7 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Можно ли число 2025 разбить на четыре натуральных слагаемых так, что если к первому прибавить 2, из второго вычесть 2, третье умножить на 2, а четвертое разделить на 2, то в результате каждого действия получится одно и то же число?

Ответ: можно.

Решение. Пусть x – третье число, тогда четвертое равно $4x$, второе равно $2x + 2$, а первое – $(2x – 2)$. Получим уравнение: $x + 4x + (2x + 2) + (2x – 2) = 2025$, откуда $x = 225$. Значит, $2025 = 448 + 452 + 225 + 900$.

1.2. Каждую сторону прямоугольника увеличили на 1 см. Может ли при этом его площадь увеличиться на 100 м^2?

Ответ: может.

Решение. Пусть стороны исходного прямоугольника равны a см и b см, тогда его площадь равна ab см^2, а после увеличения она стала равна $(a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1$ (см^2). Так как 100 м^2 = 1 000 000 см^2, то $a + b + 1 = 1\,000\,000$, откуда $a + b = 999\,999$.

Это равенство возможно. Например, если стороны исходного прямоугольника были равны 1 см и 999 998 см, то его площадь увеличится так, как требуется.

1.3. Существует ли трёхзначное число, которое после перестановки первой цифры в конец числа уменьшится в три раза?

Ответ: не существует.

Решение. Пусть существует число $\overline{abc}$, где $a \neq 0$, удовлетворяющее условию. Тогда $\overline{abc} = 3\overline{bca}$, то есть $100a + 10b + c = 300b + 30c + 3a \Leftrightarrow 97a = 290b + 29c$.

Но это равенство выполняться не может, так как его правая часть делится на 29, а левая – нет. Таким образом, такого трёхзначного числа не существует.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. От двух брёвен отпилили по одинаковому куску, после чего первое бревно стало в 3 раза длиннее второго. Затем от каждого бревна отпилили еще по такому же куску, после чего первое бревно стало в 4 раза длиннее второго. Во сколько раз первое бревно было длиннее второго первоначально?

Ответ: в 2,5 раза.

Решение. <u>Первый способ</u>. Введём обозначения, используя одинаковые единицы длины, и составим таблицу:

		Отрезали	
	Исходные длины	После первого распила	После второго распила
I бревно	a	$a-x$	$a-2x$
II бревно	b	$b-x$	$b-2x$

Записав, согласно условию, соотношения между длинами бревен в виде уравнений, получим систему:

$\begin{cases} a-x=3(b-x), \\ a-2x=4(b-2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-x=3b-3x, \\ a-2x=4b-8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b-2x, \\ a=4b-6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a=9b-6x, \\ a=4b-6x \end{cases}$. Вычтем второе уравнение из первого: $2a = 5b$, откуда $a = 2,5b$.

<u>Второй способ</u>. Из условия следует, что после первого распила короткое бревно составляло половину разности длин получившихся брёвен, а после второго распила – треть. Значит, при втором распиле короткое бревно уменьшилось на $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ разности. Поэтому до первого распила короткое бревно составляло $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ разности длин брёвен, откуда следует, что оно составляло $\frac{2}{3} : (\frac{2}{3} + 1) = \frac{2}{5}$ от более длинного.

2.2. Дан квадрат *ABCD*. На отрезках *BC* и *BD* построены равносторонние треугольники *BEC* и *BFD* соответственно (по одну сторону от прямой *BD*). Докажите, что отрезок *FE* равен стороне квадрата.

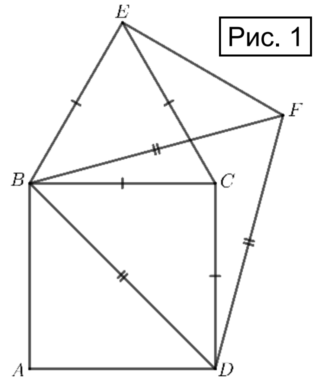


Рис. 1

Решение. Рассмотрим треугольники *BEF* и *BCD* (см. рис. 1): *BE = BC, BF = BD (*стороны равносторонних треугольников), а углы *EBF* и *CBD* равны, так как каждый дополняет угол *FBC* до угла равностороннего треугольника (до 60°). Таким образом, треугольники *BEF* и *BCD* равны (по двум сторонам и углу между ними), откуда *EF = CD*, что и требовалось.

Отметим, что треугольник BEF можно получить из треугольника BCD поворотом вокруг точки B на 60° против часовой стрелки.

2.3. Можно ли записать по кругу 2025 натуральных чисел так, чтобы для каждых двух соседних чисел частное от деления нацело большего на меньшее было простым числом?

Ответ: нельзя.

Решение. Первый способ. Заменим каждое записанное число на количество простых множителей в его разложении. Так как при каждом делении должно получиться простое число, то при такой замене чётные и нечётные числа должны чередоваться. Но это невозможно, так как число 2025 нечётное.

Второй способ. Пусть указанная расстановка чисел возможна. Будем каждый раз делить число на следующее за ним, например, по часовой стрелке. В результате получим 2025 чисел, которые либо простые, либо обратные к простым. Перемножим полученные числа. Это произведение должно быть равно 1, но количество множителей нечётно, поэтому в полученном дробном выражении все простые числа сократиться не могут. Противоречие.

Третий тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

3.1. Натуральные числа m и n таковы, что $m^2 + n^2 + 1 = 2(mn + m + n)$. Докажите, что числа m и n являются квадратами натуральных чисел.

Решение. Первый способ. Преобразуем исходное равенство: $m^2 + n^2 + 1 = 2(mn + m + n) \Leftrightarrow m^2 + n^2 + 1 - 2mn - 2n + 2m = 4m \Leftrightarrow (m - n + 1)^2 = 4m$. В левой части этого равенства – квадрат целого числа и $4 = 2^2$, поэтому m – квадрат натурального числа.

Действуя вналогично, получим равенство $(n - m + 1)^2 = 4n$, откуда следует, что и число n является квадратом натурального числа.

Второй способ. Преобразуем исходное равенство иначе: $m^2 + n^2 + 1 = 2(mn + m + n) \Leftrightarrow m^2 + n^2 + 1 + 2mn - 2m - 2n = 4mn \Leftrightarrow (m + n - 1)^2 = 4mn$. Значит, $4mn$ является квадратом натурального числа, тогда и mn является точным квадратом.

Кроме того, из полученного равенства следует, что m и n – взаимно простые числа. Действительно, если бы они имели общий делитель $p \neq 1$, то равенство было бы невозможно, так как его правая часть делится на p, а левая не делится. Поэтому равенство будет выполняться только в случае, когда каждое из чисел m и n является квадратом натурального числа.

3.2. В прямоугольном треугольнике *ABC* с прямым углом *A* проведена биссектриса *BL*. На стороне *BC* отмечена точка *E*, а на отрезке *CL* – точка *D* так, что $\angle LDE = 90°$ и *AL* = *DE*. Докажите, что *AB* = *LD* + *BE*.

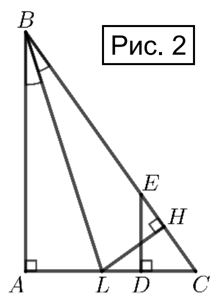


Рис. 2

Решение. Опустим перпендикуляр *LH* на гипотенузу *BC* (см. рис. 2). Прямоугольные треугольники *LBH* и *LBA* равны (по гипотенузе и острому углу), откуда *BH* = *BA* и *LH* = *LA* = *DE*.

Так как *LH* и *DE* – равные катеты прямоугольных треугольников *LCH* и *ECD* с общим острым углом *C*, то эти треугольники равны, откуда *LC* =

EC, *HC* = *DC*. Следовательно, *LD* = *LC* – *DC* = *EC* – *HC* = *EH*. Таким образом, *AB* = *BH* = *BE* + *EH* = *BE* + *LD*, что и требовалось.

3.3. Двое участников шахматного турнира (каждый играл с каждым один раз) выбыли из него, сыграв по три партии. Сколько участников начали турнир, если известно, что всего по окончанию турнира было сыграно 83 партии?

Ответ: 15.

Решение. Пусть начали турнир *n* + 2 шахматиста, тогда участники, которые играли до конца, сыграли друг с другом $\frac{n(n-1)}{2}$ партий, а выбывшие участники сыграли либо 6, либо 5 партий (в зависимости от того, успели ли они сыграть друг с другом). Следовательно, $\frac{n(n-1)}{2}$ = 77 или $\frac{n(n-1)}{2}$ = 78, откуда $n(n-1) = 154$ или $n(n-1) = 156$.

Таким образом, осталось найти два последовательных натуральных числа, произведение которых равно 154 или 156. Заметим, что $11\cdot12 < 154$, а $12\cdot13 = 156$. Следовательно, первое уравнение не имеет натуральных решений, а из второго уравнения получим, что $n = 13$, тогда $n + 2 = 15$.

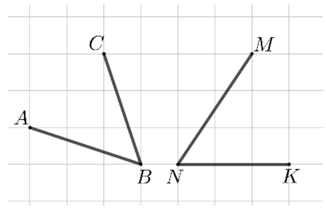
Четвертый тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

4.1. Докажите, что $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{10}{11}\cdot\ldots\cdot\frac{1327}{1328}\cdot\frac{1330}{1331}<\frac{1}{11}$.

Решение. Заметим, что $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot\left(\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1327}{1328}\cdot\frac{1328}{1329}\cdot\frac{1329}{1330}\right)\cdot\frac{1330}{1331}=\frac{1}{1331}$.

Введём обозначения: $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{10}{11}\cdot\ldots\cdot\frac{1327}{1328}\cdot\frac{1330}{1331}=a$, $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{11}{12}\cdot\ldots\cdot\frac{1328}{1329}=b$, $\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{12}{13}\cdot\ldots\cdot\frac{1329}{1330}=c$. Тогда $a<b<c$, поэтому $a^3<abc=\frac{1}{1331}$, откуда $a<\frac{1}{11}$, что и требовалось.

4.2. Сравните величины острых углов *ABC* и *MNK* (см. рисунок).



Ответ: $\angle ABC < \angle MNK$.

Решение. Первый способ. Дополним каждый из данных углов до прямых углов: проведем отрезки *BD* и *NP* так, что $\angle ABD = \angle KNP = 90°$, причём *BD* = *BA* и *NP* = *NK* (см. рис. 3а). Проведём теперь биссектрису угла *CBD* и медиану *NL* треугольника *MNP*. Тогда угол *CBD* состоит из двух одинаковых углов, каждый из которых равен углу *PNL*, поэтому достаточно сравнить углы *PNL* и *MNL*.

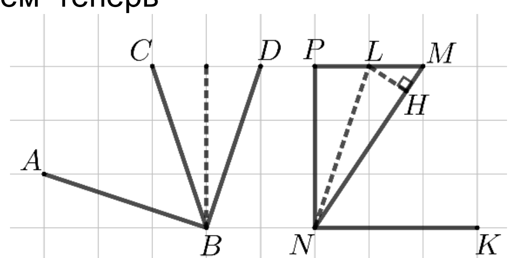


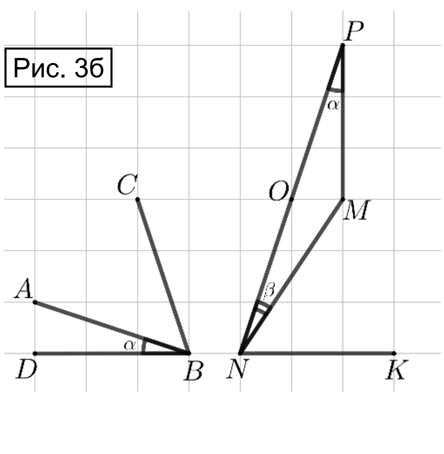
Рис. 3а

Для этого проведём перпендикуляр *LH* к прямой *MN*. Тогда *LH* < *LM* = *LP*. Таким образом, у прямоугольных треугольников *PNL* и *HNL* общая гипотенуза, а катет *LP* больше катета *LH*, поэтому $\angle PNL > \angle HNL = \angle MNL$. Следовательно, $\angle ABC = 90° - \angle CBD < 90° - \angle MNP = \angle MNK$.

Сравнение углов PNL и MNL можно обосновать иначе. Так как треугольник PNM – прямоугольный и NL – его медиана, то расстояние от L до прямой MN меньше расстояния от L до прямой NP, значит биссектриса угла PNM проходит внутри угла PNL. Значит, $\angle PNL > \angle MNL$.

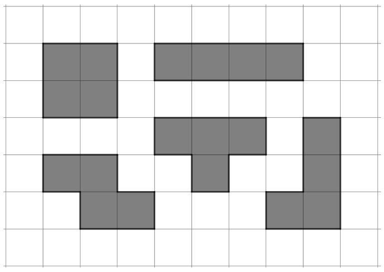
Второй способ. Построим отрезки *BD* и *NO* (см. рис. 3б) так, чтобы углы *DBC* и *ONK* оказались симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку *BN*,

Рис. 3б



тогда эти углы будут равными. Обозначим угол ABD через α, а угол OMN – через β, тогда $\angle ABC = \angle DBC - \alpha$, а $\angle MNK = \angle ONK - \beta$. Значит, теперь достаточно сравнить α и β.

Построим треугольник OPM, равный треугольнику ABD. Заметим, что отрезки PO и NO являются диагоналями прямоугольников размером 1×3, поэтому точки N, O и P лежат на одной прямой. Таким образом, α и β – это углы треугольника NPM, причем β лежит напротив стороны длиной 3 клетки, а α – напротив стороны, длина которой больше трёх клеток. Следовательно, $\alpha > \beta$. Таким образом, $\angle ABC = \angle DBC - \alpha < \angle ONK - \beta = \angle MNK$.



4.3. Клетчатый квадрат разрезали на тетрамино, причём все пять видов тетрамино (см. рисунок) оказались использованы одинаковое количество раз. Какова наименьшая возможная площадь такого квадрата? *Фигуры можно поворачивать и переворачивать.*

Ответ: 400 клеток.

Решение. Пусть квадрат разрезан на n тетрамино каждого вида. Пять различных тетрамино имеют суммарную площадь $5\cdot4 = 20$ клеток, поэтому искомая площадь квадрата равна $20n$. Докажем, что n – чётное число.

Действительно, раскрасим клетки искомого квадрата в шахматном порядке, тогда чёрных и белых клеток будет поровну, так как число $20n$ – чётное. Но каждый из четырёх видов тетрамино займёт по две клетки каждого цвета, а тетрамино в виде буквы Т займет три клетки одного цвета и одну клетку другого. Поэтому нечётное количество Т-тетрамино невозможно разместить так, чтобы они в сумме заняли поровну клеток каждого цвета.

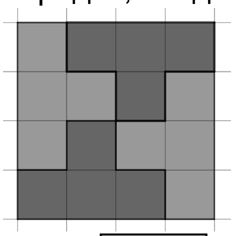


Рис. 4а

Так как $20n = 2^2\cdot5n$, то наименьшее чётное значение n, для которого $20n$ является точным квадратом, равно 20. Для построения примера для квадрата со стороной 20 клеток можно, например, воспользоваться тем, что из четырёх Т-тетрамино можно сложить квадрат 4×4 (см. рис. 4а), а из четырёх Z-тетрамино и четырёх уголков можно сложить прямоугольник 4×8 (см. рис. 4б): Тогда из пяти квадратов 4×4 можно сложить прямоугольник 4×20, из пяти прямоугольников 4×8 – прямоугольник 8×20, а оставшийся прямоугольник 8×20 замостить двадцатью квадратами 2×2 и двадцатью прямоугольниками 1×4.

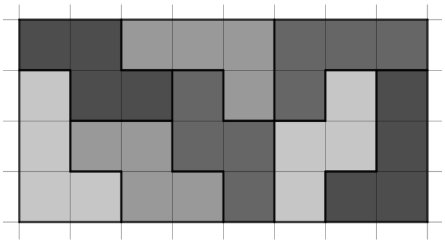


Рис. 4б