Математическая регата
12.10.2024
9 класс
Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

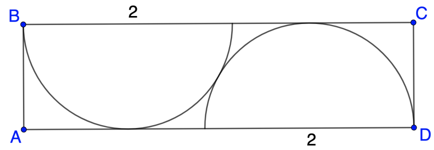
1.1. Решите уравнение: $\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^3+\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^3=27$.

Ответ: – 2; – 0,5.

Решение. Первый способ. Пусть $\frac{x+2}{x+1}=a$, $\frac{2x+1}{x+1}=b$, тогда уравнение примет вид: $a^3 + b^3 = 27$. Используя формулу суммы кубов и учитывая, что $a + b = 3$, это уравнение удобно записать так: $(a + b)((a + b)^2 – 3ab) = 3^3 \Leftrightarrow 3^2 – 3ab = 3^2 \Leftrightarrow a = 0$ или $b = 0$. Таким образом, $x = – 2$ или $x = – 0,5$.

Второй способ. При условии $x \neq – 1$ умножим обе части уравнения на $(x + 1)^3$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим: $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x^3 + 1) + 7x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = – 2$ или $x = – 0,5$.

1.2. Внутри прямоугольника расположены две полуокружности диаметра 2, каждая из которых касается другой полуокружности и двух сторон прямоугольника (см. рисунок). Найдите длину его диагонали.



Ответ: $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ = $\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

Решение. Пусть P и Q – центры полуокружностей, K – точка касания полуокружности с центром P со стороной AD, тогда $PK = 1$ (см. рис. 1). Так как PQ содержит точку M касания полуокружностей, то $PQ = 2$. Из прямоугольного треугольника PQK получим, что $KQ = \sqrt{3}$. Далее можно рассуждать по-разному.

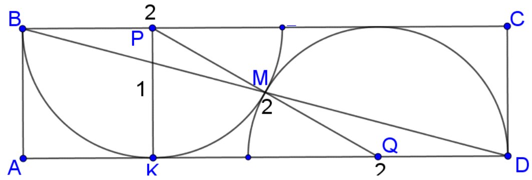


Рис. 1

Первый способ. Так как $ABPK$ – квадрат, то $AK = DQ = 1$, значит, $AD = 2 + \sqrt{3}$. Диагональ $BD = \sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Второй способ. Точка M касания полуокружностей является их центром симметрии, а также является центром симметрии прямоугольника, то есть серединой его диагонали BD. По теореме о касательной и секущей $DK^2 = DB{\cdot}DM$, то есть $DK^2 = 0,5DB^2$, откуда $DB = DK\sqrt{2} = \left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{6}$.

Любители тригонометрии могут также заметить, что угол между диагональю DB и стороной DA равен 15° (он равен половине внешнего угла PQA), откуда $DB=\frac{1}{\sin 15^\circ}=\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Отметим, что при различных способах решения получаются, казалось бы, разные ответы. Но это не так, что проще всего проверить возведением в квадрат, учитывая, что это положительные числа; $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2=8+4\sqrt{3}=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$.

1.3. Можно ли, используя только цифры 2, 3, 4, 9, составить два натуральных числа, одно из которых в 19 раз больше другого?

Ответ: нельзя.

Решение. Первый способ. Пусть существуют такие натуральные числа a и b, что $a = 19b$, тогда цифра единиц числа a должна быть последней цифрой произведения числа 9 и цифры единиц числа b. Но при умножении 9 на 2, 3, 4 и 9 последней цифрой произведения являются цифры 8, 7, 6 и 1 соответственно, которых нет по условию. Противоречие.

Второй способ. Если одно из чисел в 19 раз больше другого, то их сумма делится на 20, поэтому она должна заканчиваться нулём. Но при сложении любых двух цифр из данных нуля на конце быть не может, в том числе и в случае, когда оба числа оканчиваются одной и той же цифрой. Значит, получить требуемые натуральные числа невозможно.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Пусть a, b и c – попарно различные числа. Докажите, что $a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$ не равно нулю.

Решение. Разложим данное выражение на множители. Это можно сделать по-разному.

Первый способ. Сделаем из трёх слагаемых четыре: $a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a) = a^2((c - a) + (a - b)) + b^2(a - c) + c^2(b - a) = a^2(c - a) + a^2(a - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a) = (c - a)(a^2 - b^2) + (a - b)(a^2 - c^2) = (c - a)(a - b)(a + b) + (a - b)(a - c)(a + c) = (c - a)(a - b)(a + b - a - c) = (c - a)(a - b)(b - c)$.

Второй способ. Раскроем вторую и третью скобки и выделим квадратный трёхчлен с переменной a: $a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a) = a^2(c - b) + ab^2 - cb^2 + c^2b - c^2a = a^2(c - b) + a(b^2 - c^2) + cb(c - b) = a^2(c - b) - a(c - b)(c + b) + bc(c - b) = (c - b)(a^2 - (b + c)a + bc) = (c - b)(a - b)(a - c)$, так как b и c – корни трёхчлена.

Также можно, не раскрывая скобок, сказать, что выражение является квадратным трёхчленом относительно переменной a с коэффициентом $(c - b)$ перед a^2 и непосредственной подстановкой убедиться, что b и c – его корни. Тем самым получить такое же разложение на множители.

В обоих случаях полученное произведение, равное исходному выражению, обращается в нуль тогда и только тогда, когда равны хотя бы два из чисел a, b или c, что противоречит условию.

2.2. Докажите, что с помощью трёх одинаковых кругов радиуса 1 можно покрыть любой прямоугольный треугольник с гипотенузой 4.

Решение. Пусть M – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, MD и ME – его средние линии. Тогда треугольник ABC разбивается на равные прямоугольные треугольники ADM и BEM с гипотенузой 2 и прямоугольник $CDME$ с диагональю 2 (см. рис. 2). Значит, круги радиуса 1, описанные около этих трёх фигур, целиком покроют треугольник ABC.

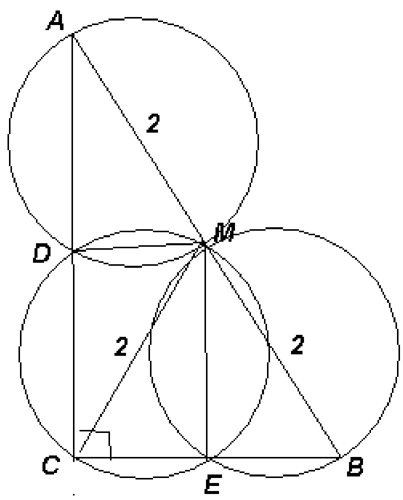


Рис. 2

2.3. На доске записаны числа 5 и 8. За один ход можно либо увеличить оба числа на 1, либо разделить на их общий натуральный делитель. Можно ли за несколько ходов добиться того, что на доске будут записаны числа 5 и 3?

Ответ: нельзя.

Решение. Первый способ. Изначально на доске было чётное число и нечётное. Прибавление единицы к каждому из чисел не меняет эту ситуацию: будет опять одно чётное и одно нечётное. Любой общий делитель чётного и нечётного числа является нечётным, поэтому при делении на него снова получится одно чётное число и одно нечётное. Таким образом, два нечётных числа получить не удастся.

Второй способ. При увеличении на 1 разность записанных чисел не изменяется, а при делении на их общий делитель разность между числами уменьшается в целое число раз. Вначале эта разность равна 3, следовательно, стать равной 2 она не может.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Крокодил переплыл реку за 6 минут. Он плыл перпендикулярно берегам, но течением его снесло на половину ширины реки. За какое время он сможет приплыть обратно в точку старта?

Ответ: за 10 минут.

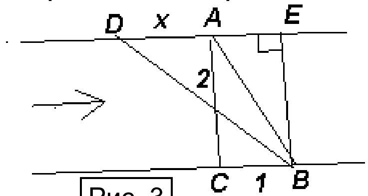


Рис. 3

Решение. Пусть A – точка старта, B – точка, в которую крокодил приплыл, C – точка, лежащая напротив A, в направлении которой он плыл (см. рис. 3). Будем считать, что $BC = 1$, тогда по условию $AC = 2$. Так как крокодила относит течением на половину расстояния, которое он собирается проплыть, то обратно он должен плыть в такую точку D, что $BD = 2AD$.

Пусть $AD = x$, тогда $BD = 2x$. Если E – точка, лежащая напротив B, то из прямоугольного треугольника BED получим: $BD^2 = BE^2 + DE^2$, то есть $4x^2 = 4 + (x + 1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 5 = 0$. Так как $x > 0$, то $x = \frac{5}{3}$. Значит, на обратный путь в точку A крокодил затратит $\frac{5}{3} \cdot 6 = 10$ минут.

3.2. На стороне AC равностороннего треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность вне треугольника. На этой полуокружности отмечены точки K и L, которые делят её на три равные дуги. Докажите, что точки пересечения BK и BL со стороной AC делят эту сторону на три равные части.

Решение. Пусть BK и BL пересекают AC в точках D и E соответственно (см. рис. 4 а, б). Тогда отрезки AD и CE равны, так как они симметричны относительно серединного перпендикуляра к AC. Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Из равенства дуг AK, KL и CL следует равенство стягивающих их хорд: $AK = KL = CL$, а также, что $KL \parallel AC$.

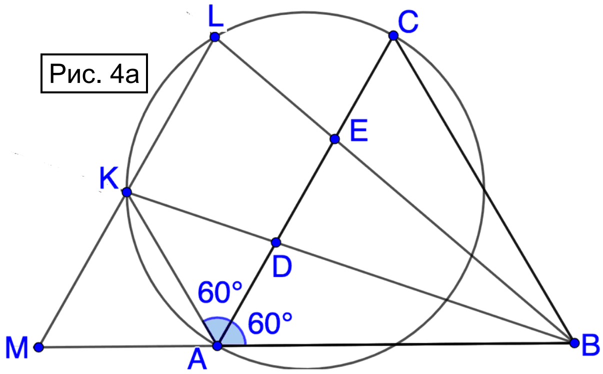


Рис. 4а

Продлим KL до пересечения с прямой AB в точке M (см. рис. 4а). Так как дуга CK составляет две трети от половины окружности, то её градусная мера равна 120°. Значит, $\angle KAC = 60° = \angle BAC$, тогда $\angle KAM = 60°$ и $\angle KMA = 60°$ (так как $KM \parallel AC$). Таким образом, треугольник MKA равносторонний, поэтому $KM = KA = KL$.

В трапеции $MLEA$ продолжения боковых сторон пересекаются в точке B, K – середина основания ML, поэтому D – середина основания AE, откуда $AD = DE$, что и требовалось.

<u>Второй способ</u>. Продолжим AK и CL до пересечения в точке P (см. рис. 4б). Так как точки K и L делят полуокружность на три равных дуги, то вписанные углы KAC и LCA равны по 60°, то есть треугольник APC равносторонний. AL и CK являются биссектрисами углов этого треугольника, поэтому являются и его медианами.

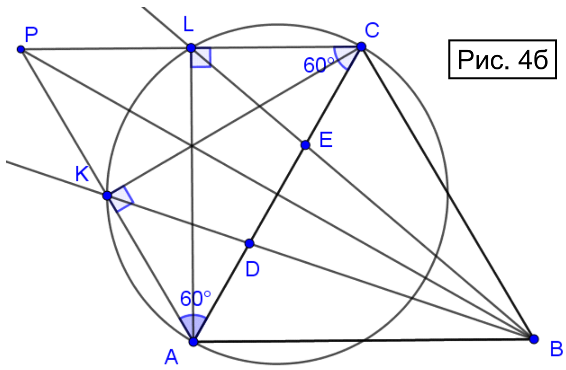


Рис. 4б

Четырехугольник $APCB$ составлен из двух равносторонних треугольников, значит, является ромбом, а его диагональ AC содержит медианы треугольников BCP и BAP. Таким образом, E и D – точки пересечения медиан треугольников BCP и BAP, откуда $AD = CE = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AC = \frac{1}{3} AC$.

3.3. В шахматном круговом турнире 8 участников, из которых четверо выходят в финал. Какое наименьшее количество очков гарантирует шахматисту выход в финал? *Каждый участник играет с каждым один раз, победа – 1 очко, ничья – 0,5, поражение – 0.*

Ответ: 5,5 очков.

Решение. Покажем, что 5 очков может не хватить для выхода в финал. Всего в турнире разыгрывается 7·8 : 2 = 28 очков. Тогда, например, возможна ситуация, когда 5 шахматистов набрали по 5 очков, а ещё три участника набрали по одному очку. Действительно, пусть каждый из пяти шахматистов, претендующих на выход в финал, выиграл все партии у трёх остальных, а все остальные партии закончились вничью.

Покажем теперь, что 5,5 очков заведомо достаточно для выхода в финал. Пусть это не так, тогда хотя бы по 5,5 очков должны набрать хотя бы пять участников, то есть в сумме они должны набрать не меньше, чем 5,5·5 = 27,5 очков. Тогда трое остальных должны набрать в сумме не более 0,5 очков, но это невозможно, так как только в матчах между собой они разыгрывают 3 очка.

Четвёртый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Представьте число 989·1001·1007 + 320 в виде произведения трёх натуральных множителей, каждый из которых больше 1.

Ответ: 989·1001·1007 + 320 = 991·997·1009.

Решение. Первый способ. Пусть 997 = t, тогда исходное выражение примет вид: $(t - 8)(t + 4)(t + 10) + 320 = (t^2 - 4t - 32)(t + 10) + 320 = t^3 + 6t^2 - 72t = t(t^2 + 6t - 72) = t(t - 6)(t + 12)$ = 997·991·1009.

Второй способ. Пусть 1009 = t, тогда исходное выражение примет вид: $(t - 20)(t - 8)(t - 2) + 320 = (t - 20)(t^2 - 10t + 16) + 320 = t^3 - 30t^2 + 216t = t(t^2 - 30t + 216) = t(t - 12)(t - 18)$ = 1009·997·991.

Третий способ. Пусть 991 = t, тогда исходное выражение примет вид: $(t - 2)(t + 10)(t + 16) + 320 = (t^2 + 8t - 20)(t + 16) + 320 = t^3 + 24t^2 + 108t = t(t^2 + 24t + 108) = t(t + 6)(t + 18)$ = 991·997·1009.

Идеи указанных замен возникают из таких соображений: после раскрытия скобок желательно получить кубический многочлен, у которого свободный член равен нулю. Заметим, что 1001 – 989 = 12, 1007 – 1001 = 6. Значит, число –320 надо записать в виде произведения трёх целых множителей так, чтобы разность между вторым и первым была 12, а между третьим и вторым равнялась 6: $-320 = -2^6 \cdot 5 = (-2)\cdot 10\cdot 16 = (-8)\cdot 4\cdot 10 = (-20)\cdot(-8)\cdot(-2)$. *Это и подсказывает удобные замены.*

Четвёртый способ. Пусть 999 = t, тогда исходное выражение примет вид: $(t - 10)(t + 2)(t + 8) + 320 = (t - 10)(t^2 + 10t + 16) + 320 = t^3 - 84t + 160 = (t^3 - 4t) - (80t - 160) = t(t - 2)(t + 2) - 80(t - 2) = (t - 2)(t^2 + 2t - 80) = (t - 2)(t - 8)(t + 10)$ = 997·991·1009.

Идея этой замены: 999 является средним арифметическим чисел 989, 1001 и 1007, что позволяет после раскрытия скобок получить многочлен с коэффициентом 0 перед t^2.

Возможны и другие замены, но они приводят к более громоздким преобразованиям.

Отметим также, что все три получившихся множителя являются простыми числами.

4.2. Через точку M, лежащую внутри окружности и отличную от её центра, проведены три хорды так, что угол между каждыми двумя соседними равен 60°. Образовалось шесть отрезков, у которых один конец лежит на окружности, а другой – в точке M. Докажите, что сумма длин трёх отрезков, взятых через один, равна сумме длин других трёх отрезков.

Решение. Пусть через точку M проведены указанным образом хорды AD, BE и CF (см. рис. 5). Из центра O окружности опустим перпендикуляры OK, OL и OP на AD, BE и CF соответственно. Тогда точки K, L и P – середины соответствующих хорд и лежат на окружности с диаметром OM.

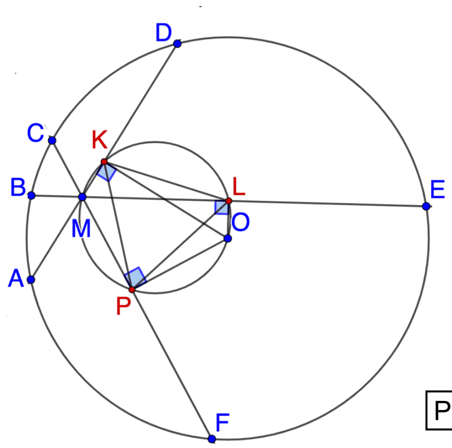


Рис. 5

По свойству углов, вписанных в окружность, $\angle PKL = \angle PML = 60°$ и $\angle KPL = \angle KML = 60°$, значит, треугольник PKL равносторонний. По теореме Помпею $ML = MK + MP$.

Докажем теперь, что одна из двух сумм в условии равна полусумме длин хорд AD, BE и CF. Тогда вторая сумма также будет равна этой же величине, откуда и будет следовать утверждение задачи. Действительно, $AM + CM + EM = AK – MK + CP – MP + EL + ML = AK + CP + EL = 0{,}5(AD + BE + CF)$.

4.3. На клетчатой плоскости отметили 14 клеток. Обязательно ли найдётся клетчатый прямоугольник, содержащий ровно 7 отмеченных клеток?

Ответ: не обязательно.

Решение. Пример – см. рис. 6: отмечены все граничные клетки квадрата 5×5, кроме двух – получаются два уголка из семи клеток.

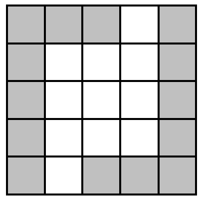


Рис. 6

Рассмотрим произвольный клетчатый прямоугольник. Возможны два случая.

1) Прямоугольник содержит клетки только одной стороны квадрата или двух. Тогда либо это две противоположные стороны, на каждой из которых не более трёх отмеченных клеток, либо две соседние, на которых не более пяти отмеченных клеток и одна общая угловая. Следовательно, прямоугольник содержит не более шести отмеченных клеток.

2) Прямоугольник содержит клетки трёх сторон квадрата. Если он содержит клетки обеих вертикальных сторон, то в нём чётное число отмеченных клеток, а если клетки обеих горизонтальных сторон, то в него попадает либо неполный уголок, либо один полный уголок и клетки второго уголка.

Таким образом, нет прямоугольника, содержащего ровно семь отмеченных клеток.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. Докажите, что для любых x и y из интервала (0; 1) выполняется неравенство $\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}<1$.

Решение. Первый способ. Так как $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$, то $\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x} < \frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+x} = 1$, что и требовалось.

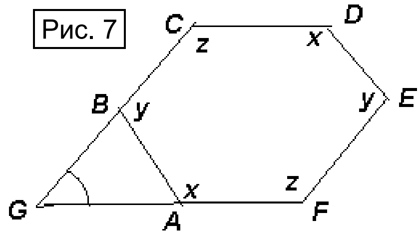
Второй способ. Умножим обе части доказываемого неравенства на $(1 + x)(1 + y) > 0$. Тогда $\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}<1 \Leftrightarrow x(1+x)+y(1+y)<1+x+y+xy \Leftrightarrow x^2-xy+y^2<1 \Leftrightarrow \frac{x^3+y^3}{x+y}<1$.

Последнее неравенство выполняется, так как при $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$ справедливы неравенства $x^3 < x$ и $y^3 < y$.

Получив неравенство $x^2 – xy + y^2 < 1$, можно также рассмотреть квадратичную функцию $f(x) = x^2 – yx + y^2 – 1$. Так как «ветви» её графика направлены вверх, $f(0) = y^2 – 1 < 0$ и $f(1) = y(y – 1) < 0$, если $0 < y < 1$, то при всех $x \in (0; 1)$ $f(x) < 0$. Отсюда следует справедливость требуемого неравенства.

5.2. В выпуклом шестиугольнике равны три пары противолежащих углов. Верно ли, что в нём есть параллельные стороны?

Ответ: верно.



Решение. Пусть в шестиугольнике $ABCDEF$: $\angle A = \angle D = x$, $\angle B = \angle E = y$, $\angle C = \angle F = z$. Так как сумма углов шестиугольника равна 720°, то $x + y + z = 360°$.

Продлим, например, сторону BC до пересечения с прямой AF в точке G и выразим угол AGB (см. рис. 7). В треугольнике AGB внешние углы при вершинах A и B равны x и y, поэтому внешний угол при вершине G равен $360° - (x + y) = z$. Следовательно, $\angle AGB = 180° - z$. Таким образом, сумма внутренних односторонних углов при прямых AF и CD и секущей CG равна 180°, значит, $AF \parallel CD$.

Аналогично доказывается параллельность двух других пар противолежащих сторон, то есть в таком шестиугольнике противолежащие стороны попарно параллельны.

5.3. Поверхность куба полностью окрашена. Его распилили на несколько одинаковых кубиков. Оказалось, что количество вовсе неокрашенных кубиков равно количеству кубиков, у которых окрашена ровно одна грань. На какое количество кубиков был распилен куб?

Ответ: На 512 кубиков.

Решение. Будем считать, что куб распилен на единичные кубики. Неокрашенные кубики не примыкают к поверхности куба и образуют куб, длину ребра которого обозначим через n. Кубики, у которых окрашена ровно одна грань, примыкают к поверхности, но не к рёбрам куба, и их окрашенные грани образуют шесть квадратов со стороной n. Тогда неокрашенных кубиков n^3, а содержащих ровно одну окрашенную грань – $6n^2$. По условию $n^3 = 6n^2$, откуда $n = 0$ или $n = 6$, а исходный куб имеет размеры $2\times2\times2$ или $8\times8\times8$ соответственно.