Математическая регата
14.10.2023
9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Какое наименьшее натуральное число надо прибавить к сумме $3^{13} + 9^{13}$, чтобы получить квадрат натурального числа?

Ответ: $3^{13}+1$.

Решение. Так как $9^{13}=\left(3^{13}\right)^2$, то следующий квадрат равен $\left(3^{13}+1\right)^2=9^{13}+2\cdot 3^{13}+1$. Следовательно, наименьшее натуральное число, которое надо прибавить к $9^{13}+3^{13}$, чтобы получить квадрат натурального числа, равно $3^{13}+1$.

1.2. В прямоугольном треугольнике *ABC* с прямым углом *C* проведена медиана *AM*. Может ли выполняться равенство *AB* = 2*AM*?

Ответ: не может.

Решение. Первый способ. Предположим, что *AB* = 2*AM*, тогда медиана, проведённая к *AB*, равна *AM*. Из равенства двух медиан треугольника следует, что *AB* = *BC*, что невозможно.

Второй способ. Удвоим медиану *AM*, то есть построим такую точку *A'* на луче *AM*, что *AM* = *MA'*, тогда *BA'* || *AC* (см. рис. 1). Следовательно, угол *ABA'* – тупой, значит, *AA'* – наибольшая сторона треугольника *ABA'*. Тогда 2*AM* = *AA'* > *AB*.

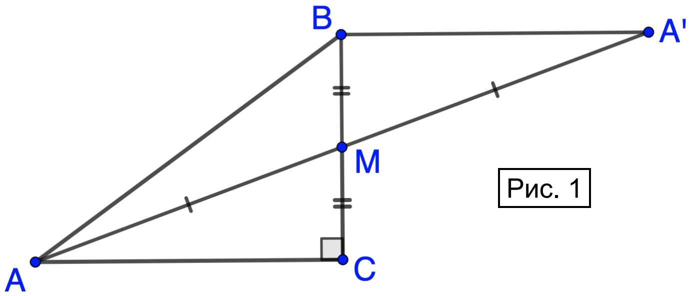


Рис. 1

Также можно провести через точку M среднюю линию MK треугольника ABC, параллельную AC, и провести аналогичное рассуждение для треугольника AMK.

1.3. Решите в целых числах систему уравнений: $\begin{cases} ab+c=2023, \\ a+bc=2024. \end{cases}$

Ответ: (674; 2; 675), (2024; 0; 2023).

Решение. Вычтем из второго уравнения первое: *a* + *bc* – *ab* – *c* = 1 ⇔ (*b* – 1)(*c* – *a*) = 1. Из полученного уравнения следует, что *b* – 1 = *c* – *a* = 1 или *b* – 1 = *c* – *a* = –1.

В первом случае *b* = 2, *c* = *a* + 1. Тогда первое уравнение системы можно записать так: 2*a* + *a* + 1 = 2023, откуда *a* = 674, *c* = 675.

Во втором случае *b* = 0. Подставив это значение в исходную систему, получим: *a* = 2024, *c* = 2023.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Для положительных чисел *a* и *b* выполняется неравенство *a* – *b* > 4. Докажите, что тогда выполняется неравенство $\frac{a}{b}>5-b$.

Решение. Так как *a* > *b* + 4 и *b* > 0, то $\frac{a}{b}>\frac{b+4}{b}$. Следовательно, достаточно доказать, что $\frac{b+4}{b}\ge 5-b$. В свою очередь, $\frac{b+4}{b}\ge 5-b \Leftrightarrow b+4\ge 5b-b^2 \Leftrightarrow b^2-4b+4\ge 0 \Leftrightarrow (b-2)^2\ge 0$.

Эту же идею можно оформить иначе. Рассмотрим разность левой и правой частей доказываемого неравенства: $\frac{a}{b}-(5-b)=\frac{a-b-4b+b^2}{b}>\frac{4-4b+b^2}{b} = \frac{(2-b)^2}{b}\ge 0$, так как *b* > 0. Следовательно, $\frac{a}{b}>5-b$.

2.2. Через точку A окружности с центром O проведена касательная, а через точку B, также лежащую на окружности, проведен луч OB, пересекающий эту касательную в точке E. Из точки A опущен перпендикуляр AC на OB, а из точки B – перпендикуляр BD на AE. Докажите, что $BC = BD$.

Решение. Пусть $\angle AOB = 2\alpha$, тогда $\angle DAB = \alpha$ (угол между касательной и хордой, см. рис. 2).

В равнобедренном треугольнике AOB: $\angle ABO = \angle BAO = 90° - \alpha$, поэтому $\angle CAB = \alpha = \angle DAB$. Таким образом, прямоугольные треугольники ABC и ABD равны (по гипотенузе и острому углу), откуда $BC = BD$.

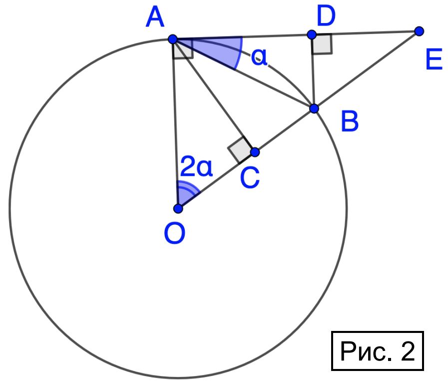


Рис. 2

2.3. На острове проживает 2024 жителя, каждый из которых либо рыцарь (который всегда говорит правду), либо лжец (который всегда лжёт). Однажды все жители острова разбились на пары, и каждый сказал: «Он – рыцарь!» либо «Он – лжец!» про своего соседа по паре. Оказалось, что тех и других фраз произнесено поровну. Какое наименьшее количество лжецов может жить на острове?

Ответ: 506 лжецов.

Решение. <u>Оценка</u>. Заметим, что фразу «Он – рыцарь!» могли сказать друг про друга только люди одного типа, а фразу «Он – лжец!» – люди разных типов. Значит, в каждой паре оба жителя произнесли одинаковые фразы. Тогда «Он – лжец!» сказали люди из 506 пар. В каждой такой паре есть лжец, поэтому их не меньше 506.

<u>Пример</u>. Пусть на острове живет 1518 рыцарей и 506 лжецов. Если 1012 рыцарей разобьются на пары, то в каждой из них будут произнесены только фразы «Он – рыцарь!» Среди остальных 1012 жителей острова поровну рыцарей и лжецов, они могут разбиться на пары рыцарь – лжец, тогда в каждой паре будут произнесены только фразы «Он – лжец!» Таким образом, и тех, и других фраз будет поровну.

Отметим, что пример сразу следует из оценки.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Сколько отрицательных корней имеет уравнение: $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$?

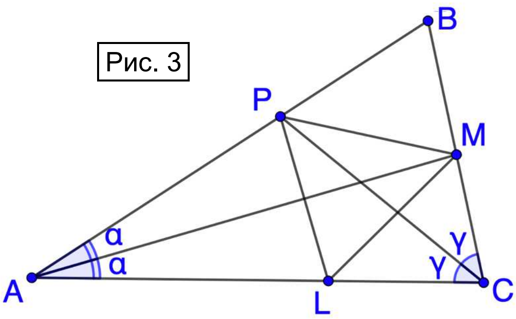
Ответ: отрицательных корней нет.

Решение. Перепишем уравнение в виде $x^4 - 4x^2 + 4 = 5x^3 + 7x$, что равносильно уравнению $\left(x^2 - 2\right)^2 = 5x^3 + 7x$. Если теперь $x < 0$, то $\left(x^2 - 2\right)^2 \geq 0 > 5x^3 + 7x$, то есть при любых отрицательных значениях x равенство не выполняется.

3.2. В треугольнике ABC отрезки AM и CP являются биссектрисами углов A и C соответственно, причём $AP + CM = AC$. Найдите величину угла B.

Ответ: 60°.

Решение. Отразим точку P относительно биссектрисы AM (см. рис. 3). Получим точку L на стороне AC, причём треугольник APL – равнобедренный. Из условия $AP + CM = AC$ следует, что $CL = CM$, то есть CLM – также равнобедренный треугольник. Тогда MA – серединный перпендикуляр к отрезку PL, поэтому $MP = ML$. Аналогично, PC – серединный перпендикуляр к отрезку ML, поэтому $PM = PL$. Таким образом, треугольник PML – равносторонний, поэтому $\angle PLM = 60°$.

Рис. 3


Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle BCA = 2\gamma$ тогда $\angle ALP = 90° - \alpha$, $\angle CLM = 90° - \gamma$. Значит, $90° - \alpha + 90° - \gamma = 120°$, откуда $\alpha + \gamma = 60°$. Следовательно, $2\alpha + 2\gamma = 120°$, поэтому $\angle ABC = 60°$.

3.3. На доске записаны в ряд квадраты натуральных чисел в возрастающем порядке так, что разность любых двух соседних чисел – простое число или квадрат простого числа. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?

Ответ: 7 чисел.

Решение. Рассмотрим два соседних числа a^2 и b^2. Их разность равна $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$. Простое число p можно представить в виде произведения двух натуральных чисел единственным способом: $p = 1\cdot p$, а его квадрат – двумя способами: $p^2 = 1\cdot p^2 = p\cdot p$.

Так как числа $b - a$ и $b + a$ различные, то в любом случае $b - a = 1$, тогда $b^2 - a^2 = 2a + 1$. Следовательно, на доске выписаны квадраты последовательных чисел, а разности соседних выписанных чисел – это последовательные нечётные числа, не меньшие 3.

Если чисел хотя бы четыре, то из первых трёх таких разностей одна делится на 3, поэтому может быть равна только 3 или 9. При этом разности 15 быть не может, поэтому максимальная разность, которую можно получить, равна 13, а всего чисел не больше семи. С другой стороны, можно выписать квадраты первых семи натуральных чисел: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, получив при этом разности 3, 5, 7, 9, 11, 13.

Четвёртый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Известно, что для положительных x, y и z выполняются равенства: $xy = z + a$, $yz = x + a$, $zx = y + a$. Какие значения может принимать a?

Ответ: $a \geq -0{,}25$.

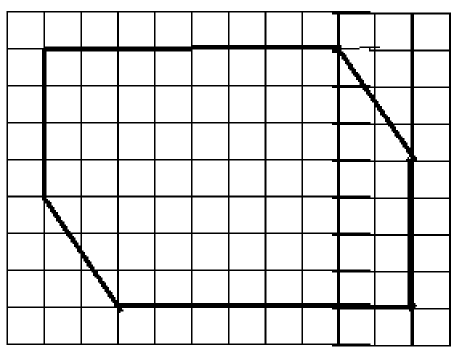
Решение. Вычтем из первого уравнения второе, а из второго – третье. Получим:

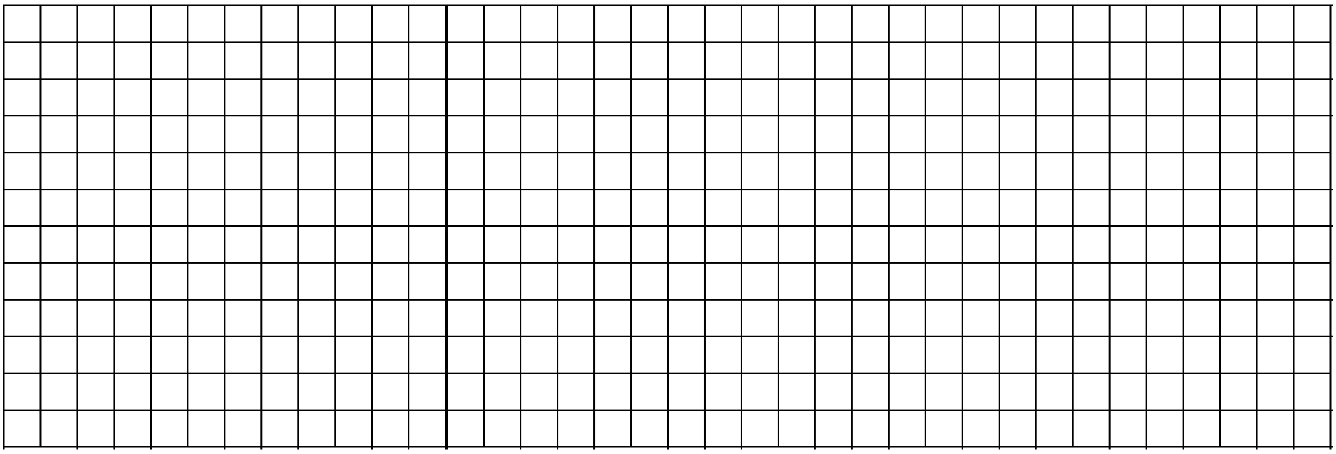
$$\begin{cases} y(x-z) = z - x. \\ z(y-x) = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-z)(y+1) = 0. \\ (y-x)(z+1) = 0 \end{cases}$$

Так как значения всех переменных положительны, то $x = y = z$. Тогда каждое из исходных уравнений примет вид: $x^2 - x - a = 0$. Это уравнение имеет хотя бы один корень, если $D = 1 + 4a \geq 0$, то есть при $a \geq -0{,}25$. Так как сумма корней этого уравнения равна 1, то хотя бы один его корень положителен.

Получив равенство $x = y = z$, можно далее рассуждать иначе. Каждое из исходных уравнений можно записать так: $a = x^2 - x$. Искомые значения a – это множество значений функции $f(x) = x^2 - x$ при $x > 0$. Графиком этой функции является парабола, вершина которой – в точке (0,5; – 0,25), а ветви направлены вверх. Следовательно, $a \geq -0{,}25$.

4.2. От прямоугольника со сторонами 7 и 10 клеток отрезали два прямоугольных треугольника с катетами 2 и 3 клетки (см. рисунок). Разрежьте получившийся шестиугольник на две части и сложите из них квадрат.





Решение Способ разрезания показан на рис. 4а, а квадрат, сложенный из двух полученных частей, показан на рис. 4б.

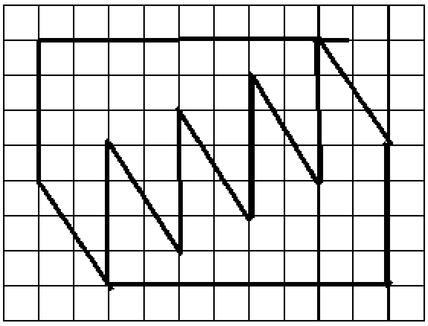


Рис. 4а

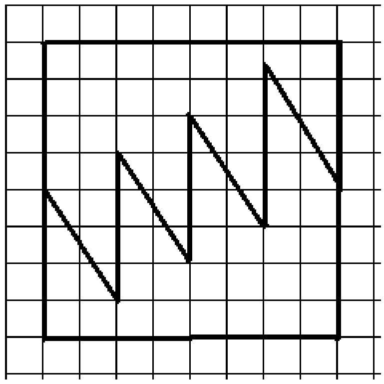


Рис. 4б

4.3. На конференцию приехали 200 учёных. Двое из них знают по 21 участнику конференции, ещё двое – по 22, ещё двое – по 23 и так далее, а последние двое – по 120. Может ли оказаться, что их можно посадить в два актовых зала так, чтобы в каждом зале были только незнакомые друг с другом?

Ответ: не может.

Решение. Построим граф, в котором вершины соответствуют учёным, а рёбра соединяют знакомых. Предположим, что полученный граф двудольный. В одной из его долей не менее 120 вершин, поскольку в графе есть вершины степени 120. Значит, в другой доле их не более 80. При этом в графе должно быть ровно 120 вершин, степени которых не превосходят 80. Такое возможно, только если в одной доле ровно 120 вершин – по две вершины каждой степени от 21 до 80, а в другой доле 80 вершин – по две вершины каждой степени от 81 до 120. Тогда сумма степеней вершин первой доли равна $2\cdot(21 + 22 + \ldots + 80) = 6060$, а сумма степеней вершин второй доли – $2\cdot(81 + 82 + \ldots + 120) = 8040$. Однако эти суммы должны быть равны. Полученное противоречие доказывает, что граф не может быть двудольным, а это равносильно тому, что учёных нельзя рассадить в два зала так, чтобы в каждом зале были только незнакомые.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. Разложите на множители, каждый из которых имеет степень не выше двух: $x^4 + y^4 + (x + y)^4$.

Ответ: $2(x^2 + xy + y^2)^2$.

Решение. Первый способ. Пусть $z = x + y$, тогда $x^2 + y^2 = z^2 - 2xy$, $x^4 + y^4 = (z^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 = z^4 - 4xyz^2 + 2x^2y^2$. Следовательно, $x^4 + y^4 + (x + y)^4 = x^4 + y^4 + z^4 = 2z^4 - 4xyz^2 + 2x^2y^2 = 2(z^2 - xy)^2 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$.

Второй способ. Раскроем скобки: $x^4 + y^4 + (x + y)^4 = x^4 + y^4 + (x^2 + 2xy + y^2)^2 = 2x^4 + 2y^4 + 4x^2y^2 + 4x^3y + 4xy^3 + 2x^2y^2 = 2(x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3) = 2(x^2 + xy + y^2)^2$.

После раскрытия скобок можно продолжить и по-другому, если не увидеть формулы квадрата трёхчлена: $2x^4 + 2y^4 + 4x^2y^2 + 4x^3y + 4xy^3 + 2x^2y^2 = (2x^4 + 2y^4 + 2x^2y^2) +$

$(4x^2y^2 + 4x^3y + 4xy^3) = 2(x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2) + 4xy(x^2 + xy + y^2) = 2((x^2 + y^2)^2 - (xy)^2) + 4xy(x^2 + xy + y^2) = 2(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) + 4xy(x^2 + xy + y^2) = 2(x^2 + xy + y^2)^2$.

5.2. Существует ли треугольник, в котором окружность, построенная на стороне как на диаметре, касается окружности, проходящей через середины его сторон?

Ответ: существует.

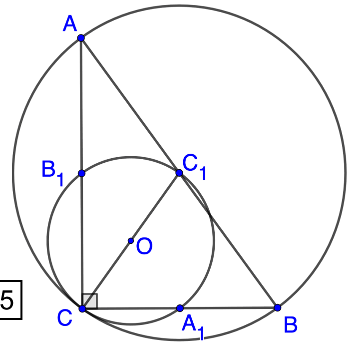


Рис. 5

Решение Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC и его описанную окружность. Она построена на гипотенузе AB как на диаметре, поэтому её центр C_1 – середина AB (см. рис. 5). Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Середины A_1, B_1 и C_1 сторон треугольника и вершина C его прямого угла образуют прямоугольник (A_1C_1 и B_1C_1 – средние линии треугольника ABC), поэтому окружность, проходящая через середины сторон ABC, содержит вершину C, её центр O – середина CC_1.

Таким образом, общая точка C двух указанных окружностей лежит на линии их центров, поэтому касательная, проведённая через эту точку к одной из окружностей, является касательной и к другой. Это и означает, что окружности касаются.

Второй способ. Воспользуемся тем, что при гомотетии с центром в ортоцентре треугольника и коэффициентом 0,5 окружность, описанная около треугольника, переходит в его окружность девяти точек, которая и проходит через середины сторон треугольника. В данном случае, C – центр гомотетии, который является неподвижной точкой. Значит, описанная окружность и её образ касаются в этой точке.

Догадаться рассматривать прямоугольный треугольник можно, исходя из следующих соображений. Окружность, построенная на одной из сторон как на диаметре, – это ГМТ, из которых эта сторона видна под прямым углом, поэтому такая окружность пересекает прямые, содержащие две другие стороны, в основаниях высот. Окружность, проходящая через середины сторон треугольника, – это окружность девяти точек, которая тоже проходит через основания высот. Таким образом, если основания высот к сторонам, которые не являются диаметром, различны, то окружности уже имеют две различных общих точки, а значит касаться не могут. Значит, условие задачи может выполняться только в треугольнике, в котором основания двух высот совпадают, то есть в прямоугольном.

5.3. Существует ли десятизначное число, кратное 7, все цифры в десятичной записи которого различны?

Ответ: существует.

Решение. Проще всего составить такое число из нескольких частей, каждая из которых делится на 7. Возьмём первые четыре числа, кратные 7: 7, 14, 28, 35 – в них нет повторяющихся цифр. Остались цифры 0, 6 и 9, из которых можно составить число 609, также кратное 7. Поэтому условию удовлетворяет, например, число 7142835609.

Понятно, что существует и много других примеров.