\overline{bab}$ к числу $\overline{aba}$ справа, получим: $\overline{ababab}$ = $\overline{ab}\cdot 10101 = 13\cdot 777\cdot\overline{ab}$, то есть это число делится на 13. Значит, $\overline{bab}$ = $\overline{ababab}$ – $\overline{aba}\cdot 1000$ делится на 13.

*Отметим, что числа, указанные в условии, существуют. Например, 676 и 767.*

### Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

**2.1.** Из пункта А в пункт В одновременно по двум разным дорогам выезжают два автомобиля. Если первый поедет с постоянной скоростью $v$, то второй должен ехать со скоростью на 25 км/ч большей, чтобы одновременно с первым приехать в В. Если же второй поедет с постоянной скоростью $v$, то первый должен ехать со скоростью на 20 км/ч меньшей, чтобы приехать в В одновременно со вторым. Найдите скорость $v$.

**Ответ**: 100 км/ч.

**Решение**. Пусть $S_1$ км и $S_2$ км – длины первой и второй дорог соответственно, тогда из условия задачи получим два уравнения: $\frac{S_1}{v}=\frac{S_2}{v+25}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{S_1}{S_2}=\frac{v}{v+25}$ и $\frac{S_1}{v-20}=\frac{S_2}{v}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{S_1}{S_2}=\frac{v-20}{v}$. Следовательно, $\frac{v-20}{v}=\frac{v}{v+25}$. Так как знаменатели отличны от нуля, то $v^2=(v-20)(v+25) \Leftrightarrow 5v=20\cdot 25 \Leftrightarrow v=20\cdot 5=100$.

**2.2.** В треугольнике $ABC$ проведена медиана $AD$, $\angle ADB = 45°$, $\angle CAD = 15°$. Найдите угол $BAD$.

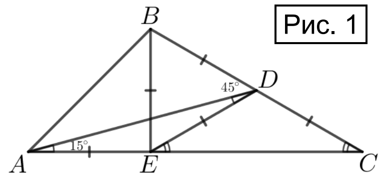


Рис. 1

**Ответ:** 30°.

**Решение.** Из условия следует, что угол $ADB$ – внешний для треугольника $ADC$, поэтому $\angle ACD = \angle ADB - \angle CAD = 30°$ (см. рис. 1). Проведем отрезок $DE$ так, что $\angle ADE = 15°$, тогда в треугольнике $ADE$ два угла равны, значит, он равнобедренный ($AE = ED$). Угол $DEC$ – внешний для треугольника $ADE$, значит, $\angle DEC = \angle EAD + \angle EDA = 30° = \angle DCE$. Следовательно, $ED = DC = DB$.

Таким образом, медиана $ED$ треугольника $BEC$ равна половине стороны $BC$, поэтому этот треугольник прямоугольный ($\angle BEC = 90°$). Кроме того, так как $\angle BCE = 30°$, то $BE = 0{,}5BC = AE$. Значит, треугольник $AEB$ равнобедренный и прямоугольный, поэтому $\angle BAE = 45°$. Следовательно, $\angle BAD = \angle BAE - \angle EAD = 30°$.

*Возможна и другая последовательность рассуждений. Можно по-другому определить точку E, сразу проведя высоту BE треугольника ABC, и воспользоваться тем, что BEC – прямоугольный треугольник с углом 30° при вершине C, а DE – его медиана. В этом случае, надо отдельно доказать, что точка E не может лежать на продолжении стороны AC, то есть, что угол BAC острый. Это можно сделать, например, методом «от противного».*

*В заключительной части решения можно использовать, что треугольник BDE равносторонний.*

**2.3.** Несколько семиклассников решали задачи. Учитель не помнит, сколько было детей и кто из них сколько задач решил. Зато он помнит, что, с одной стороны, каждый решил больше, чем одну пятую от того, что решили остальные, а с другой стороны, каждый решил меньше, чем треть от того, что решили остальные. Сколько могло быть семиклассников?

**Ответ**: 5.

**Решение**. Первый способ. Рассмотрим семиклассника, который решил не больше задач, чем каждый из остальных. Так как он решил больше, чем одну пятую от того, что решили остальные, то этих остальных не больше четырёх. Теперь рассмотрим семиклассника, который решил не меньше задач, чем каждый из остальных. Он решил меньше, чем треть от того, что решили остальные, поэтому остальных не меньше четырёх. Следовательно, всего семиклассников может быть только пятеро.

Это возможно, например, пять семиклассников решили по одной задаче.

Второй способ. Пусть всего было $n$ семиклассников, которые в сумме решили $x$ задач, причем семиклассник с номером $i$ ($i$ = 1, 2, …, $n$) решил $x_i$ задач. Тогда по условию для каждого $i$ выполняется неравенство $\frac{x-x_i}{5} < x_i < \frac{x-x_i}{3}$. Сложим почленно эти $n$ неравенств и учтём, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x$. Получим: $\frac{(n-1)x}{5} < x < \frac{(n-1)x}{3} \Leftrightarrow 3 < n - 1 < 5$, откуда $n = 5$. Пример – см. выше.

## Третий тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

**3.1.** Сумма чисел $a$, $b$ и $c$ равна 2024. Известно, что числа $a - 1$, $b + 1$ и $c^2$ – это та же тройка чисел (в каком-то порядке). Найдите $a$, $b$ и $c$.

**Ответ**: $a = 1012{,}5$, $b = 1011{,}5$, $c = 0$ или $a = 1012$, $b = 1011$, $c = 1$.

**Решение**. Так как у обеих троек одинаковые суммы, то $a + b + c = a - 1 + b + 1 + c^2$, откуда $c = c^2$, то есть $c = 0$ или $c = 1$. Тогда $a = b + 1$ и $b = a - 1$, что одно и то же.

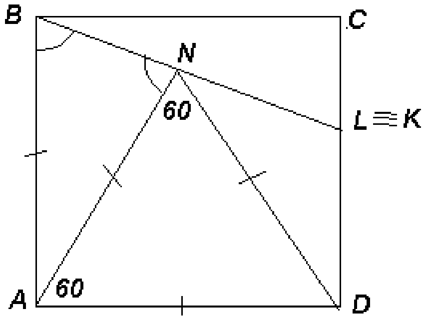
Если $c = 0$, то $a + b = 2024$. Тогда $b + b + 1 = 2024$, значит, $b = 1011{,}5$, $a = 1012{,}5$.

Если $c = 1$, то $a + b = 2023$. Тогда $b + b + 1 = 2023$, значит, $b = 1011$, $a = 1012$.

**3.2.** В квадрате *ABCD* на стороне *CD* отмечена такая точка *K*, что угол *ABK* равен 75°. На отрезке *BK* отмечена такая точка *M*, что угол *DMK* равен 45°. Найдите сторону квадрата, если *DM* = 2.

**Ответ**: 2.

Рис. 2а




**Решение**. Внутри данного квадрата *ABCD* построим на стороне *AD* равносторонний треугольник *AND* и докажем, что точка *N* совпадает с точкой *M* из условия (см. рис. 2а).

Действительно, пусть луч *BN* пересекает сторону *CD* в точке *L*. Так как *AN* = *AB*, то треугольник *BAN* равнобедренный, значит, $\angle ABN = \angle ANB = (180° - \angle BAN) : 2 = 75°$. Следовательно, точка *L* совпадает с точкой *K* из условия. Кроме того, $\angle DNK = 180° - (\angle ANB + \angle AND) = 45°$.

Пусть теперь точки *M* и *N* не совпадают, тогда точка *M* занимает на отрезке *BK* одно из двух положений: $M_1$ или $M_2$ (см. рис. 2б). Тогда угол *DNK* – внешний для треугольника $DNM_1$, поэтому $\angle DM_1K < 45°$, а угол $DM_2K$ – внешний для треугольника $DNM_2$, поэтому $\angle DM_2K > 45°$. Противоречие. Следовательно, точка *N* совпадает с точкой *M* из условия, значит, *AB* = *DM* = 2.

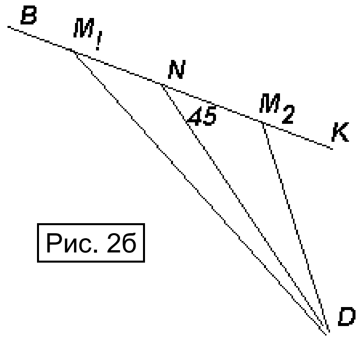



Рис. 2б

*Из решения следует, что M – середина отрезка BK.*

*Использованный метод решения называется «обратным ходом» и может быть использован в некоторых «жестких» геометрических конструкциях.*

*Кроме того, можно установить связь, между конструкцией в этой задаче и конструкцией задачи 2.2. Для этого проведём диагональ квадрата BD, которая является биссектрисой углов B и D, и вычислим некоторые углы внутри треугольника BDK (см. рис. 2в):* $\angle KBD = \angle ABK - \angle ABD = 30°$, $\angle CKB = \angle ABK = 75°$, *угол CKB – внешний для треугольника MKD, значит,* $\angle MDK = \angle CKB - \angle DMK = 30°$, $\angle BDM = \angle BDK - \angle MDK = 15°$.

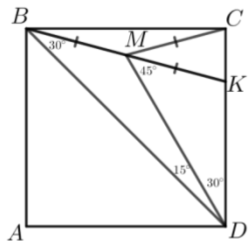



Рис. 2в

*Сравним теперь треугольник BDK с треугольником ABC из задачи 2.2 (см. рис. 1): два угла в треугольниках равны 45° и 30° (значит, и третьи их углы равны), и из вершины угла, равного 45°, проведен отрезок, который делит его на углы 15° и 30°. По условию задачи 2.2 этот отрезок был медианой треугольника, значит, и в нашем случае, точка M – середина отрезка BK. Тогда CM – медиана прямоугольного треугольника BCK, проведённая к гипотенузе, поэтому BM = CM = KM. Таким образом,* $\angle MCK = \angle MKC = 75° = \angle DMC$ *(например, из суммы углов треугольника CDM). Следовательно, DC = DM = 2.*

*Это решение выходит за рамки программы 7 класса, так как использует, что преобразование подобия переводит медиану треугольника в медиану, проведённую из соответствующей вершины.*

**3.3.** Докажите, что если сумма целых чисел *n*, *m* и *k* не делится на 3, то значение выражения $(n - m)^3 + (m - k)^3 + (k - n)^3$ делится на 9.

**Решение**. Так как *n* + *m* + *k* не делится на 3, то слагаемые не могут давать ни одинаковые остатки при делении на 3, ни попарно различные. Значит, два из этих чисел дают одинаковые остатки при делении на 3, а у третьего числа этот остаток другой.

Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Пусть $n - m = x$, $m - k = y$, тогда $k - n = -(x + y)$. Значит, $(n - m)^3 + (m - k)^3 + (k - n)^3 = x^3 + y^3 - (x + y)^3 = -3xy(x + y)$.

Так как какие-то два из чисел *n*, *m* и *k* дают одинаковые остатки при делении на 3, то одно из чисел *x*, *y* или *x* + *y* делится на 3. Следовательно, $(n - m)^3 + (m - k)^3 + (k - n)^3$ делится на 9.

*Отметим, что данную сумму кубов можно разложить на множители и не вводя новые переменные, а используя различные тождества. Например:*
*1) Запишем формулу куба разности в виде: $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$. Тогда, учитывая, что кубы чисел взаимно уничтожатся, получим: $(n - m)^3 + (m - k)^3 + (k - n)^3 = 3mn(m - n) + 3km(k - m) + 3nk(n - k) = 3(mn(m - n) + km(k - m) + nk(n - m) + nk(m - k)) = 3(n(m - n)(m - k) + k(k - m)(m - n)) = 3(m - n)(m - k)(n - k)$.*
*2) Воспользуемся следствием из тождества трёх кубов: $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$. В данном случае, $a + b + c = 0$, поэтому $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, то есть $(n - m)^3 + (m - k)^3 + (k - n)^3 = 3(n - m)(m - k)(k - n)$.*

*При таком подходе достаточно использовать только то, что числа n, m и k не могут иметь различные остатки при делении на 3.*

Второй способ. Без ограничения общности можно считать, что одинаковые остатки от деления на 3 имеют числа $n$ и $m$, тогда $n - m$ кратно трём, поэтому $(n - m)^3$ делится на 27.

У чисел $m - k$ и $n - k$ одинаковые остатки при делении на 3, отличные от нуля. Следовательно, при делении на 3 оба эти числа дают либо остаток 1, либо остаток 2. Значит, $m - k = 3p \pm 1$, $n - k = 3q \pm 1$ ($p$ и $q$ – целые числа). Тогда $(m - k)^3 + (k - n)^3 = (m - k)^3 - (n - k)^3 = (3p \pm 1)^3 - (3q \pm 1)^3 = 3(p - q)(9p^2 \pm 6p + 1 + 9pq \pm 3p \pm 3q + 1 + 9q^2 \pm 6q + 1) = 3(p - q)(9p^2 \pm 9p \pm 9q + 9q^2 + 9pq + 3)$ делится на 9, так как вторая скобка делится на 3.

Таким образом, $(n - m)^3 + (m - k)^3 + (k - n)^3$ делится на 9.

## Четвертый тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

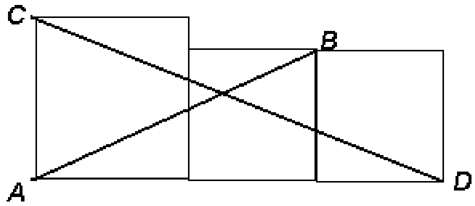
**4.1.** Известно, что $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Найдите значение выражения $a^4 + b^4 + c^4$.

**Ответ**: 0,5.

**Решение**. Так как $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$, то, подставив значения из условия, получим: $ab + bc + ac = -0{,}5$. Следовательно, $(ab + bc + ac)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2ab^2c + 2a^2bc + 2abc^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abc(a + b + c)$. Учитывая, что $a + b + c = 0$, $(ab + bc + ac)^2 = 0{,}25$, получим, что $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = 0{,}25$.

Так как $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2$, то $1 = a^4 + b^4 + c^4 + 2\cdot 0{,}25$, откудв $a^4 + b^4 + c^4 = 0{,}5$.

**4.2.** Три квадрата расположены так, как показано на рисунке. Найдите угол между прямыми $AB$ и $CD$.




**Ответ**: 45°.

**Решение**. Обозначим сторону большего квадрата через $a$, а сторону меньшего – через $b$. Расположим еще один квадрат со стороной $a$ так, как показано на рис. 3, введём обозначения некоторых точек и проведём отрезки $CE$ и $CF \perp BE$. Тогда $GE = a + b$, $GF = AC = a$, значит $EF = a + b - a = b$, $CF = AG = a + b$. Три прямоугольных треугольника: $CFE$, $AGB$ и $EGD$ равны по двум катетам ($CF = AG = EG = a + b$, $EF = BG = GD = b$).

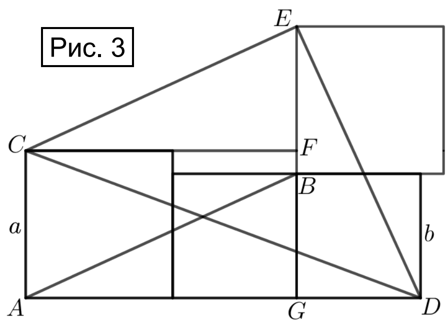


Рис. 3

Из равенства этих трёх треугольников следует, что $CE = AB = ED$, а из равенства треугольников $CFE$ и $AGB$ следует, что $\angle CEF = \angle ABG$, значит, прямые $CE$ и $AB$ параллельны, поэтому они образуют одинаковые углы с прямой $CD$. Кроме того, из равенства треугольников $CFE$ и $EGD$ следует, что $\angle GED = \angle FCE = 90° - \angle CEF$, значит, треугольник $CED$ прямоугольный и равнобедренный. Тогда угол между прямыми $CE$ и $CD$ равен 45° и равен искомому.

*Возможны и другие дополнительные построения, аналогичные приведённому выше.*

**4.3.** При дворе – 50 мушкетёров. Каждый день они разбиваются на пары и проводят тренировочные поединки. Никакие два мушкетёра не бились друг с другом дважды. Обязательно ли спустя 24 дня найдутся 3 мушкетёра, которые не сражались друг с другом?

**Ответ**: обязательно.

**Решение**. Выберем произвольного мушкетёра. Обозначим группу мушкетёров, с которыми он не бился, через G – в ней 25 мушкетёров. Если какие-то двое из G не бились, то вместе с выбранным мушкетёром они образуют искомую тройку. Если же каждые двое из G бились, то уже внутри этой группы у каждого было по 24 соперника. Значит, каждый мушкетёр из G провёл поединки только с мушкетёрами из этой группы. Но в G нечётное количество мушкетёров, поэтому они не могли быть разбиты на пары. Таким образом, найдутся 3 мушкетёра, которые не сражались друг с другом.

*Это же решение можно изложить на языке теории графов.*