Математическая регата
23.11.2024
11 класс
Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Решите неравенство: $\cos x - y \ge \sqrt{y-1-x^2}$.

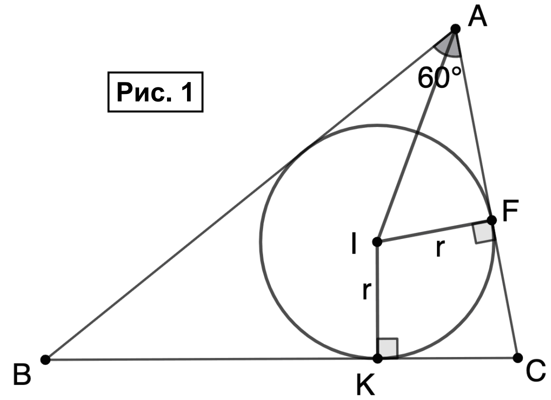
Ответ: (0; 1).

Решение. Выражение в правой части неравенства имеет смысл, если $y \ge x^2+1$, тогда $y \ge 1$. С другой стороны, $\cos x - y \ge 0$. Таким образом, $\cos x \ge y \ge x^2+1 \ge 1$, откуда $\cos x = 1$. Значит, *y* =1, тогда *x* = 0. Подстановка этих значений в исходное неравенство подтверждает, что они являются решением.

1.2. В треугольнике *ABC* $\angle A$ = 60°. Вписанная в треугольник окружность радиуса *r* касается *BC* в точке *K*. Докажите, что *AK* ≤ 3*r*.

Решение. Пусть *I* – центр вписанной окружности, *F* – точка её касания со стороной *AC* (см. рис. 1). В прямоугольном треугольнике *AIF* гипотенуза *AI* = 2*r*, так как катет *IF* лежит напротив угла 30°. Следовательно, *AK* ≤ *AI* + *IK* = 2*r* + *r* = 3*r*. Равенство достигается, если точка *I* лежит на отрезке *AK*. В этом случае треугольник *ABC* равносторонний.

Рис. 1



1.3. Докажите, что для любых натуральных чисел *a* и *b* НОД(*a*; *b*) + НОК(*a*; *b*) ≥ $2\sqrt{ab}$.

Решение. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим, а также известным равенством НОД(*a*; *b*)·НОК(*a*; *b*) = *ab*. Тогда НОД(*a*; *b*) + НОК(*a*; *b*) ≥ $2\sqrt{\text{НОД}(a;b)\cdot\text{НОК}(a;b)}$ = $2\sqrt{ab}$.

Отметим, что равенство достигается тогда и только тогда, когда НОД(a; b) = НОК(a; b) ⇔ *a = b.*

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Докажите, что график функции $y = \frac{x^2-5x+3}{x-1}$ имеет центр симметрии и найдите координаты этого центра.

Ответ: (1; – 3).

Решение. Преобразуем: $\frac{x^2-5x+3}{x-1}$ = $\frac{(x-1)^2-3x+2}{x-1}$ = $\frac{(x-1)^2-3(x-1)-1}{x-1}$ = $(x-1)-\frac{1}{x-1}-3$. График функции $y=(x-1)-\frac{1}{x-1}-3$ получается из графика функции $f(x)=x-\frac{1}{x}$ параллельным переносом на вектор $\overline{(1;-3)}$. Так как $f(x)=x-\frac{1}{x}$ – нечётная функция, то её график симметричен относительно начала координат. Следовательно, точка (1; – 3) – центр симметрии графика заданной функции.

Отметим, что графиком заданной функции является гипербола, центром симметрии которой является точка пересечения её асимптот: x = 1 и y = x – 4.

2.2. Найдите радиус окружности, в которую вписан четырёхугольник, у которого последовательные стороны равны 7, 7, 5 и 3.

Ответ: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Пусть $ABCD$ – данный четырёхугольник (см. рис. 2). Проведём, например, диагональ AC и пусть $\angle ABC = \beta$, тогда $\angle ADC = 180° - \beta$. Далее воспользуемся теоремой косинусов для треугольников ABC и ADC: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB{\cdot}BC{\cdot}\cos\beta = AD^2 + DC^2 - 2AD{\cdot}DC{\cdot}\cos(180° - \beta)$. Подставив длины сторон и учитывая, что $\cos(180° - \beta) = -\cos\beta$, получим уравнение: $98 - 98\cos\beta = 34 + 30\cos\beta$, откуда $\cos\beta = 0{,}5$. Значит, $\beta = 60°$ и треугольник ABC – равносторонний. Так как радиус R окружности, описанной около $ABCD$, совпадает с радиусом окружности, описанной около треугольника ABC, то $R = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

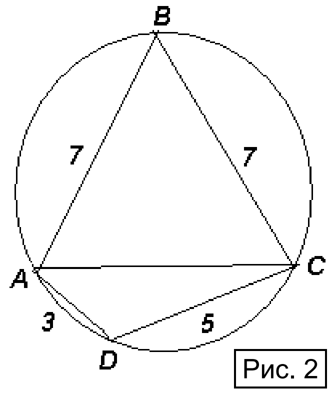


Рис. 2

Отметим, что если использовать теорему косинусов для треугольников ABD и CBD, то $\cos\angle BCD = \dfrac{1}{7}$, $BD = 8$. *Тогда искомый радиус вычисляется по теореме синусов:* $R = \dfrac{BD}{2\sin\angle BCD}$. *Понятно, что в заключительной фазе приведённого решения можно было также воспользоваться теоремой синусов.*

2.3. Клетки шахматной доски покрашены в 8 цветов так, что в каждый цвет покрашено 8 клеток. Верно ли, что всегда можно поставить на 8 разноцветных клеток 8 ладей, не бьющих друг друга?

Ответ: неверно.

Решение. Первый способ. Пронумеруем цвета числами от 0 до 7 и покрасим клетки доски так, как показано на рис. 3а. Пусть на клетки разного цвета в первых семи вертикалях поставлены 7 ладей, не бьющие друг друга. Тогда свободной от ладей останется одна горизонталь. Но ладья, стоящая на пересечении этой горизонтали и восьмой вертикали, окажется в клетке уже использованного цвета.

Рис. 3а

7	7	7	7	7	7	7	0
6	6	6	6	6	6	6	7
5	5	5	5	5	5	5	6
4	4	4	4	4	4	4	5
3	3	3	3	3	3	3	4
2	2	2	2	2	2	2	3
1	1	1	1	1	1	1	2
0	0	0	0	0	0	0	1

Второй способ. Пронумеруем вертикали и горизонтали доски числами от 0 до 7. Таким же образом пронумеруем цвета. Покрасим клетки следующим образом: номер цвета клетки равен остатку от деления на 8 суммы номеров вертикали и горизонтали, на пересечении которых она находится (см. рис. 3б). Расставим на доске восемь не бьющих друг друга ладей. Предположим, что все они оказались в клетках разных цветов. Тогда сумма номеров вертикалей и горизонталей, в которых стоят эти ладьи, равна $2(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 56$. При этом сумма номеров цветов занимаемых ими клеток равна $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$. Но найденные суммы должны давать одинаковые остатки при делении на 8, а это не так.

7	7	0	1	2	3	4	5	6
6	6	7	0	1	2	3	4	5
5	5	6	7	0	1	2	3	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
3	3	4	5	6	7	0	1	2
2	2	3	4	5	6	7	0	1
1	1	2	3	4	5	6	7	0
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

Рис. 3б

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Известно, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что $\dfrac{a^3}{a^2+b^2} + \dfrac{b^3}{b^2+c^2} + \dfrac{c^3}{c^2+a^2} \ge \dfrac{1}{2}$.

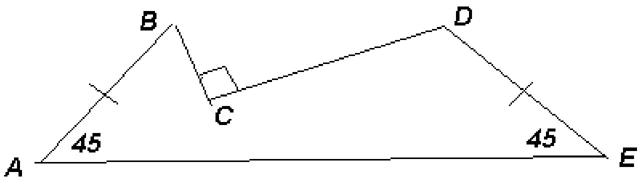
Решение. Воспользуемся тем, что при $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ верное неравенство $x^2 + y^2 \ge 2xy$ равносильно неравенству $\dfrac{1}{x^2+y^2} \le \dfrac{1}{2xy} \Leftrightarrow -\dfrac{z}{x^2+y^2} \ge -\dfrac{z}{2xy}$.

Тогда $\dfrac{a^3}{a^2+b^2} = a - \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \ge a - \dfrac{ab^2}{2ab} = a - \dfrac{1}{2}b$. Аналогично, $\dfrac{b^3}{b^2+c^2} = b - \dfrac{bc^2}{b^2+c^2} \ge b - \dfrac{bc^2}{2bc} = b - \dfrac{1}{2}c$ и

$\frac{c^3}{c^2+a^2} = c - \frac{ca^2}{c^2+a^2} \ge c - \frac{ca^2}{2ca} = c - \frac{1}{2}a$. Следовательно, $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \ge \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}$.

Отметим, что равенство достигается при $a = b = c$.

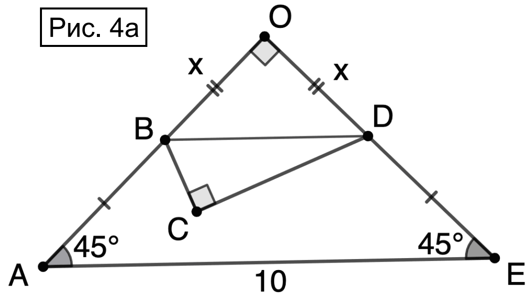
3.2. В пятиугольнике $ABCDE$: $AB = DE$, $\angle A = \angle E = 45°$, $BC \perp CD$, $AE = 10$, $BC + CD = 6$ (см. рисунок). Найдите площадь пятиугольника.



Ответ: 16.

Решение. Продлим стороны AB и ED до пересечения в точке O (см. рис. 4а). Тогда $S_{ABCDE} = S_{AOE} - S_{BCDO}$. Из треугольника AOE: $OA = OE = \frac{AE}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$, значит, $S_{AOE} = 0{,}5OA \cdot OE = 25$.

Рис. 4а



Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Проведём отрезок BD. Тогда $S_{BCDO} = S_{BOD} + S_{BCD}$. Пусть $OB = OD = x$, тогда $S_{BOD} = 0{,}5x^2$. Кроме того, $BD^2 = 2x^2 = BC^2 + CD^2 = (BC + CD)^2 - 2BC \cdot CD = 36 - 4S_{BCD}$, откуда $S_{BCD} = 9 - 0{,}5x^2$. Следовательно, $S_{BCDO} = 0{,}5x^2 + 9 - 0{,}5x^2 = 9$, $S_{ABCDE} = 25 - 9 = 16$.

<u>Второй способ</u>. Найдём площадь $BCDO$ по-другому. Из точки O опустим перпендикуляры OP и OQ на прямые BC и CD соответственно (см. рис. 4б). Тогда $POQC$ – прямоугольник. Кроме того, углы POB и QOD равны, так как дополняют угол POQ до прямого, значит, равны треугольники POB и QOD. Следовательно, $PB = QD$, откуда $CP = CQ = 0{,}5(BC + CD) = 3$. Таким образом, площадь $BCDO$ равна площади квадрата $POQC$, которая равна 9. S_{ABCDE} – см. выше.

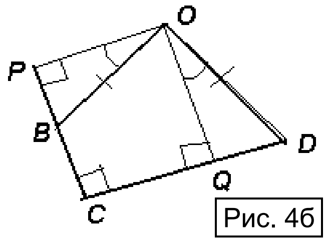


Рис. 4б

Равенство треугольников POB и QOD можно также обосновать, используя поворот с центром O на 90°.

3.3. Найдите все такие целые n, что число $15n^2 - 2n - 1$ является степенью двойки.

Ответ: –1; 3.

Решение. Разложим данное выражение на множители: $15n^2 - 2n - 1 = (3n - 1)(5n + 1)$. Заметим, что при целых n выполняется неравенство $|3n - 1| \le |5n + 1|$ (это несложно доказать рассмотрением случаев $n \le -1$, $n = 0$ и $n \ge 1$). Следовательно, если данное произведение является степенью двойки, то и отношение сомножителей $\frac{5n+1}{3n-1}$ – также степень двойки, причём с целым неотрицательным показателем. Пусть $\frac{5n+1}{3n-1} = 2^k$, где $k \in N$ или $k = 0$, тогда после преобразований получим: $n = \frac{2^k+1}{3 \cdot 2^k - 5}$.

Если $k = 0$, то $n = \frac{2^0+1}{3 \cdot 2^0 - 5} = -1$. Если $k = 1$, то $n = \frac{2^1+1}{3 \cdot 2^1 - 5} = 3$. Подстановкой в исходное выражение убеждаемся, что оба найденных значения являются решением (значения выражения равно $16 = 2^4$ и $128 = 2^7$ соответственно). А если $k \ge 2$, то $0 < \frac{2^k+1}{3 \cdot 2^k - 5} = \frac{2^k+1}{2^k + (2 \cdot 2^k - 5)} < 1$, поэтому n не может быть целым.

Четвёртый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Найдите функцию *f*(*x*), определённую при $x \ne \pm 3$, $x \ne \pm 1$ и $x \ne 0$ и удовлетворяющую условию: $f\left(\frac{x^2-9}{x^2+4x+3}\right)+f\left(\frac{9-x^2}{x^2-4x+3}\right)=x$.

Ответ: $f(x)=\frac{x^3+7x}{2(1-x^2)}$.

Решение. 1) Так как при $x \ne -3$ $\frac{x^2-9}{x^2+4x+3}$ = $\frac{(x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)}$ = $\frac{x-3}{x+1}$, а при $x \ne 3$ $\frac{9-x^2}{x^2-4x+3}$ = $-\frac{(x-3)(x+3)}{(x-1)(x-3)}$ = $\frac{x+3}{1-x}$, то при $x \ne \pm 3$ заданное равенство примет вид: $f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{x+3}{1-x}\right)=x$.

2) Вместо *x* подставим $\frac{x-3}{x+1}$. Получим: $f\left(\frac{\frac{x-3}{x+1}-3}{\frac{x-3}{x+1}+1}\right)+f\left(\frac{\frac{x-3}{x+1}+3}{1-\frac{x-3}{x+1}}\right)=\frac{x-3}{x+1}$ $\Leftrightarrow$ $f\left(\frac{-2x-6}{2x-2}\right)$ + $f\left(\frac{4x}{4}\right)$ = $\frac{x-3}{x+1}$ $\Leftrightarrow$ $f\left(\frac{x+3}{1-x}\right)+f(x)=\frac{x-3}{x+1}$.

3) Вместо *x* подставим $\frac{x+3}{1-x}$. Получим: $f\left(\frac{\frac{x+3}{1-x}-3}{\frac{x+3}{1-x}+1}\right)+f\left(\frac{\frac{x+3}{1-x}+3}{1-\frac{x+3}{1-x}}\right)=\frac{x+3}{1-x}$ $\Leftrightarrow$ $f\left(\frac{4x}{4}\right)$ + $f\left(\frac{-2x+6}{-2-2x}\right)$ = $\frac{x+3}{1-x}$ $\Leftrightarrow$ $f(x)+f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)=\frac{x+3}{1-x}$.

4) Сложим равенства, полученные в 2) и 3): $f\left(\frac{x+3}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+2f(x)=\frac{x-3}{x+1}+\frac{x+3}{1-x}$.

Учитывая полученное в 1), это равенство примет вид: $x+2f(x)=\frac{8x}{1-x^2}$.

Таким образом, $f(x)=\frac{x^3+7x}{2(1-x^2)}$.

Отметим, что подстановки, сделанные в 2) и 3), привели к решению, так как функции у = $\frac{x-3}{x+1}$ *и у =* $\frac{x+3}{1-x}$ *являются взаимно обратными.*

Также отметим, что х = 0 не рассматривается, потому что при подстановке в левую часть исходного равенства получается f(–3) + f(3).

4.2. Высота и радиус основания прямого кругового цилиндра равны 1. Каким наименьшим количеством шаров радиуса 1 можно целиком покрыть этот цилиндр?

Ответ: тремя шарами.

Решение. Оценка. Докажем, что двумя шарами не обойтись.

Лемма. Круг можно покрыть либо одним таким же кругом с тем же центром, либо, как минимум, тремя такими же кругами, центры которых отличны от центра данного круга.

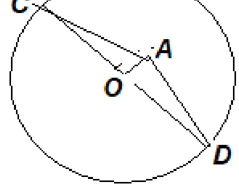


Рис. 5а

Доказательство. Пусть *O* – центр данного круга. Предположим, что его можно покрыть двумя такими же кругами с центрами *A* и *B*, отличными от *O*. Рассмотрим диаметр *CD* исходного круга, который перпендикулярен прямой *AO* (см. рис. 5а). Расстояния от точки от *A* до точек *C* и *D* больше радиуса круга, поэтому *C* и *D* находятся вне круга с центром *A*. При этом, хотя бы одна из них лежит вне круга с центром *B*. Следовательно, хотя бы одна из точек *C* или *D* не покрыта ни одним из двух кругов. Таким образом, двух кругов не хватит.

Тремя кругами покрыть можно, даже если их радиусы меньше радиуса R данного круга. Например, если вписать в данный круг правильный треугольник и построить круги, диаметрами которых являются его стороны, то середины сторон треугольника принадлежат каждому кругу и эти круги покроют исходный (см. рис. 5б). Радиусы этих кругов равны $\frac{R\sqrt{3}}{2} < R$.

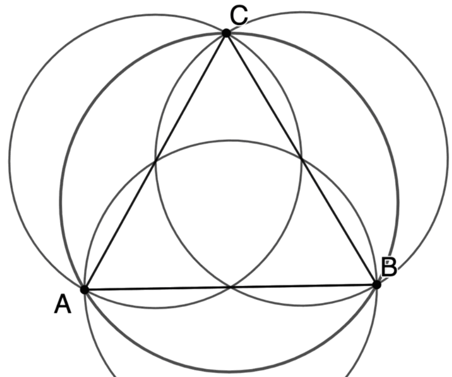


Рис. 5б

Из доказанной леммы следует, что для того, чтобы покрыть основания данного цилиндра двумя шарами радиуса 1, центры этих шаров должны совпасть с центрами оснований цилиндра. Тогда, например, середины образующих боковой поверхности цилиндра останутся не покрытыми, то есть двух шаров заведомо не хватит.

Пример. Впишем в исходный цилиндр правильную треугольную призму $ABCA'B'C'$ (см. рис. 5в). Так как радиус основания цилиндра равен 1, то сторона основания призмы равна $\sqrt{3}$. Длина бокового ребра призмы равна 1, значит, диагональ грани равна 2.

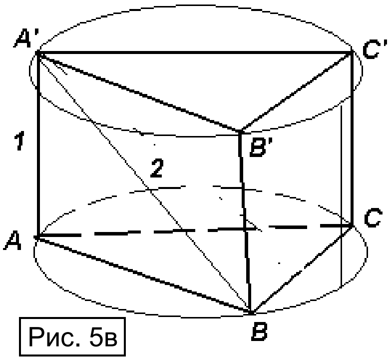


Рис. 5в

Рассмотрим шары радиуса 1, центрами которых являются точки пересечения диагоналей боковых граней этой призмы. Вершины оснований призмы находятся на расстоянии 1 от центров шаров, значит, лежат на поверхности шара, а перпендикуляры из центров шаров на плоскости оснований (то есть в центры сечений шаров) попадают в середины ребер оснований. Таким образом, в сечениях шаров плоскостями оснований получатся конструкции, изображенные на рис. 5б.

Докажем, что любая внутренняя точка цилиндра также принадлежит одному из шаров. Для этого проведем через эту точку плоскость, параллельную основаниям. В сечении цилиндра и призмы этой плоскостью будут получаться треугольник, вписанный в круг (такие же, как в основаниях), а сечениями шаров будут являться круги с центрами в серединах сторон треугольника, но с радиусами большими, чем в основаниях (так как расстояния от центров шаров до плоскости сечения меньше расстояния до плоскости основания). Таким образом, эти круги также будут покрывать весь круг сечения цилиндра.

4.3. Все натуральные числа раскрасили в красный и синий цвета. Натуральные числа m и n таковы, что множество всех красных чисел, умноженных на m, совпадает с множеством всех синих чисел, умноженных на n. Чему могут быть равны m и n?

Ответ: любой паре вида $\{a, ka\}$, где a и k – натуральные числа и $k > 1$.

Решение. Запишем множества красных и синих чисел в порядке возрастания. При умножении на натуральные числа порядок членов в этих последовательностях будет сохраняться, поэтому если последовательности совпадут, то будут равны, в частности, их первые члены.

Рассмотрим случай, когда число 1 красное. Пусть первое синее число равно k. Тогда $m = kn$, то есть число m в k раз больше, чем n. Докажем, что для любого натурального $k > 1$ числа можно раскрасить требуемым образом. Число 1 уже красное, а k синее. Далее на каждом шаге берём наименьшее из ещё не раскрашенных чисел и красим его в красный цвет, а в k раз большее число – в синий (оно больше всех раскрашенных ранее чисел). Действуя таким образом, мы не пропустим никакое из чисел, поэтому все натуральные числа будут раскрашены.

Аналогично, если число 1 синее, а первое красное число равно k, то число n будет в k раз больше, чем m.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+\sqrt[3]{x}=y^2+\sqrt[3]{y}, \\ \sqrt{x-y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$.

Ответ: (4; 4).

Решение. Из второго уравнения следует, что $x \ge y \ge 0$. Так как функция $f(t)=t^2+\sqrt[3]{t}$ возрастает на $[0;+\infty)$, то первое уравнение, имеющее вид $f(x)=f(y)$ равносильно уравнению $x=y$. Тогда $\begin{cases} x^2+\sqrt[3]{x}=y^2+\sqrt[3]{y}, \\ \sqrt{x-y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \\ \sqrt{x-y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \\ 2\sqrt{x}=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=4$.

5.2. Стороны треугольника равны 3, 4 и 5. Найдите расстояние от центра его вписанной окружности до медианы, проведённой к большей стороне.

Ответ: 0,2.

Решение. Пусть *ABC* – данный треугольник, *AC* = 4, *BC* = 3, *AB* = 5. Тогда это египетский треугольник с гипотенузой *AB*. Пусть также *I* – центр его вписанной окружности, *K* – точка её касания с *AB*, *CM* – медиана, *CH* – высота (см. рис. 6). Далее можно рассуждать по-разному.

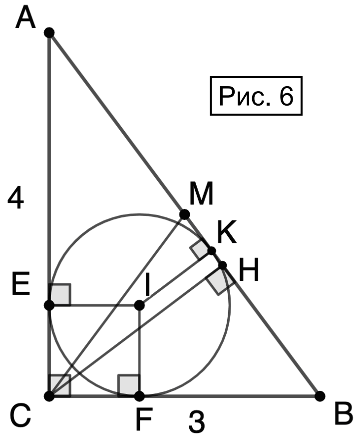


Рис. 6

Первый способ. Заметим, что *CI* – биссектриса угла *MCH* (это следует из того, что ∠*MCA* = ∠*MAC* = 90° – ∠*ABC* = ∠*HCB*, то есть лучи *CM* и *CH* – изогонали). Значит, расстояние от *I* до *CM* равно расстоянию от *I* до *CH*, которое, в свою очередь, равно *KH*, так как *IK* || *CH*.

Полупериметр *p* треугольника *ABC* равен 6, тогда *BK* = *p* – *AC* =2, *BH* = $\frac{BC^2}{AB}$ = 1,8, поэтому *KH* = *BK* – *BH* = 0,2.

Второй способ. Пусть *F* – точка касания вписанной окружности со стороной *BC*, а искомое расстояние равно *x*. Тогда *IF* = *IK* = $\frac{AC+BC-AB}{2}$ = 1. Площадь *S* треугольника *BMC* равна половине площади *ABC*, то есть равна 3. Точка *I* лежит внутри треугольника *BMC*, так как биссектриса *CI* лежит между *CM* и *CH*. Тогда S = 0,5*BC*·*IF* + 0,5*BM*·*IK* + 0,5*CM*·*x*, то есть 3 = 1,5 + 1,25 + 1,25*x*, откуда *x* = 0,2.

5.3. Найдите остаток при делении числа $9^{9^9}-8^{8^8}$ на 7. *Напомним, что* $a^{b^c}=a^{\left(b^c\right)}$.

Ответ: 0.

Решение. Заметим, что $9^3-1=(9-1)(9^2+9+1)=8\cdot 91$ делится на 7, то есть $9^3 \equiv 1$ (mod 7). Следовательно, $9^{3m} \equiv 1$ (mod 7) при любом натуральном *m*. В частности, $9^{9^9} \equiv 1$ (mod 7), поскольку 9^9 делится на 3.

Также $8 \equiv 1$ (mod 7), поэтому $8^n \equiv 1$ (mod 7) при любом натуральном *n*. Таким образом, оба числа 9^{9^9} и 8^{8^8} дают при делении на 7 остатки 1, а их разность делится на 7.