Математическая регата
28.02.2026
10 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Решите уравнение: $(x^2 + x + 1)^2 = 3(x^4 + x^2 + 1)$.

Ответ: 1.

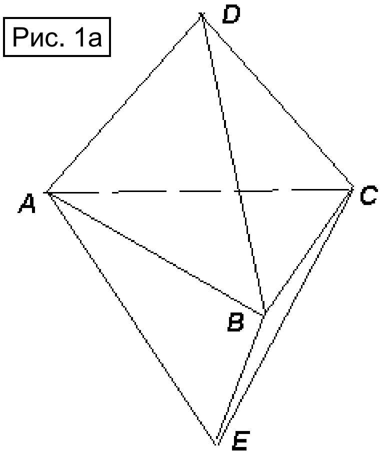
Решение. Заметим, что $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. Так как $x^2 + x + 1 > 0$ при любых значениях x, то разделив на это выражение обе части уравнения, получим: $x^2 + x + 1 = 3(x^2 - x + 1) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

1.2. Существует ли многогранник с пятью вершинами, у которого столько же граней, сколько у куба?

Ответ: существует.

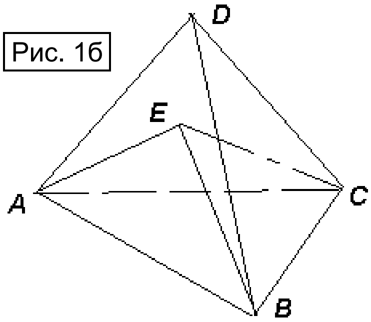
Решение. Например, рассмотрим выпуклый многогранник $DABCE$, который является объединением двух правильных треугольных пирамид с основанием ABC, не обязательно равных (см. рис. 1а). Так как все двугранные углы при ребрах основания острые, то никакие две грани этих пирамид не лежат в одной плоскости. Таким образом, у этого многогранника 5 вершин и 6 граней (как и у куба).

Рис. 1а



Существуют и другие примеры, в частности, искомый многогранник может быть и невыпуклым, если вершина E лежит внутри пирамиды DABC (см. рис. 1б).

Рис. 1б



1.3. Решите уравнение: $n! = n^3 - n$.

Ответ: 5.

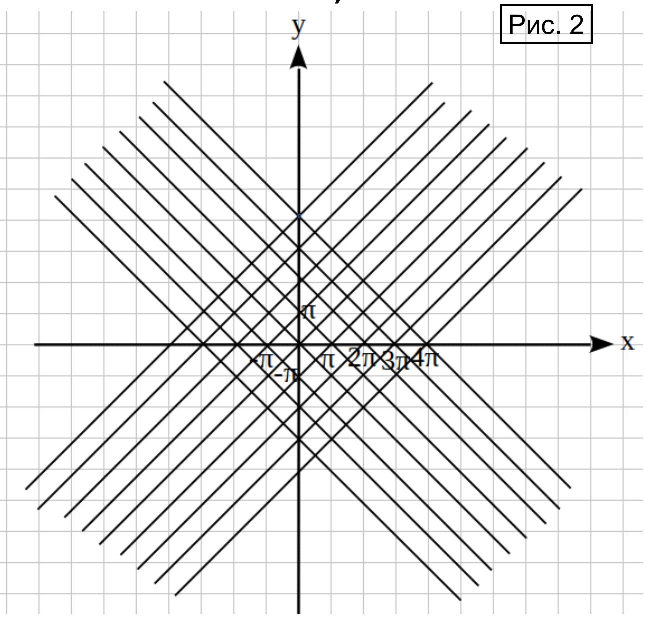
Решение. Разложим на множители правую часть уравнения, тогда оно примет вид: $n! = (n - 1)n(n + 1)$. Понятно, что $n > 1$, поэтому разделив обе части уравнения на $(n - 1)n$, получим: $(n - 2)! = n + 1$. Подстановкой убеждаемся, что $n = 2$; 3; 4 не являются корнями этого уравнения, а $n = 5$ – его корень. Других корней нет, так как при дальнейшем увеличении n на единицу левая часть уравнения увеличивается не меньше, чем в 4 раза, а правая – только на 1, значит, при $n > 5$ левая часть всегда больше правой.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Изобразите на плоскости множество точек, координаты (x; y) которых удовлетворяют уравнению: $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$.

Ответ: см. рис. 2 (семейство прямых вида $y = \pm x + \pi k$, где $k \in Z$).

Рис. 2



Решение. <u>Первый способ</u>. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \sin^2 y \Leftrightarrow (\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y) = 0 \Leftrightarrow$
$$4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\sin(x + y)\sin(x - y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = \pi m, \\ x - y = \pi n, \end{array}\right. \{m, n\} \subset Z \Leftrightarrow$$
$y = \pm x + \pi k$, где $k \in Z$.

<u>Второй способ</u>. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \sin^2 y \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\sin^2 y \Leftrightarrow \cos 2x = \cos 2y$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y = 2x + 2\pi m, \\ 2y = -2x + 2\pi n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x + \pi m, \\ y = -x + \pi n, \end{array}\right.$ $\{m, n\} \subset Z \Leftrightarrow$ $y = \pm x + \pi k$, где $k \in Z$.

Также можно привести исходное уравнение к виду |sinx| = |siny|, после чего записать условия равенства и противоположности синусов, используя, например, единичную окружность.

2.2. Через точку *K*, лежащую внутри трапеции *ABCD*, проведена прямая, пересекающая основания *BC* и *AD* в точках *P* и *Q* соответственно. Пусть окружности, описанные около треугольников *BPK* и *DQK*, пересекаются, кроме точки *K*, ещё и в точке *L*. Докажите, что точка *L* лежит на диагонали *BD*.

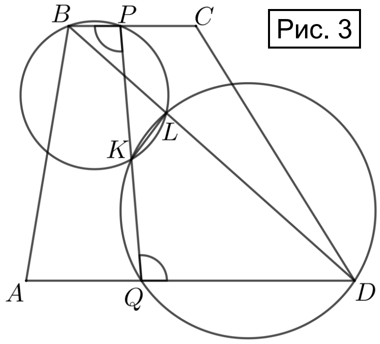


Рис. 3

Решение. Точки *B* и *D* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *PQ*. Точка *L* не лежит на прямой *PQ*, значит, она окажется в одной полуплоскости либо с *B*, либо с *D*. Пусть она оказалась в одной полуплоскости с точкой *D* (см. рис. 3, второй случай рассматривается аналогично).

Используя свойство углов, вписанных в окружность, и параллельность *BC* и *AD*, получим: $\angle BLK = \angle BPQ = \angle DQP$. Кроме того, четырёхугольник *DLKQ* вписанный, поэтому $\angle DLK = 180^\circ - \angle DQP$. Таким образом, $\angle BLK + \angle DLK = 180^\circ$, а это и означает, что точка *L* лежит на *BD*.

2.3. В стране десять аэропортов, из каждого есть прямые рейсы ровно в три других аэропорта. Может ли оказаться так, что из каждого аэропорта можно долететь до любого другого не более чем с одной пересадкой?

Ответ: может.

Решение. Пример требуемой схемы аэропортов и перелётов между ними – см. рис. 4.

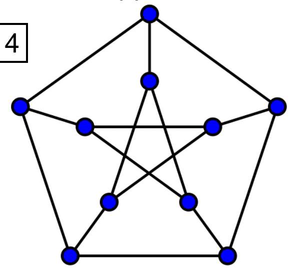


Рис. 4

Такой граф называется графом Петерсена. Построить такой пример можно, исходя из следующих соображений. Выберем любой аэропорт. Из него напрямую можно попасть в три других, а с одной пересадкой не более, чем в 3·2 = 6 аэропортов, так как каждый из этих трёх напрямую соединен еще с двумя. Следовательно, все эти шесть аэропортов различны, и каждый из них надо соединить с какими-то двумя из остальных. Сделать это так, чтобы условие задачи было выполнено, можно единственным способом (с точностью до перестановки аэропортов).

Из этого рассуждения также следует, что более десяти аэропортов не могут удовлетворять условию задачи. Действительно, любой аэропорт соединён прямыми рейсами с тремя аэропортами, а рейсами с одной пересадкой – ещё не более, чем с шестью. Таким образом, из него можно долететь не более, чем до девяти аэропортов, делая не более одной пересадки.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Известно, что графики функций $y = 2x^2 - 2x - 1$ и $y = -5x^2 + 2x + 3$ пересекаются в двух точках. Найдите уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Ответ: $6x + 7y - 1 = 0$.

Решение. Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ – точки пересечения данных графиков. Тогда пары чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ являются решениями системы уравнений $\begin{cases} y = 2x^2 - 2x - 1, \\ y = -5x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 5y = 10x^2 - 10x - 5, \\ 2y = -10x^2 + 4x + 6 \end{cases}$. Но эти пары являются решением и любого следствия из полученной системы, в частности, они являются решением уравнения, полученного при сложении уравнений системы: $7y = -6x + 1 \Leftrightarrow 6x + 7y - 1 = 0$.

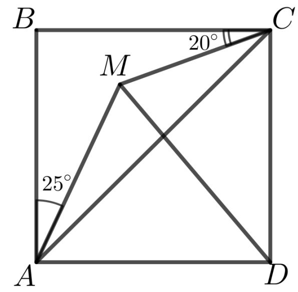
Так как через точки A и B проходит единственная прямая, то полученное уравнение является искомым. При желании его можно записать в стандартном виде уравнения линейной функции: $y=-\frac{6}{7}x+\frac{1}{7}$.

Попытка решить эту задачу «в лоб» приводит к очень громоздким преобразованиям, так как обе точки пересечения данных парабол имеют иррациональные координаты.

3.2. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M так, что угол MAB равен 25°, а угол MCB равен 20°. Найдите угол MDA.

Ответ: 50°.

Рис. 5



Решение. Из условия следует, что $\angle MAD$ = 65°, $\angle MCD$ = 70°, тогда $\angle AMC$ = 135° (см. рис. 5). Рассмотрим окружность с центром в точке D и радиусом $DA = DC$. Так как любой вписанный в неё угол, опирающийся на дугу AC, равен 45°, то сумма такого угла и угла AMC равна 180°. Следовательно, точка M лежит на этой окружности. Тогда $\angle MDA = 2\angle MCA$ = 50°.

3.3. Доступ к сейфу имеют семь членов комиссии. Требуется установить несколько кодовых замков на сейфе и сообщить каждому члену комиссии коды от некоторых из них так, чтобы любые четыре члена комиссии, собравшись вместе, смогли открыть сейф, а никакие трое вместе не смогли бы этого сделать. Каким наименьшим количеством замков следует снабдить сейф?

Ответ: 35 замками.

Решение. Для каждых трёх членов комиссии должен быть замок, код которого не знает ни один из них. При этом каждый из остальных четверых этот код должен знать, иначе найдутся уже четыре человека, которые код не знают, и сейф открыть не смогут. Таким образом, каждой тройке человек можно поставить в соответствие один из замков, причём различным тройкам должны соответствовать различные замки, поэтому всего замков должно быть не меньше, чем C_7^3 = $\frac{7!}{3!\cdot 4!}$ = 35. С другой стороны, если для каждой тройки членов комиссии найдётся ровно один такой замок, то условие задачи будет выполнено.

Четвёртый тур (*20 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\frac{3x-y}{x-3y}=x^2,\\ \frac{3y-z}{y-3z}=y^2,\\ \frac{3z-x}{z-3x}=z^2\end{cases}$.

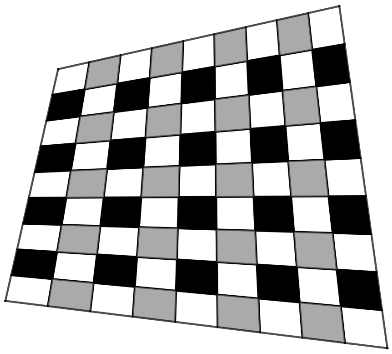
Ответ: $\{(\mathrm{tg}A;\mathrm{tg}3A;\mathrm{tg}9A)\}$, где $A=\frac{\pi s}{26}$, $s\in Z$, $-12\le s\le 12$, $s\ne 0$.

Решение. Из условия следует, что $x \ne 3y$, $y \ne 3z$, $z \ne 3x$. Тогда исходную систему можно записать так: $\begin{cases}3x-y=x^2(x-3y),\\ 3y-z=y^2(y-3z),\\ 3z-x=z^2(z-3x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-y=x^3-3x^2y,\\ 3y-z=y^3-3y^2z,\\ 3z-x=z^3-3z^2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y(3x^2-1)=x^3-3x,\\ z(3y^2-1)=y^3-3y,\\ x(3z^2-1)=z^3-3z,\end{cases}$.

Заметим, что $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ решениями системы не являются, поэтому

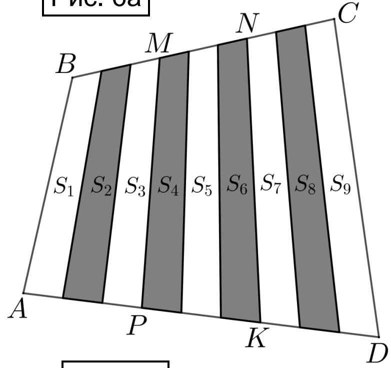
$\begin{cases} y = \dfrac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1}, \\ z = \dfrac{y^3 - 3y}{3y^2 - 1}, \\ x = \dfrac{z^3 - 3z}{3z^2 - 1}, \end{cases}$ Обозначим: $x = \mathrm{tg}A$, $A \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. С учетом формулы тангенса тройного аргумента, получим: $y = \mathrm{tg}3A$, $z = \mathrm{tg}9A$, $x = \mathrm{tg}27A$. Следовательно, $\mathrm{tg}A = \mathrm{tg}27A$, откуда $\frac{\sin 26A}{\cos A \cos 27A} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 26A = 0, \\ \cos A \neq 0, \cos 27A \neq 0 \end{cases}$. Значит, решениями исходной системы должны являться тройки чисел $(\mathrm{tg}A; \mathrm{tg}3A; \mathrm{tg}9A)$, где $A = \frac{\pi s}{26}$, $s \in Z$, $-12 \le s \le 12$. Но из ограничений, указанных в начале решения, следует, что $s \neq 0$ (иначе A = 0, а тройка (0; 0; 0) решением не является). На остальные решения указанные ограничения не влияют.

4.2. Каждую сторону выпуклого четырехугольника разделили на 9 равных частей, провели отрезки и раскрасили так, как показано на рисунке. Докажите, что равны суммы площадей чёрных и серых частей.



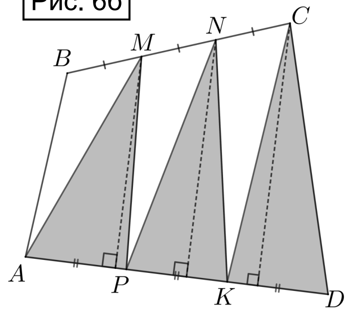
Решение. Сначала разделим на 9 равных частей каждую из двух противолежащих сторон выпуклого четырехугольника *ABCD* площади *S*, соединим отрезками соответствующие точки деления и пронумеруем получившиеся четырехугольники от числами от 1 до 9 (см. рис. 6а). Докажем, что сумма площадей четырехугольников с четными номерами равна $\frac{4}{9}S$.

Рис. 6а



Для этого отметим на его сторонах *BC* и *AD* точки *M*, *N*, *P* и *K* так, что *BM* = *MN* = *NC* и *AP* = *PK* = *KD* и рассмотрим треугольники *AMP*, *PNK* и *KCD* (см. рис. 6б). У них равные основания, а соответствующие их высоты – это расстояния от точек *M*, *N* и *C* до прямой *AD*. Так как *N* – середина отрезка *MC*, то расстояние от неё до *AD* равно полусумме расстояний до *AD* от точек *M* и *C*. Следовательно, $S_{PNK} = 0{,}5(S_{AMP} + S_{KCD})$. Аналогично: $S_{MPN} = 0{,}5(S_{BAM} + S_{NKC})$. Сложив эти равенства, получим: $S_{PMNK} = 0{,}5(S_{ABMP} + S_{KNCD})$, то есть площадь центрального четырехугольника *PMNK* равна $\frac{1}{3}S$, а сумма площадей двух крайних четырёхугольников равна $\frac{2}{3}S$.

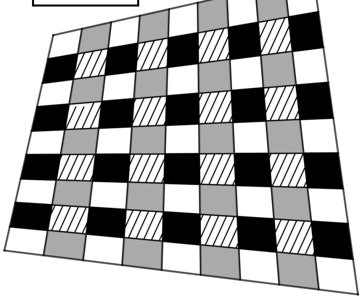
Рис. 6б



Теперь вернёмся к рис. 6а. Четырехугольники с номерами 2 и 8 являются центральными в четырехугольниках *ABMP* и *KNCD*, значит, по доказанному выше, $S_2 + S_8 = \frac{1}{3}(S_{ABMP} + S_{KNCD}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}S = \frac{2}{9}S$. Четырехугольники с номерами 4 и 6 являются крайними в четырехугольнике *PMNK*, значит $S_4 + S_6 = \frac{2}{3}S_{PMNK} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}S = \frac{2}{9}S$.

Таким образом $S_2 + S_4 + S_6 + S_8 = \frac{4}{9}S$.

Рис. 6в



Вернёмся к исходной задаче: заштрихуем те четырехугольники, которые не были закрашены и которые окружены двумя чёрными и двумя серыми (см. рис. 6в). Объединение заштрихованных и серых четырехугольников – это четыре четырехугольника из доказанного утверждения, сформулированного вначале, поэтому сумма их площадей равна $\frac{4}{9}S$. Но и сумма площадей черных и заштрихованных четырёхугольников также составляет $\frac{4}{9}S$, что следует из аналогичных рассуждений. Значит, сумма площадей чёрных частей равна сумме площадей серых, что и требовалось.

Отметим, что если разделить каждую из двух противолежащих сторон выпуклого четырехугольника на n равных частей и соединить отрезками соответствующие точки деления, то площади получившихся «полосок» образуют арифметическую прогрессию.

4.3. Есть несколько шаров разного цвета и размера, на каждом из которых записано положительное число. Каждое утро от каждого числа на шаре отнимают среднее арифметическое чисел на шарах того же цвета, а каждый вечер – среднее арифметическое чисел на шарах того же размера (в обоих случаях число на самом шаре также учитывается при подсчёте среднего). Докажите, что наступит утро, в которое все числа изменятся не более чем на единицу.

Решение. Рассмотрим произвольный набор из n чисел a_1, a_2, …, a_n, пусть s – их среднее арифметическое. Посмотрим, как меняется сумма квадратов этих чисел, если каждое из них уменьшить на s: $\sum_{i=1}^{n}(a_i - s)^2 = \sum_{i=1}^{n}a_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}a_i s + ns^2 = \sum_{i=1}^{n}a_i^2 - 2ns^2 + ns^2 = \sum_{i=1}^{n}a_i^2 - ns^2$. Таким образом, сумма квадратов уменьшается на неотрицательное число ns^2.

Предположим, что каждое утро числа на шарах хотя бы одного цвета меняются более чем на 1. Тогда сумма квадратов всех чисел по утрам уменьшается более чем на 1, а по вечерам не увеличивается. Но в таком случае через несколько дней сумма квадратов чисел на всех шарах станет отрицательной, чего быть не может. Противоречие.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

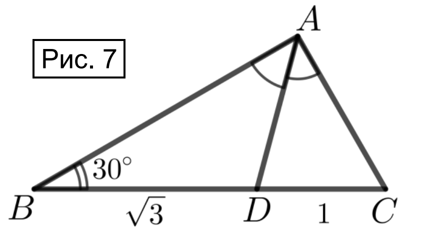
5.1. Найдите все пары (x; y) действительных чисел, удовлетворяющие равенству: $\frac{x^2 + y^2 + 1}{y + \sqrt{3}} = x$.

Ответ: $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = x\left(y + \sqrt{3}\right), \\ y \neq -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2 - x\left(y + \sqrt{3}\right) + y^2 + 1 = 0 \\ y \neq -\sqrt{3} \end{cases}$. Рассмотрим полученное уравнение как квадратное относительно x. Тогда $D = \left(y + \sqrt{3}\right)^2 - 4y^2 - 4 = -3y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 = -\left(\sqrt{3}y - 1\right)^2 \geq 0$ тогда и только тогда, когда $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$. В этом случае, $x = \frac{y + \sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

5.2. Основание *D* биссектрисы треугольника *ABC* делит сторону *BC* на отрезки *BD* = $\sqrt{3}$ и *CD* = 1. Угол *ABC* равен 30°. Найдите *AC*.

Рис. 7



Ответ. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ или $\sqrt{3}+1$.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника *BA* : *AC* = *BD* : *DC* = $\sqrt{3}:1$ (см. рис. 7). Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. По теореме синусов для треугольника *ABC*: $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$,

откуда $\sin\angle ACB=\frac{AB\cdot\sin\angle ABC}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда угол *ACB* равен 60° или 120°. В первом

случае, $\angle$*BAC* = 90°, поэтому *AC* = 0,5*BC* = $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Во втором случае, $\angle$*BAC* = 30°, поэтому *AC* = *BC* = $\sqrt{3}+1$.

<u>Второй способ</u>. Пусть *BC* = *a*, *AC* = *b*, тогда *AB* = $b\sqrt{3}$. По теореме косинусов для треугольника *ABC*: $b^2=a^2+3b^2-2\sqrt{3}ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 2b^2-3ab+a^2=0$, откуда *b* = *a* или *b* = 0,5*a*. Так как $a=BD+DC=\sqrt{3}+1$, то получим те же два возможных ответа.

При желании можно обойтись как без теоремы синусов, так и без теоремы косинусов, проведя равные перпендикуляры из точки D к AB и AC. Но тогда придётся рассматривать два случая по отдельности, так как основание перпендикуляра, опущенного из D на AC попадёт либо на сторону, если угол C острый, либо на продолжение стороны, если этот угол тупой.

5.3. Найдите все тройки (*x*; *y*; *z*) целых чисел, для которых $2^x + 4^y + 8^z = 328$.

Ответ: (3; 4; 2), (6; 4; 1), (8; 3; 1).

Решение. Перепишем уравнение в виде: $2^x + 2^{2y} + 2^{3z} = 2^3 + 2^6 + 2^8$. Каждое натуральное число единственным образом представимо в виде суммы различных степеней двойки (это следует из двоичной записи числа). Учитывая, что в обеих частях уравнения поровну слагаемых, а также учитывая, что число 2*y* чётное, а число 3*z* делится на 3, получим три возможных случая:

1) *x* = 3, 2*y* = 8, 3*z* = 6. Тогда *y* = 4, *z* = 2.
2) *x* = 6, 2*y* = 8, 3*z* = 3. Тогда *y* = 4, *z* = 1.
3) *x* = 8, 2*y* = 6, 3*z* = 3. Тогда *y* = 3, *z* = 1.