Математическая регата
27.01.2024
8 класс
Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Решите уравнение: $\frac{111}{x}+\frac{111}{x^2}-\frac{11}{x^3}=11$.

Ответ: -1; 11; $\frac{1}{11}$.

Решение. Перенеся третье слагаемое в правую часть и избавившись от знаменателя, получим: $\begin{cases}111x^2+111x=11x^3+11,\\ x\neq 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $11(x+1)(x^2-x+1)=111x(x+1)$ $\Leftrightarrow$ $x+1=0$ или $11(x^2-x+1)=111x$ $\Leftrightarrow$ $x=-1$ или $11(x^2-x+1)=111x$ $\Leftrightarrow$ $x=-1$ или $11x^2-122x+11=0$ $\Leftrightarrow$ $x=-1$ или $x=11$ или $x=-\frac{1}{11}$.

1.2. Вершину *A* прямоугольника *ABCD* соединили отрезками с серединами сторон *BC* и *CD*. Мог ли один из этих отрезков оказаться вдвое длиннее другого?

Ответ: не мог.

Решение. Пусть *N* – середина *BC*, *M* – середина *CD* (см. рис. 1). Не умаляя общности, можно считать, что *AM* > *AN*. Предположим, что *AM* = 2*AN*. Далее можно рассуждать по-разному.

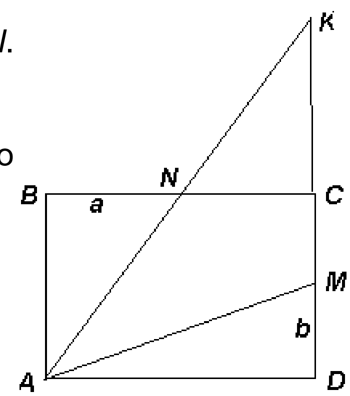


Рис. 1

<u>Первый способ</u>. Продлим отрезок *AN* до пересечения с прямой *CD* в точке *K*. Из равенства прямоугольных треугольников *KCN* и *ABN* следует, что *KN* = *AN*, тогда *AK* = *AM*. Значит, $\angle AKM = \angle AMK$. Но угол *AMK* тупой, так как он внешний для прямоугольного треугольника *AMD*. Противоречие.

Можно также отметить середину P отрезка AM и провести аналогичное рассуждение для треугольника ANP.

<u>Второй способ</u>. Пусть *BN* = *a*, *DM* = *b*, тогда *AD* = 2*a*, *AB* = 2*b*. Из прямоугольных треугольников *ADM* и *ABN* по теореме Пифагора получим: $AM=\sqrt{4a^2+b^2}$, $AN=\sqrt{4b^2+a^2}$. Из нашего предположения следует, что $AM^2 = 4AN^2$, то есть $4a^2 + b^2 = 16b^2 + 4a^2$, откуда $b = 0$, что невозможно.

Противоречие можно получить и так: $MN=\sqrt{a^2+b^2}$ < $AN=\sqrt{a^2+4b^2}$, *поэтому AN + MN < 2AN = AM.*

1.3. К некоторому натуральному числу прибавили удвоенную сумму его цифр. Могло ли получиться число 2024?

Ответ: не могло.

Решение. Как известно, натуральное число и сумма его цифр дают при делении на 3 одинаковые остатки. Следовательно, если сложить натуральное число и удвоенную сумму его цифр, то сумма будет кратна трём. Однако число 2024 на 3 не делится (сумма его цифр равна 8), поэтому получиться оно не могло.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Однажды 91 участник летнего лагеря решили сходить в кино. Прошлым летом они бы поместились в 8 рядов кинозала (но не в 7). Однако этим летом каждое четвёртое кресло (то есть каждое кресло, номер которого в ряду делится на 4) должно оставаться пустым, поэтому один участник не поместился в кинозале. Сколько рядов в зале и сколько кресел в каждом из них, если во всех рядах поровну мест?

Ответ: в зале 10 рядов, каждом ряду – 12 мест.

Решение. Так как для 91 школьника не хватает 7 рядов, то в каждом ряду меньше, чем 91 : 7 = 13 мест, а так как 8 рядов им хватает, то мест больше, чем 91 : 8 = $11\frac{3}{8}$ > 11. Значит, в ряду 12 мест.

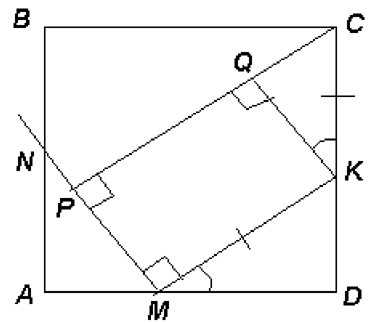
Этот же результат можно получить из двойного неравенства $7x < 91 \le 8x$, где x – количество мест в ряду.

Каждое четвёртое кресло должно оставаться пустым, значит, в каждом ряду может быть занято 9 мест. Так как одному участнику места не хватило, то сумели сесть 90 участников. Значит, в каждом ряду сидело 9 человек. Следовательно, в зале – 10 рядов.

2.2. На сторонах *CD* и *AD* квадрата *ABCD* отмечены точки *K* и *M* так, что *MK* = *CK*. Перпендикуляр к *MK*, проходящий через точку *M*, пересекает *AB* в точке *N*. Докажите, что расстояние от *C* до прямой *MN* равно стороне квадрата.

Решение. Пусть *P* – основание перпендикуляра, опущенного из вершины *C* на прямую *MN* (см. рис. 2 а, б). Далее можно рассуждать по-разному.

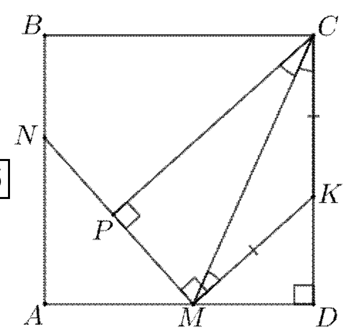
Рис. 2а



<u>Первый способ</u>. Из точки *K* опустим перпендикуляр *KQ* на *CP*, тогда *KMPQ* – прямоугольник, поэтому *PQ* = *MK* (см. рис. 2а). Кроме того, $\angle CKQ + \angle MKD = 90°$, значит, $\angle CKQ = \angle KMD$. Тогда прямоугольные треугольники *CKQ* и *KMD* равны (по гипотенузе и острому углу), откуда *CQ* = *KD*. Таким образом, *CP* = *PQ* + *CQ* = *MK* + *KD* = *CK* + *KD* = *CD*, что и требовалось.

<u>Второй способ</u>. Проведём отрезок *CM* (см. рис. 2б). Так как *CP* || *MK*, то $\angle PCM = \angle KMC$. Треугольник *KMC* равнобедренный, поэтому $\angle KMC = \angle KCM$. Тогда прямоугольные треугольники *CPM* и *CDM* равны (по гипотенузе и острому углу), откуда *CP* = *CD*.

Рис. 2б



2.3. В комнате находятся несколько рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждому дали листок бумаги и попросили написать про каждого из остальных, кем он является: лжецом или рыцарем. Когда собрали все листы и произвели подсчёты, то записей «лжец» оказалось 40, а записей «рыцарь» – 32. Сколько в комнате рыцарей, если известно, что их больше, чем лжецов?

Ответ: 5 рыцарей.

Решение. Пусть в комнате находятся x рыцарей и y лжецов, а всего n человек. Каждый из них сделал $n - 1$ запись, поэтому $n(n - 1) = 40 + 32 = 72$, откуда $n = 9$. При этом написать друг про друга «лжец» могут только люди разного типа, то есть каждый из x рыцарей сделал это y раз, а каждый из y лжецов – x раз. Следовательно, $2xy = 40 \Leftrightarrow xy = 20$. Последнее равенство возможно, только когда не упорядоченная пара $\{x, y\}$ совпадает с одной из пар: {1, 20}, {2, 10}, {4, 5}. Равенству $x + y = 9$ из них удовлетворяет только пара {4, 5}, а так как по условию рыцарей больше, чем лжецов, то $x = 5$ и $y = 4$.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Докажите, что число $2022\cdot2024^3 - 2023\cdot2021^3$ является кубом целого числа.

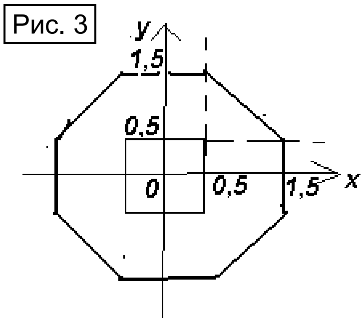
Решение. Пусть 2023 = m, тогда данное выражение примет вид: $(m - 1)(m + 1)^3 - m(m - 2)^3 = (m - 1)(m^3 + 3m^2 + 3m + 1) - m(m^3 - 6m^2 + 12m - 8) = m^4 + 3m^3 + 3m^2 + m - m^3 - 3m^2 - 3m - 1 - m^4 + 6m^3 - 12m^2 + 8m = 8m^3 - 12m^2 + 6m - 1 = (2m - 1)^3$.

Данное выражение равно 4045^3. Возможны и другие варианты введения переменной.

3.2. Дан квадрат со стороной 1. Найдите геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до прямых, содержащих его стороны, равна 4.

Ответ: граница восьмиугольника, симметричного относительно центра данного квадрата, все углы которого равны по 135°, а стороны длины 1 и длины $\sqrt{2}$ чередуются (см. рис. 3).

Рис. 3



Решение. Рассмотрим декартову систему координат на плоскости и расположим данный квадрат так, чтобы его центром была точка (0; 0), а стороны были параллельны осям координат (см. рис. 3). Заметим, что для любой точки, принадлежащей данному квадрату, сумма расстояний до его сторон равна 2, поэтому все искомые точки лежат вне квадрата.

Сначала рассмотрим точки, лежащие вне квадрата в первой координатной четверти. Для любой точки (x; y), лежащей в полосе с границами y = 0 и y = 0,5, расстояния от неё до прямых, содержащих вертикальные стороны данного квадрата равны x – 0,5 и x + 0,5, а до прямых, содержащих горизонтальные стороны, сумма расстояний равна 1. Значит, искомая сумма расстояний равна 2x + 1 = 4. Следовательно, условию удовлетворяют точки этой полосы, лежащие на прямой x = 1,5. Проведя аналогичное рассуждение для точек, лежащих в полосе с границами x = 0 и x = 0,5, получим, что условию удовлетворяют точки прямой y = 1,5.

Если же точка лежит в первой четверти вне этих полос, то расстояние от неё до прямых, содержащих вертикальные стороны, равно x – 0,5 и x + 0,5, а до прямых, содержащих горизонтальные стороны, равно y – 0,5 и y + 0,5. Тогда искомые точки удовлетворяют уравнению 2x + 2y = 4 ⇔ x + y = 2. Таким образом, в первой четверти получим трёхзвенную ломаную, удовлетворяющую условию. Учитывая, что данный квадрат симметричен как относительно осей координат, так и относительно начала координат, получим точки искомого ГМТ в остальных координатных четвертях.

Отметим, что аналогичные рассуждения можно провести и не используя систему координат.

3.3. В клетках прямоугольной таблицы расставлены натуральные числа так, что в каждой строчке и в каждом столбце сумма чисел чётна. Докажите, что, если раскрасить клетки таблицы в шахматном порядке, то сумма чисел в чёрных клетках будет чётна.

Решение. Будем считать, что левая нижняя клетка таблицы чёрная. Пронумеруем строчки снизу вверх, а столбцы – слева направо (см. рис. 4). Сложим суммы во всех нечётных строчках и в чётных столбцах. Полученная сумма будет чётной, так как каждое слагаемое в ней по условию чётно. При этом в данную сумму входят по одному разу числа во всех чёрных клетках и по два раза числа в белых клетках нечётных строчек. Следовательно, сумма чисел в чёрных клетках чётна.

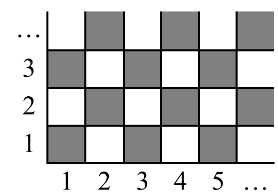


Рис. 4

Четвёртый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Можно ли сократить дробь $\frac{x^8+x+1}{x^5+x+1}$ на многочлен ненулевой степени с целыми коэффициентами?

Ответ: можно.

Решение. Разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

1) Знаменатель: $x^5+x+1=x^5-x^2+x^2+x+1=x^2\left(x^3-1\right)+x^2+x+1=\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^3-x^2+1\right)$.

2) Числитель: $x^8+x+1=x^8-x^2+x^2+x+1=x^2\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)+x^2+x+1=\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^6-x^5+x^3-x^2+1\right)$.

Таким образом, $\frac{x^8+x+1}{x^5+x+1}=\frac{\left(x^2+x+1\right)\left(x^6-x^5+x^3-x^2+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)}=\frac{x^6-x^5+x^3-x^2+1}{x^3-x^2+1}$.

Отметим, что многочлен вида $x^{3n+2}+x^{3k+1}+1$ при любых натуральных n и k можно представить в виде (x^2 + x + 1)P(x), где P(x) — многочлен с целыми коэффициентами.

При желании можно по-разному объяснить, что дальнейшее сокращение полученной дроби невозможно.

<u>Первый способ</u>. Наибольший общий делитель числителя и знаменателя данной дроби должен быть делителем их разности. У исходной дроби эта разность равна $x^8 - x^5 = x^5(x - 1)(x^2 + x + 1)$*, но знаменатель не делится ни на* x*, ни на* $x - 1$ *(это можно, например, проверить делением «в столбик»).*

<u>Второй способ</u>. Разделим с остатком числитель данной дроби на знаменатель: $x^8 + x + 1 = x^3(x^5 + x + 1) - x^4 - x^3 + x + 1$*. Остаток раскладывается на множители следующим образом:* $-x^4 - x^3 + x + 1 = (-x + 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$*. Ни на* $-x + 1$*, ни на* $x + 1$ *многочлен* $x^8 + x + 1$ *не делится (хотя бы потому, что* -1 *и 1 не являются его корнями).*

4.2. В треугольнике *ABC* проведена медиана *BM*. Найдите угол *ABM*, если $\angle BAC = 30°$, $\angle BCA = 105°$.

Ответ: 15°.

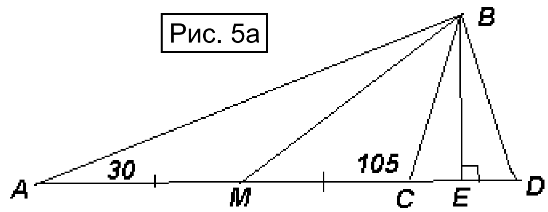


Рис. 5а

Решение. <u>Первый способ</u>. На луче *AC* отметим точку *D* так, что $BD = BC$ (см. рис. 5а). Тогда $\angle BDC = \angle BCD = 75°$. Из треугольника *ABD* получим, что $\angle ABD = 75° = \angle ADB$, поэтому $AD = AB$.

Опустим перпендикуляр *BE* на прямую *AD*. Из прямоугольного треугольника *ABE* получим, что $BE = \frac{1}{2}AB$. Кроме того, *BE* – высота равнобедренного треугольника *BCD*, проведённая к основанию, значит, *BE* – медиана этого треугольника, то есть, *E* – середина *CD*. Следовательно, $ME = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB = BE$. Значит, $\angle BME = 45°$, поэтому $\angle ABM = 15°$.

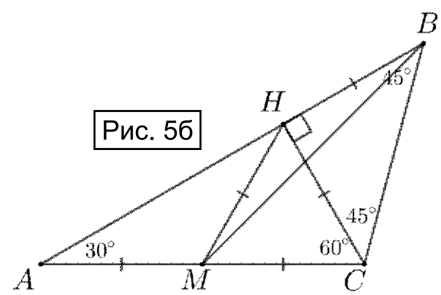


Рис. 5б

<u>Второй способ</u>. Проведем в данном треугольнике высоту *CH*, тогда $\angle ACH = 60°$, $\angle BCH = 45°$ (см. рис. 5б). В треугольнике *BCH* два угла равны, значит, $BH = CH$. Так как *HM* – медиана прямоугольного треугольника *AHC*, проведённая к гипотенузе, то $HM = AM = CM$. Кроме того, $\angle MCH = 60°$, значит, треугольник *MCH* – равносторонний. Следовательно, $HM = HC = HB$. Тогда из равнобедренного треугольнике *BHM* получим, что $\angle ABM = \angle HMB = (180° - \angle BHM) : 2 = 15°$.

4.3. На некоторой планете между тремя городами *A*, *B* и *C* проложены дороги так, что каждый город связан с каждым больше, чем одной дорогой. Назовем путём из одного города в другой любой способ проехать напрямую или через третий город. Известно, что города *A* и *B* связывают 29 путей, а города *B* и *C* – 23 пути. Сколько путей связывают города *A* и *C*? (*Движение по всем дорогам двустороннее*.)

Ответ: 43 пути.

Решение. Пусть города *A* и *B* напрямую соединены x дорогами, *B* и *C* – y дорогами, а *A* и *C* – z дорогами. Тогда города *A* и *B* связывают $x + yz = 29$ путей, а города *B* и *C* – $y + zx = 23$ пути. Сложив эти уравнения, получим: $x + yz + y + zx = 29 + 23 \Leftrightarrow (x + y)(z + 1) = 52$.

Так как по условию числа x, y, z не меньше чем 2, и при этом из составленных уравнений видно, что $x \neq y$, то последнее равенство возможно, только если $x + y = 13$ и $z + 1 = 4$. Следовательно, $z = 3$ и $x + 3y = 29$, откуда $y = (29 - 13) : 2 = 8$ и $x = 13 - 8 = 5$. Таким образом, города *A* и *C* связывают $z + xy = 3 + 5 \cdot 8 = 43$ пути.