Математическая регата
1.03.2025
10 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Сравните: $2025^{2025} + 2024^{2024}$ и $2025^{2024} + 2024^{2025}$.

Ответ: первое число больше.

Решение. Рассмотрим разность данных чисел и преобразуем её: $(2025^{2025} + 2024^{2024}) - (2025^{2024} + 2024^{2025}) = 2025^{2024}(2025 - 1) - 2024^{2024}(2024 - 1) = 2025^{2024}\cdot 2024 - 2024^{2024}\cdot 2023 > 0$, так как $2025^{2024} > 2024^{2024}$ и $2024 > 2023$.

Следовательно, $2025^{2025} + 2024^{2024} > 2025^{2024} + 2024^{2025}$.

1.2. Существует ли четырёхугольник, у которого сумма диагоналей меньше любой его стороны?

Ответ: существует.

Решение. Выберем точки A и C на расстоянии 1 друг от друга (*если рисовать на клетчатой бумаге, то удобно за единицу взять две клетки*). На серединном перпендикуляре к отрезку AC в одной полуплоскости относительно прямой AC отложим точки D и B на расстоянии 2 и 3 соответственно (см. рис. 1). Получим невыпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором сумма диагоналей $AC + BD = 2$, а каждая сторона больше, чем 2, так как стороны являются гипотенузами прямоугольных треугольников, в которых один из катетов не меньше, чем 2.

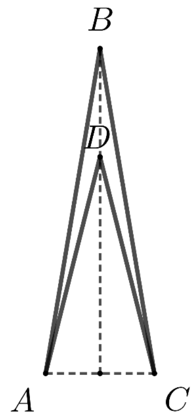


Рис. 1

Существует и много других примеров, но все такие четырехугольники будут невыпуклыми. В выпуклом четырехугольнике любая сторона меньше суммы диагоналей, что следует из неравенства треугольника.

1.3. Может ли сумма квадратов трёх последовательных натуральных чисел оказаться равной 20000025?

Ответ: нет.

Решение. Пусть это возможно, тогда $(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = 20000025 \Leftrightarrow 3n^2 + 2 = 20000025 \Leftrightarrow 3n^2 = 20000023$, что невозможно, так как 20000023 не делится на 3.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Решите уравнение: $\sqrt{\sqrt{2x^2-3+x}+2x^2-3}=x$.

Ответ: $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Решение. Пусть $\sqrt{2x^2-3+x}=y \geq 0$, тогда из условия следует, что $\sqrt{y+2x^2-3}=x \geq 0$.

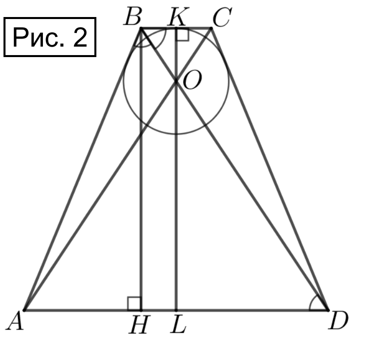
Таким образом, $\begin{cases} x^2=2x^2+y-3, \\ y^2=2x^2+x-3, \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{cases}$ Следовательно, $x^2-y^2=y-x$, откуда $x=y$ или $x+y=-1$. Второй случай невозможен, так как $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Значит, $x^2=2x^2+x-3 \Leftrightarrow x^2+x-3=0$. Учитывая ограничения, получим: $x = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

2.2. Окружность с центром в точке пересечения диагоналей AC и BD равнобедренной трапеции $ABCD$ касается меньшего основания BC и боковой стороны AB. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что ее высота равна 16, а радиус окружности равен 3.

Ответ: $170\dfrac{2}{3}$.

Решение. Пусть AC и BD пересекаются в точке O, K и L – середины BC и AD соответственно (см. рис. 2). Так как трапеция равнобедренная, то прямая KL – её ось симметрии, значит, KL проходит через точку O, а OK – радиус окружности. Из подобия треугольников BOC и DOA получим, что $\frac{BC}{AD} = \frac{OK}{OL} = \frac{3}{13}$. Пусть $BC = 3x$, тогда $AD = 13x$. Проведя высоту BH, найдём, что $AH = \frac{AD - BC}{2} = 5x$.

Рис. 2



Из того, что окружность касается BC и AB, следует, что BO – биссектриса угла ABC, поэтому треугольник ABD – равнобедренный: $AB = AD = 13x$. Тогда из прямоугольного треугольника ABH: $AB^2 = AH^2 + BH^2$, то есть $169x^2 = 25x^2 + 16^2$, откуда $x = \frac{4}{3}$. Таким образом, $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = 8x \cdot 16 = \frac{512}{3}$.

Из симметрии относительно прямой KL следует также, что окружность касается стороны CD.

2.3. Имеется куб размером 10×10×10, состоящий из маленьких единичных кубиков. В центре O одного из угловых кубиков сидит кузнечик. Он может прыгать в центр любого кубика, имеющего общую грань с тем, в котором кузнечик находится в данный момент, причём так, чтобы расстояние до точки O увеличивалось. Сколькими способами кузнечик сможет допрыгать до углового кубика, противоположного исходному?

Ответ: $\frac{27!}{(9!)^3}$.

Решение. Не умаляя общности, будем считать, что кузнечик находится в нижнем левом дальнем кубике. Тогда любой его путь состоит из 9 прыжков вверх, 9 прыжков вперед и 9 прыжков вправо в любой последовательности, то есть длина маршрута кузнечика равна 27. Места для движения вверх можно выбрать C_{27}^9 способами. Из 18 оставшихся мест выбрать 9 для прыжков вперед можно C_{18}^9 способами. Оставшиеся места однозначно определяются для прыжков вправо. Таким образом, искомое количество способов равно $C_{27}^9 \cdot C_{18}^9 = \frac{27!}{9! \cdot 18!} \cdot \frac{18!}{9! \cdot 9!} = \frac{27!}{(9!)^3}$.

Этот же результат можно получить, используя формулу перестановок с повторениями: $P_{9,9,9} = \frac{(9+9+9)!}{9! \cdot 9! \cdot 9!} = \frac{27!}{(9!)^3}$.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

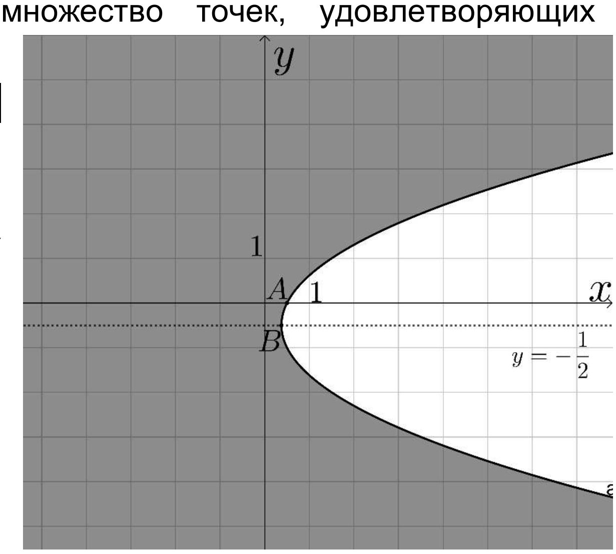
3.1. На координатной плоскости постройте множество точек, удовлетворяющих неравенству $y^2 + y \ge |x| + x - 1$.

Ответ: см. рис. 3.

Решение. 1) Если $x \le 0$, то $y^2 + y \ge -1$, что выполняется при всех значениях y.

2) Если x > 0, то $y^2 + y \ge 2x - 1 \Leftrightarrow x \le 0{,}5(y^2 + y + 1)$. Линия, которая задаётся уравнением $x = 0{,}5(y^2 + y + 1)$, симметрична параболе $y = 0{,}5(x^2 + x + 1)$ относительно прямой $y = x$. Поэтому она является параболой, вершина которой точка $B\left(\frac{3}{8}; -\frac{1}{2}\right)$, ось

Рис. 3

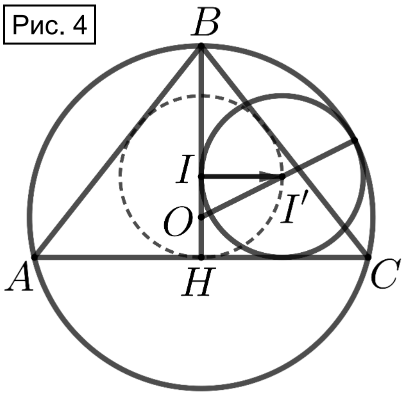


симметрии: $y = -\frac{1}{2}$, а $A(0{,}5;\ 0)$ – точка пересечения с осью абсцисс.

Таким образом, искомое множество точек – это все точки плоскости, кроме тех, которые лежат внутри области, ограниченной параболой $x = 0{,}5(y^2 + y + 1)$.

3.2. Окружность, вписанную в равнобедренный треугольник, перенесли параллельно его основанию на расстояние, равное её радиусу. Докажите, что в таком положении она касается окружности, описанной около данного треугольника.

Рис. 4



Решение. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точки O и I – центры описанной и вписанной окружностей соответственно, I' – образ точки I при переносе, указанном в условии (см. рис. 4). Треугольник ABC – равнобедренный, поэтому O и I лежат на серединном перпендикуляре BH к отрезку AC. По условию $II' \parallel AC$, то есть $II' \perp BH$.

Пусть R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно. В прямоугольном треугольнике OII': $II' = r$ (по условию), $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (по формуле Эйлера), тогда $OI'^2 = OI^2 + II'^2 = R^2 - 2Rr + r^2 = (R - r)^2$. Так как $R > r$, то $OI' = R - r$. Это означает, что окружности касаются внутренним образом, что и требовалось доказать.

Отметим, что если треугольник ABC – равносторонний, то точки O и I совпадают, тогда треугольника OII' не существует. Но в этом случае $R = 2r$ и $OI' = r = R - r$, то есть утверждение задачи выполняется.

3.3. На клетчатой плоскости отмечены 100 узлов, не лежащие на одной прямой. Докажите, что из них можно выбрать два узла X и Y, не лежащие на одной линии сетки, так, чтобы прямоугольник с диагональю XY и сторонами, параллельными линиям сетки, содержал не менее, чем 20 отмеченных узлов.

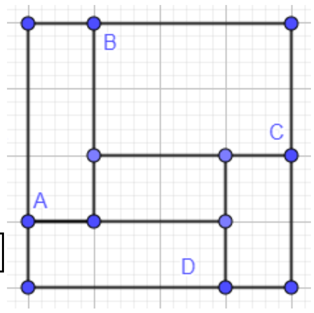


Рис. 5

Решение. Выберем узлы A, B, C, D так, чтобы не было узлов левее A, выше B, правее C и ниже D. Тогда прямоугольники со сторонами, идущими по линиям сетки, диагоналями которых являются отрезки AB, BC, CD, DA и AC, в сумме содержат все 100 точек (см. рис. 5). Их пять, поэтому среди них есть тот, который содержит хотя бы 20 точек.

Если какие-то из точек A, B, C, D совпадают или лежат на одной линии сетки, то все отмеченные точки можно покрыть меньшим числом прямоугольников. Но в примере на рис. 5 уменьшить это число нельзя.

Четвёртый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Пусть a, b и c – такие действительные числа, отличные от нуля, что $(ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3$. Докажите, что a, b и c в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию.

Решение. Заметим, что a, b и c в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $x = at, y = bt, z = ct$, где $t \neq 0$, образуют геометрическую прогрессию в том же порядке.

Пусть t таково, что $xyz = 1$, тогда $(ab + bc + ca)^3 = \left(\frac{xy + yz + zx}{t^2}\right)^3 = \frac{(xy + yz + zx)^3}{t^6}$, а $abc(a + b + c)^3 = \frac{xyz}{t^3} \cdot \left(\frac{x + y + z}{t}\right)^3 = \frac{(x + y + z)^3}{t^6}$. Следовательно, $(xy + yz + zx)^3 = (x + y + z)^3 \Leftrightarrow xy + yz + zx = x + y + z$. Если $xyz = 1$, то последнее равенство равносильно равенству $(1 - x)(1 - y)(1 - z) = 0$, в чём легко убедиться, раскрыв скобки. Без потери общности можно считать, что $x = 1$, тогда и $yz = 1$, значит, $x^2 = yz$, то есть y, x, z образуют геометрическую прогрессию. Следовательно, b, a, c также образуют геометрическую прогрессию.

Это решение основано на однородности равенства в условии задачи.

4.2. В тетраэдре *ABCD* грани *ABC* и *ADC* перпендикулярны, *AB* = *BC* = *CD*, *BD* = *AC*. Найдите угол между плоскостями *ABD* и *ACD*.

Ответ: 60°.

Решение. Проведем высоты *BB*' и *BH* в треугольниках *ABC* и *ABD* соответственно (см. рис. 6). Так как *BB*' лежит в одной из перпендикулярных плоскостей и перпендикулярна их прямой пересечения, то она перпендикулярна и второй плоскости, поэтому *B*' – проекция точки *B* на плоскость *ADC*. Значит, *B'H* – проекция *BH* на плоскость *ADC* и $B'H \perp AD$ (по теореме о трех перпендикулярах). Таким образом, *BHB*' – искомый угол.

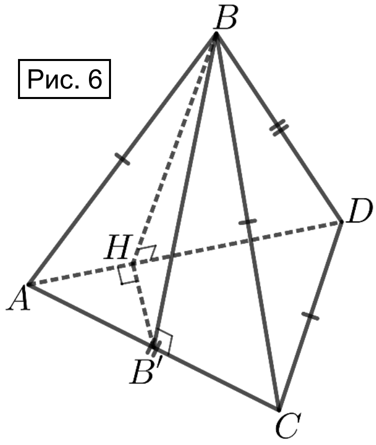


Рис. 6

Треугольник *ABC* – равнобедренный, значит, *B*' – середина *AC*. Тогда перпендикуляр *B'H* к *AD*, равен половине высоты треугольника *ACD*, проведённой к *AD*. С другой стороны, треугольники *ACD* и *DBA* равны (по трём сторонам), значит равны их соответствующие высоты, в частности, равны высоты, проведённые к *AD*, откуда *B'H = 0,5BH*. Тогда в прямоугольном треугольнике *BB'H* катет *B'H* в два раза меньше гипотенузы *BH*, значит, угол между ними равен 60°.

4.3. Хромая ладья ходит на соседнюю по стороне клетку. Пусть количество способов обойти всю шахматную доску хромой ладьёй (побывав на каждой клетке ровно по одному разу), если начало пути в клетке *a*1, равно *A*. Количество способов аналогично обойти всю шахматную доску хромой ладьёй, если начало пути в клетке *b*2, равно *B*. Докажите, что *A* > *B*.

Решение. Каждому пути Г, (обходящему всю доску) и начинающемуся с клетки *b*2, поставим в соответствие путь, начинающийся с клетки *a*1. Для этого по той части Г, которая соединяет *b*2 с *a*1, пройдём в обратном направлении, а затем (заменив ход из *a*1 ходом из *b*2) продолжим его по оставшейся части (если она есть). Это возможно, так как каждая клетка, соседняя с *a*1, является соседней и с *b*2. При этом разным путям из *b*2 соответствуют разные пути из *a*1.

Осталось предъявить маршрут, начинающийся с клетки *a*1, который нельзя получить таким способом. Таковым является любой обход, когда ладья попадает в *b*2 после того, как прошла по обоим соседям *a*1. Например, годится обход доски по «скручивающейся» спирали.

Пятый **тур** (***15 минут; каждая задача – 7 баллов***)

5.1. Пусть *P*(*x*) – квадратный трехчлен. Верно ли, что всегда можно найти такой многочлен четвертой степени *Q*(*x*), что уравнение *P*(*Q*(*x*)) = 0 не имеет действительных корней?

Ответ: верно.

Решение. Если квадратный трехчлен *P*(*x*) не имеет корней, тогда в качестве *Q*(*x*) можно взять любой многочлен. Если же *P*(*x*) имеет корни x_1 и x_2 (возможно, совпадающие), то достаточно указать *Q*(*x*), у которого эти корни не входят во множество значений. Например, $Q(x) = x^4 + |x_1| + |x_2| + 1$. Тогда при любых значениях *x* $Q(x) > \max(x_1; x_2)$.

5.2. *M* – точка пересечения медиан прямоугольного треугольника *ABC* с прямым углом *C*. Может ли угол *AMB* быть не больше, чем $135°$?

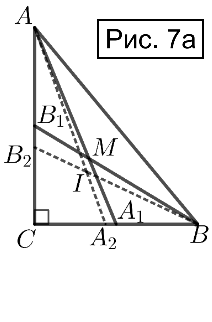


Рис. 7а

Ответ: не может.

Решение. <u>Первый способ.</u> Пусть AA_1 и BB_1 – медианы треугольника *ABC*, а AA_2 и BB_2 – его биссектрисы, которые пересекаются в точке *I* (см. рис. 7а). Так как биссектриса треугольника лежит между медианой и высотой, которые проведены из той же вершины (гипотенуза больше катета, поэтому совпадать они не могут), то точка M лежит внутри треугольника AIB. Следовательно, $\angle AMB > \angle AIB = 90° + 0{,}5\angle ACB = 135°$.

Можно иначе обосновать, что M лежит внутри треугольника AIB. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AB_2}{B_2C} = \frac{AB}{BC} > 1$, *значит точка* B_1 *лежит на отрезке* AB_2, *а отрезок* BB_1 *внутри треугольника* ABB_2. *Аналогично,* AA_1 *лежит внутри треугольника* BAA_2.

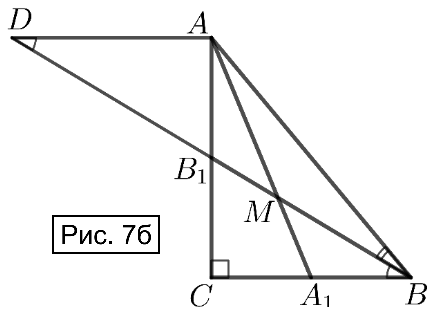


Рис. 7б

<u>Второй способ</u>. Удвоив медиану BB_1, получим такую точку D, что отрезок AD равен и параллелен катету BC (см. рис. 7б). Катет меньше гипотенузы, значит, в треугольнике ABD $AD < AB$, откуда $\angle DBA < \angle BDA = \angle B_1BC$. При этом $\angle B_1BA + \angle B_1BC = \angle ABC$, значит меньший из углов B_1BA и B_1BC меньше половины угла ABC. Аналогично, удвоив другую медиану, получим, что $\angle A_1AB < 0{,}5\angle BAC$. Тогда $\angle AMB = 180° - (\angle A_1AB + \angle B_1BA) > 180° - 0{,}5(\angle BAC + \angle ABC) = 180° - 45° = 135°$.

5.3. Найдите остаток от деления $3^{105} + 5^{100}$ на 28.

Ответ: 8.

Решение. $3^{105} + 5^{100} = 27^{35} + 25^{50} \equiv (-1)^{35} + (-3)^{50} \pmod{28} = -1 + 9\cdot 3^{48} = -1 + 9\cdot 27^{16} \equiv -1 + 9\cdot(-1)^{16} \pmod{28} = -1 + 9 = 8$.