Математическая регата
18.01.2025
8 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Даны 10 последовательных натуральных чисел. Сумма первых четырех равна 46. Чему равна сумма последних четырех?

Ответ: 70.

Решение. Пусть данные числа: n, $n + 1$, ..., $n + 8$, $n + 9$. Тогда сумма первых четырёх равна $4n + 6 = 46$, откуда $n = 10$. Значит, сумма последних четырёх равна $16 + 17 + 18 + 19 = 70$.

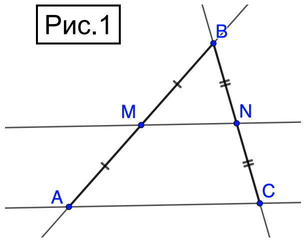
Можно не вычислять заданные числа по отдельности, а заметить, что седьмое число больше первого на 6, восьмое на 6 больше второго, и т. д. Тогда искомая сумма больше заданной на $6\cdot 4 = 24$, *то есть она равна* $46 + 24 = 70$.

1.2. На плоскости провели n прямых. При каком наименьшем n они могут иметь $n + 1$ точку пересечения?

Ответ: при $n = 4$.

Решение. У двух прямых может быть не более одной точки пересечения, а у трёх прямых – не более трёх. Пример для $n = 4$ – см. рис. 1 ($MN \parallel AC$).

Рис.1



1.3. В квадрате 5×5 отметьте пять клеток так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке была отмечена ровно одна клетка, а при сгибании квадрата по одной из главных диагоналей на линии сгиба и на четырех диагоналях, ей параллельных, также оказалось ровно по одной отмеченной клетке.

Ответ: например, см. рис. 2.

Сгибаем по диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний.

Рис. 2

●				
		●		
				●
	●			
			●	

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Съев на пустой желудок трёх поросят и семерых козлят, Серый Волк всё ещё страдал от голода. В другой раз он съел на пустой желудок таких же 7 поросят и козлёнка и страдал уже от обжорства. От чего будет страдать Волк, если съест на пустой желудок 11 таких же козлят?

Ответ: Волк будет страдать от голода.

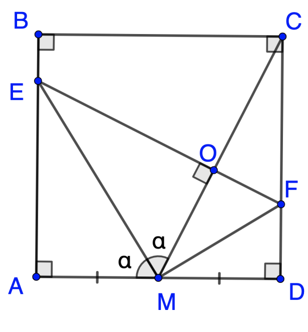
Решение. Пусть p и k – «питательность» поросенка и козленка соответственно, а N – норма насыщения волка. Так как трёх поросят и семерых козлят Волку мало, то $3p + 7k < N$, а 7 поросят и козлёнка – ему много, то $7p + k > N$. Следовательно, $7p + k > 3p + 7k$, откуда $4p > 6k$, то есть $2p > 3k$.

Тогда 11 козлят Волку тоже будет мало, так как $N > 3p + 7k > p + 10k > 11k$. Следовательно, в этом случае он будет страдать от голода.

2.2. Точка M – середина стороны AD квадрата $ABCD$. На сторонах AB и CD отмечены точки E и F соответственно так, что $EF \perp CM$. Оказалось, что ME – биссектриса угла AMC. Докажите, что MF – биссектриса угла CMD.

Решение. Пусть CM и EF пересекаются в точке O (см. рис. 3). Тогда прямоугольные треугольники AME и OME равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $OM = AM = MD$. Тогда равны прямоугольные треугольники MFO и MFD (по гипотенузе и катету). Следовательно, $\angle FMO = \angle FMD$, то есть MF – биссектриса угла CMD.

Рис. 3



Отметим, что утверждение задачи останется верным, если ABCD – прямоугольник или трапеция с прямыми углами A и D. Кроме того, оно равносильно тому, что угол EMF – прямой.

2.3. Сумма трёх трёхзначных чисел, составленных из девяти цифр, кроме нуля, взятых по одному разу, равна 1665. В каждом из чисел поменяли местами первую и последнюю цифру. Докажите, что сумма получившихся чисел также равна 1665.

Решение. Сумма трёх различных цифр, отличных от нуля, больше 5 и меньше 25. Так как сумма трёх исходных чисел оканчивается на 5, то сумма их цифр, стоящих в разряде единиц, может быть равна только 15. Тогда и сумма их цифр, стоящих в разряде десятков, оканчивается на 5, поэтому и она равна 15. Аналогичное рассуждение верно и для цифр в разряде сотен. Следовательно, перестановка, указанная в условии, не изменяет сумму исходных чисел.

Числа, фигурирующие в условии задачи, существуют. Например, 187 + 932 + 546 = 1665 = 781 + 239 + 645. Доказывать это не требуется.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Решите уравнение: $\frac{x^3}{1-3x+3x^2}=\frac{1000}{1001}$.

Ответ: $\frac{10}{11}$.

Решение. Заметим, что при любых значениях x выполняется неравенство $3x^2 - 3x + 1 \neq 0$, так как дискриминант этого трёхчлена $D = 9 - 12 < 0$.

Этот же результат можно получить и выделением квадрата двучлена: $3x^2 - 3x + 1 = 3(x^2 - x + \frac{1}{3}) = 3((x^2 - x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}) = 3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \neq 0.$

Далее можно рассуждать по разному.

Первый способ. В знаменателе дроби, стоящей в левой части уравнения, вычтем и прибавим x^3. Тогда $\frac{x^3}{1-3x+3x^2}=\frac{1000}{1001} \Leftrightarrow \frac{x^3}{(1-x)^3+x^3}=\frac{1000}{1001}$. Так как $x = 0$ не является корнем уравнения, то его можно преобразовать так: $\frac{(1-x)^3+x^3}{x^3}=\frac{1001}{1000} \Leftrightarrow \left(\frac{1-x}{x}\right)^3=\frac{1}{1000}$ $\Leftrightarrow \frac{1-x}{x}=\frac{1}{10} \Leftrightarrow x=\frac{10}{11}$.

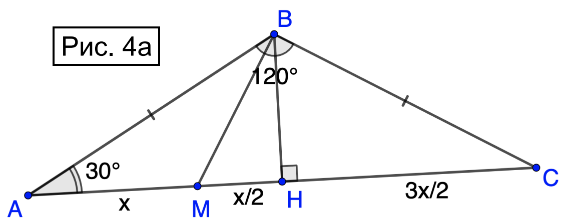
Второй способ. $\frac{x^3}{1-3x+3x^2}=\frac{1000}{1001} \Leftrightarrow 1001x^3 = 1000 - 3000x + 3000x^2 \Leftrightarrow x^3 = 1000(1 - x)^3 \Leftrightarrow x = 10(1 - x) \Leftrightarrow x=\frac{10}{11}$.

Доказать, что знаменатель дроби в левой части уравнения не обращается в ноль, можно иначе: $1 - 3x + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - x)^3 + x^3 = 0 \Leftrightarrow 1 - x = - x$, *а последнее уравнение не имеет решений.*

Можно также оформить решение, используя не равносильность, а следствие. Тогда надо подставить полученный корень в знаменатель дроби в левой части и убедиться, что он не посторонний.

3.2. Треугольник ABC – равнобедренный, $\angle B = 120°$. На стороне AC отмечена такая точка M, что $AM : MC = 1 : 2$. Найдите угол MBC.

Рис. 4а



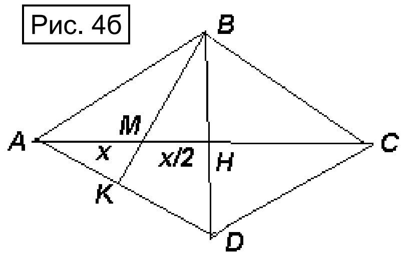
Ответ: 90°.

Решение. Из условия следует, что AC – основание данного треугольника. Пусть $AM = x$, тогда $CM = 2x$. Проведём высоту BH, которая также является медианой и биссектрисой треугольника ABC (см. рис. 4 а, б). Значит, $AH = CH = 1{,}5x$, $MH = 0{,}5x$ и $\angle ABH = \angle CBH = 60^\circ$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Так как $\angle BAH = 30^\circ$, то из прямоугольного треугольника BAH получим, что $AB : BH = 2 : 1$ (см. рис. 4а). Но и $AM : MH = 2 : 1$, поэтому BM – биссектриса треугольника ABH. Тогда $\angle MBH = 30^\circ$, а $\angle MBC = \angle MBH + \angle CBH = 90^\circ$.

Второй способ. Удвоив медиану BH треугольника ABC, получим ромб $ABCD$ (см. рис. 4б). Тогда M – точка пересечения медиан треугольника ABD, так как она делит медиану AH в отношении 2 : 1, считая от вершины A. Значит, другая медиана BK проходит через M. Так как $AB = AD$ в силу симметрии и $\angle ABD = 60^\circ$, то треугольник ABD равносторонний, значит $BK \perp AD$, но $AD \parallel BC$, поэтому $MB \perp BC$.

Рис. 4б



3.3. Есть набор грузов общей массой 9 тонн, причем каждый груз весит не более одной тонны. Эти грузы нужно перевезти на машинах, каждая из которых может перевозить суммарную массу не более трёх тонн. Какого наименьшего количества машин заведомо будет достаточно?

Ответ: 4 машины.

Решение. Если грузов, например, 10 и каждый из них весит 9/10 тонны, то на одну машину можно погрузить не более трёх грузов, поэтому трёх машин не хватит.

Покажем, что четырёх машин достаточно. Действительно, на каждую машину можно погрузить не менее двух тонн груза (если погружено меньше, то можно добавить ещё один груз). Следовательно, на 3 машины можно погрузить не менее шести тонн, а оставшийся груз можно погрузить на четвёртую машину.

Оценку можно провести и по-другому. Рассмотрим отрезок длины 9 и разобьём его на отрезки, длины которых равны массам грузов. Затем разрежем исходный отрезок на три отрезка длины 3. Все грузы, для которых соответствующие отрезки оказались в первом, втором и третьем отрезках, поместим на первую, вторую и третью машину соответственно. А те грузы, для которых отрезки попали на разрезы, поместим в четвёртую машину – их не более двух, поэтому их суммарная масса не больше двух тонн.

Это более общее рассуждение, так как его можно применять и в случаях других числовых данных.

Четвёртый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Найдите значение выражения $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+...+2022\cdot 2023+2023\cdot 2024}{1^2+3^2+5^2+...+2021^2+2023^2}$.

Ответ: 2.

Решение. Первый способ. Преобразуем числитель данной дроби, добавив слагаемое $0\cdot 1$, не изменяющее значение суммы, и группируя слагаемые попарно: $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + 5\cdot 6 + ... + 2022\cdot 2023 + 2023\cdot 2024 = (0\cdot 1 + 1\cdot 2) + (2\cdot 3 + 3\cdot 4) + (4\cdot 5 + 5\cdot 6) + ... + (2022\cdot 2023 + 2023\cdot 2024) = 1(0 + 2) + 3(2 + 4) + 5(4 + 6) + ... + 2023(2022 + 2024) = 1\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 5 + ... + 2023\cdot 2\cdot 2023 = 2(1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 2023^2)$.

Сократив дробь на знаменатель, получим, что её значение равно 2.

Второй способ. Запишем числитель дроби в виде: $2\left(1 + 3 + 6 + 10 + 15 + ... + \dfrac{2022\cdot 2023}{2} + \dfrac{2023\cdot 2024}{2}\right)$. Тогда в скобках записана сумма треугольных чисел, то есть чисел вида $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Сумма n таких чисел вычисляется по формуле $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Используя её для n = 2023 и учитывая 2 за скобками, получим, что числитель равен $\frac{2023\cdot 2024\cdot 2025}{3}$.

Знаменатель дроби является суммой квадратов первых 1012 нечётных чисел. Найдём формулу для вычисления суммы квадратов нечётных чисел, используя известную формулу $1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Тогда $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = (1^2 + 2^2 + \ldots + (2n)^2) - (2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2) = (1^2 + 2^2 + \ldots + (2n)^2) - 4(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(4n+1-2n-2)}{3} = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$.

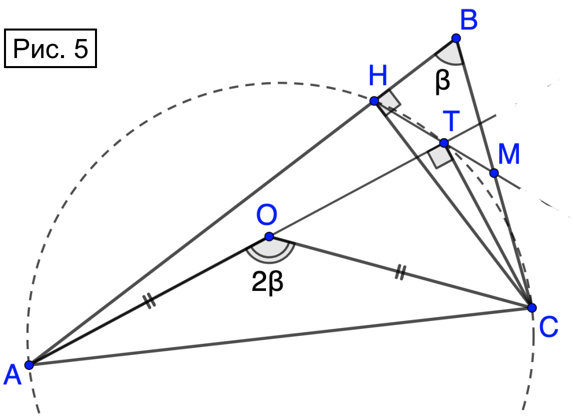
Таким образом, знаменатель данной дроби равен $\frac{1012\cdot 2023\cdot 2025}{3}$, а значение дроби равно 2.

Вывод использованных формул – см., например, в книжке «Последовательности» (серия «Школьные математические кружки») – М.: МЦНМО, 2018.

4.2. Пусть CH – высота остроугольного треугольника ABC, O – центр описанной около него окружности. Точка T – проекция вершины C на прямую AO. Докажите, что прямая TH делит сторону BC пополам.

Решение. Пусть прямая TH пересекает BC в точке M (см. рис. 5), $\angle ABC = \beta$, тогда $\angle AOC = 2\beta$, $\angle OAC = 90° - \beta$.

Рис. 5



Так как $\angle AHC = 90° = \angle ATC$, то четырёхугольник $AHTC$ –вписанный, откуда $\angle THC = \angle TAC = 90° - \beta$. Тогда $\angle MHB = \beta = \angle MBH$. Значит, в прямоугольном треугольнике BHC: $HM = BM$, откуда и следует, что M – середина BC.

Счёт углов можно провести иначе. Например, из того, что четырёхугольник AHTC – вписанный, следует, что $\angle MHB = \angle ACT = \beta = \angle MBH$.

Отметим, что равенство углов MHB и ACT показывает, что прямые MH и AC антипараллельны относительно прямых BA и BC.

4.3. В десятичной записи 101-значного числа есть только единицы и двойки. Докажите, что можно вычеркнуть одну цифру так, чтобы получившееся 100-значное число делилось на 11.

Решение. Остаток от деления натурального числа на 11 равен остатку от деления на 11 числа, равного разности сумм цифр, стоящих на нечётных и чётных местах в его десятичной записи, считая справа налево. Использовать этот факт можно по-разному.

<u>Первый способ</u>. Если вычеркнуть из числа любые две одинаковые цифры, стоящие рядом, то остаток от деления на 11 не изменится. Тогда последовательно вычеркнем из данного 101-значного числа все такие пары одинаковых цифр до тех пор, пока это возможно. В результате получим число, у которого нечётное количество цифр в десятичной записи, и оно имеет вид: 1212…21 или 2121…12. Теперь, если в получившемся числе вычеркнуть центральную цифру, то суммы цифр, стоящих на нечётных и чётных местах, станут одинаковыми, значит, получившееся число будет иметь остаток 0 при делении на 11. Вернув вычеркнутые пары цифр, получим 100-значное число, делящееся на 11.

<u>Второй способ</u>. Пусть $A = \overline{a_1a_2\ldots a_{101}}$ – данное число. Обозначим через D_n знакопеременную сумму цифр числа, получающегося из A вычёркиванием n-й цифры. Тогда для каждого n от 1 до 100 число D_{n+1} получается из D_n заменой слагаемого a_{n+1} на слагаемое a_n, взятое с тем же знаком. Так как цифры числа A равны только 1 и 2, то D_{n+1}

отличается от D_n не более чем на 1. Кроме того, $D_1 + D_{101} = (a_2 - a_3 + \ldots + a_{100} - a_{101}) + (a_1 - a_2 + \ldots + a_{99} - a_{100}) = a_1 - a_{101}$, а эта разность равна – 1, 0 или 1, поэтому D_1 и D_{101} не могут быть положительными или отрицательными одновременно. Тогда, используя дискретную непрерывность, получим, что существует n, для которого $D_n = 0$. Значит, при вычёркивании цифры a_n полученное число будет делиться на 11.