7 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Сравните, не используя калькулятор: $926174 \cdot 295183$ и $926173 \cdot 295184$.

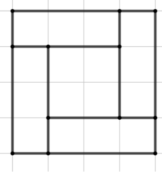
Ответ: первое произведение меньше.

Решение. Обозначим: $926173 = a$, $295183 = b$. Тогда требуется сравнить: $(a + 1)b$ и $a(b + 1)$. Так как $(a + 1)b - a(b + 1) = b - a < 0$, то $926174 \cdot 295183 < 926173 \cdot 295184$.

1.2. Можно ли разбить квадрат на 5 прямоугольников (не обязательно одинаковых) так, чтобы периметр каждого прямоугольника был равен полупериметру квадрата?

Ответ: можно.

Рис. 1



Решение. Например, рассмотрим клетчатый квадрат размером 4×4 единичные клетки. Его можно разбить на 4 прямоугольника размером 3×1 и квадрат размером 2×2 (см. рис. 1). Периметр каждой фигуры разбиения равен 8, что составляет половину периметра исходного квадрата.

1.3. Знайка записал на доске 7 последовательных натуральных чисел. Незнайка стёр одно из чисел. Оказалось, что сумма оставшихся чисел равна 2026. Какое число стёр Незнайка?

Ответ: 340.

Решение. Обозначим через n четвёртое по счёту число, записанное Знайкой, тогда сумма записанных чисел равна $(n - 3) + (n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 7n$. Пусть Незнайка стёр число $n + k$, где k – целое число, $-3 \le k \le 3$. Тогда из условия следует, что $7n = 2026 + n + k \Leftrightarrow 6n = 2026 + k$.

Правая часть полученного равенства должна делиться на 6. Из всех указанных значений k этому условию удовлетворяет только $k = 2$. Тогда $n = 338$, а стёрто число $n + 2 = 340$.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Костя, Слава и Юра гуляют по парку. Пока Слава делает 3 шага, Юра делает 4 шага, а пока Юра делает 3 шага, Костя делает 5 шагов. Сколько шагов сделал Юра, если все втроём сделали в общей сложности 2460 шагов?

Ответ: 720 шагов.

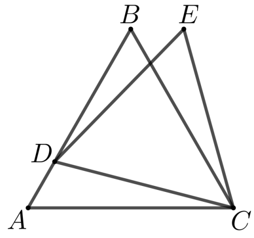
Решение. 1) Из условия: «Пока Слава делает 3 шага, Юра делает 4 шага» следует, что пока Слава делает 9 шагов, Юра делает 12 шагов.

2) Из условия «Пока Юра делает 3 шага, Костя делает 5 шагов» следует, что пока Юра делает 12 шагов, Костя делает 20 шагов.

3) Следовательно, за одно и то же фиксированное время Юра делает 12 шагов, Слава делает 9 шагов, а Костя делает 20 шагов. Значит, за это время они в сумме сделают $12 + 9 + 20 = 41$ шаг.

4) Так как втроём в общей сложности сделано 2460 шагов, то прошло в $2460 : 41 = 60$ раз больше времени, чем указано в пункте 3). Поэтому Юра за это время сделал $12 \cdot 60 = 720$ шагов.

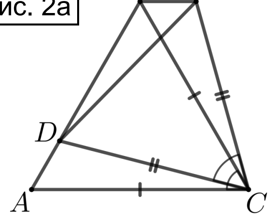
2.2. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что $BE \parallel AC$.



Решение. <u>Первый способ</u>. В треугольниках CAD и CBE: $CA = CB$, $CD = CE$ и $\angle ACD = \angle BCE$ (эти углы дополняют угол BCD до $60°$, см. рис. 2а). Следовательно, эти треугольники равны, тогда $\angle CBE = \angle DAC = 60° = \angle ACB$. Таким образом, равны накрест лежащие углы при прямых BE и AC и секущей BC, поэтому $BE \parallel AC$.

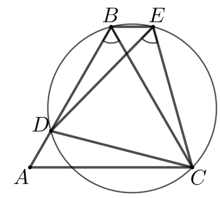
Отметим, что треугольник CBE может быть получен из треугольника CAD поворотом с центром C по часовой стрелке на угол 60°.

Рис. 2а



Второй способ. Так как $\angle DBC = 60° = \angle DEC$, а точки B и E лежат в одной полуплоскости относительно прямой CD, то B, E, C и D лежат на одной окружности (см. рис. 2б). Тогда вписанные углы CBE и CDE равны, то есть $\angle CBE = 60° = \angle ACB$, откуда и следует, что $BE \parallel AC$.

Рис. 2б



2.3. Можно ли так закрасить некоторые клетки в квадрате размером 6×6, чтобы из двадцати пяти квадратов размером 2×2 ровно в пятнадцати квадратах было закрашено нечётное количество клеток?

Ответ: можно.

Решение. Выделим в квадрате девять клеток, показанных на рис. 3. В каждой из них записано, скольким квадратам 2×2 она принадлежит, при этом никакие две выделенные клетки не принадлежат одному и тому же квадрату. Значит, чтобы получить ровно k квадратов 2×2, в которых закрашено нечётное количество клеток, достаточно закрасить несколько выделенных клеток, сумма чисел в которых равна k.

2		4		4	
2		4		4	
1		2		2	

Рис. 3

В частности, для $k = 15$ подходят клетки, в которых записаны такие суммы: $1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4$ или $1 + 2 + 4 + 4 + 4$. Исходя из этого, строится любой пример.

Третий тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

3.1. Найдите $\frac{y}{x}$, если $\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 = \frac{x^3+y^3}{2}$ и $x \neq 0$.

Ответ: ±1.

Решение. Первый способ. Преобразуем данное равенство: $\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 = \frac{x^3+y^3}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{8} = \frac{x^3+y^3}{2} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 4x^3 + 4y^3 \Leftrightarrow x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2(x - y) - y^2(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2(x + y) = 0 \Leftrightarrow y = x$ или $y = -x$. Значит, $\frac{y}{x} = 1$ или $\frac{y}{x} = -1$.

Второй способ. Пусть $\frac{y}{x} = t$, тогда $y = tx$ ($x \neq 0$). Данное равенство примет вид:

$\left(\frac{x+tx}{2}\right)^3 = \frac{x^3+t^3x^3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^3(1+t)^3}{8} - \frac{x^3(1+t)(1-t+t^2)}{2} = 0$. Разделим обе части равенства на x^3, избавимся от знаменателей и разложим на множители: $(1+t)(1+2t+t^2-4+4t-4t^2) = 0$

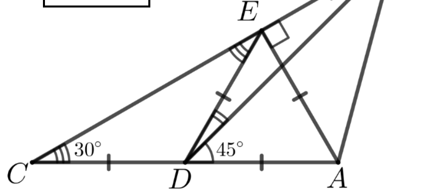
$\Leftrightarrow (1+t)(-3+6t-3t^2) = 0 \Leftrightarrow (1+t)(1-t)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm1$.

3.2. В треугольнике ABC проведена медиана BD. Найдите угол ABD, если $\angle ADB = 45°$, $\angle DBC = 15°$.

Ответ: 30°.

Решение. Из условия следует, что $\angle BCD = 30°$. Далее можно рассуждать по-разному.

Рис. 4а

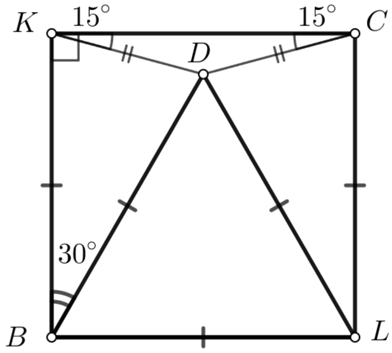


Первый способ. Отметим на стороне BC точку E так, что $\angle BDE = \angle DBC = 15°$ (см. рис. 4а). Тогда $\angle DEC = 30° = \angle BCD$. Значит, $BE = ED = CD = 0{,}5AC$. Так как медиана ED треугольника AEC равна половине стороны AC, то треугольник AEC прямоугольный, а его катет AE, лежащий напротив угла величиной 30°, равен половине гипотенузы AC.

Таким образом, $AE = 0{,}5AC = BE$, поэтому треугольник ABE – прямоугольный и равнобедренный, тогда $\angle ABC = 45°$, откуда $\angle ABD = 30°$.

Эту же идею решения можно реализовать иначе, проводя рассуждения в другом порядке: сначала провести высоту AE треугольника ABC, а затем, используя, что ED – медиана треугольника AEC, доказать равенство отрезков BE и DE. Но в этом случае надо отдельно обосновать, что основание E высоты AE лежит внутри стороны BC. Это действительно так: треугольник ADE равносторонний, значит, угол ADE, который равен 60°, должен быть больше угла ADB, который по условию равен 45°.

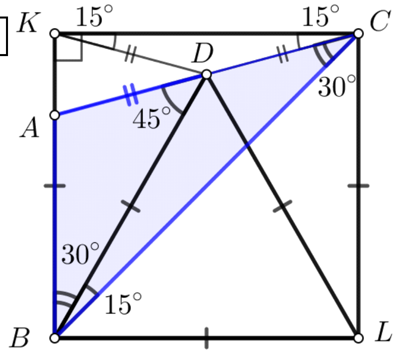
Рис. 4б



<u>Второй способ</u>. Решим задачу, используя «обратный ход». Для этого сначала найдём конструкцию, в которой есть треугольник, удовлетворяющий условию задачи.

Построим квадрат $BKCL$ и равносторонний треугольник BDL так, как показано на рис. 4б. В силу симметрии получим, что треугольник KCD – равнобедренный. Так как $\angle KBD = 30°$ и $BK = BD$, то $\angle BKD = 75°$, Значит, $\angle CKD = 15° = \angle KCD$. Проведём диагональ BC, тогда $\angle DCB = 30°$, а $\angle DBC = 15°$ (см. рис. 4в).

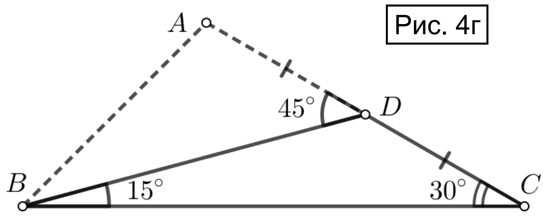
Рис. 4в



Проведём прямую CD до её пересечения со стороной BK в точке A. Покажем, что треугольник ABC – искомый. Действительно, в прямоугольном треугольнике AKC: $DK = DC$. Следовательно, D – середина его гипотенузы AC. В треугольнике ABC: BD – медиана и $\angle ADB = \angle DCB + \angle DBC = 45°$. Следовательно, треугольник ABC удовлетворяет условию задачи, а искомый угол ABD равен 30°.

Покажем, что такой треугольник – единственный. Действительно, построим треугольник BCD с фиксированной стороной BC и прилежащими к ней углами 15° и 30° (см. рис. 4г). Удвоим отрезок CD, продлив его за точку D. Треугольник ABC – единственный, удовлетворяющий условию задачи.

Рис. 4г



Более строгое обоснование единственности треугольника с заданными углами требует ссылки на подобие всех таких треугольников или на «жёсткость» треугольника, что наглядно понятно, но выходит за рамки программы 7 класса.

3.3. На доске записано натуральное число, кратное семи. Верно ли, что какое бы из таких чисел ни было записано, можно, приписав к нему справа некоторое количество девяток, получить составное число?

Ответ: верно.

Решение. Пусть на доске записано число N, кратное семи. Докажем, что, приписав к нему справа шесть девяток, мы получим составное число. Для этого достаточно убедиться, что число 999999 кратно семи. Это действительно так: $999999 = 999\cdot1001 = 999\cdot7\cdot11\cdot13$. Тогда, приписав справа к числу N шесть девяток, получим число $N\cdot10^6 + 999999$. Оно составное, так как каждое слагаемое делится на 7.

Отметим, что можно приписать справа любое количество девяток, кратное шести.

Четвертый тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

4.1. Существуют ли такие различные положительные числа a, b и c, что графики функций $y = ax + \frac{1}{b}$, $y = bx + \frac{1}{c}$ и $y = cx + \frac{1}{a}$ имеют общую точку?

Ответ: нет.

Решение. <u>Первый способ</u>. Найдём абсциссу точки пересечения первой и второй прямой: $ax+\frac{1}{b}=bx+\frac{1}{c} \Leftrightarrow (b-a)x=\frac{c-b}{bc} \Leftrightarrow x=\frac{c-b}{bc(b-a)}$, так как $a \neq b$. Аналогично находим абсциссу точки пересечения второй и третьей прямой: $bx+\frac{1}{c}=cx+\frac{1}{a} \Leftrightarrow (c-b)x=\frac{a-c}{ac} \Leftrightarrow$ $x=\frac{a-c}{ac(c-b)}$, так как $b \neq c$.

Так как данные в условии уравнения получаются друг из друга циклической перестановкой коэффициентов, то, не умаляя общности, достаточно рассмотреть два случая: $0 < a < b < c$ и $0 < a < c < b$. В первом случае $x=\frac{c-b}{bc(b-a)}>0$, а $x=\frac{a-c}{ac(c-b)}<0$. Во втором случае наоборот $x=\frac{c-b}{bc(b-a)}<0$, а $x=\frac{a-c}{ac(c-b)}>0$. Таким образом, точки пересечения указанных прямых не могут совпадать, поэтому общих точек у трёх заданных прямых нет.

<u>Второй способ</u>. Предположим, что три данные прямые имеют общую точку (x; y). Тогда $ax+\frac{1}{b}=bx+\frac{1}{c}=cx+\frac{1}{a}$, где a, b и c – различные числа, откуда $(a-b)x=\frac{b-c}{bc}$, $(b-c)x=\frac{c-a}{ca}$, $(c-a)x=\frac{a-b}{ab}$. Почленно перемножив эти три равенства, после сокращения получим: $x^3=\frac{1}{(abc)^2}>0$, откуда $x>0$. Если $a>b$, то из первого равенства следует, что $b>c$, то есть $a>b>c$. А если $b>a$, то из первого равенства следует, что $b<c$, то есть $c>b>a$. В обоих случаях второе и третье равенства выполняться не могут.

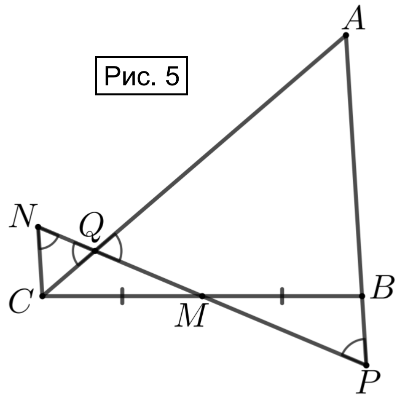
Таким образом, таких значений a, b и c не существует.

4.2. В треугольнике ABC через середину M стороны BC проведена прямая, которая пересекает сторону AC в точке Q, а продолжение стороны AB за точку B – в точке P. Докажите, что если $AP = AQ$, то $BP = CQ$.

Решение. На луче PM отметим точку N так, что $MN = MP$ (N симметрична P относительно M, см. рис. 5). Тогда треугольник MCN равен треугольнику MBP (по двум сторонам и углу между ними), значит, $\angle MNC = \angle MPB$.

С другой стороны, из условия $AP = AQ$ следует, что $\angle MPB = \angle MQA = \angle NQC$. Таким образом, $\angle QNC = \angle NQC$, поэтому $CQ = CN = BP$, что и требовалось.

Рис. 5



4.3. По кругу стоят 90 сказочных персонажей: эльфы, тролли и гоблины. Известно, что среди них ровно 25 пар стоящих рядом эльфов и троллей. Докажите, что найдутся какие-то два одноимённых персонажа, которые стоят рядом.

Решение. Пусть это не так, тогда есть три вида пар, стоящих рядом: 1) эльф и тролль; 2) эльф и гоблин; 3) тролль и гоблин. По условию пар первого вида ровно 25, поэтому остальные 65 – это пары второго или третьего вида. Заметим, что все гоблины учитываются в парах второго и третьего вида, при этом каждый из них учитывается там дважды, поэтому этих пар не может быть в сумме 65. Противоречие.

Следовательно, есть два одноимённых персонажа, стоящие рядом.