

Математическая регата

4.10.2025

9 класс

Первый тур (10 минут; каждая задача – 6 баллов)

1.1. Числитель и знаменатель дроби – натуральные числа. Числитель увеличили на 3, а знаменатель увеличили на 4. В результате получили дробь, равную $\frac{1}{3}$. Найдите исходную дробь, если известно, что сумма её числителя и знаменателя наименьшая из возможных.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Решение. Пусть $\frac{x}{y}$ – исходная дробь, тогда $\frac{x+3}{y+4} = \frac{1}{3}$. Так как x и y – натуральные

числа, то это уравнение равносильно уравнению $y = 3x + 5$. Полученное уравнение задаёт возрастающую линейную функцию, поэтому сумма $x + y$ наименьшая при наименьшем значении x . Таким образом, $x = 1$, $y = 8$.

1.2. Диагонали вписанного четырёхугольника перпендикулярны. Обязательно ли этот четырёхугольник имеет ось симметрии?

Ответ: не обязательно.

Решение. Проведём в окружности две взаимно перпендикулярные не равные хорды AC и BD , отличные от диаметров, которые пересекаются в точке H так, чтобы $AH \neq BH$ (см. рис. 1). Докажем, что четырёхугольник $ABCD$ – искомый.

Действительно, осью симметрии четырёхугольника может быть либо его диагональ, либо серединный перпендикуляр к противоположным сторонам. Первое не выполняется, так как по построению противоположные вершины не симметричны относительно диагоналей, а второе не выполняется, так как в $ABCD$ нет параллельных сторон (не равны дуги, стягиваемые противоположными сторонами).

Можно привести пример и с конкретными числовыми данными. Построим отрезок AC длины 5 и отметим на нём точку H так, что $AH = 2$, $CH = 3$ (см. рис. 1). Через точку H проведем прямую, перпендикулярную AC , и отметим на ней точку B на расстоянии 1 от точки H . Опишем окружность около треугольника ABC и обозначим через D вторую точку пересечения прямой BH и окружности. По теореме об отрезках хорд $AH \cdot CH = BH \cdot DH$, откуда $DH = 6$. По теореме Пифагора вычислим длины сторон $ABCD$: $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{10}$, $CD = \sqrt{45}$, $DA = \sqrt{40}$. Так как в четырёхугольнике $ABCD$ нет равных сторон, то у него нет и оси симметрии.

1.3. При каких натуральных значениях n верно равенство: $n! + 1 = (n + 1)^2$?

Ответ: при $n = 4$.

Решение. Преобразуем данное равенство: $n! + 1 = (n + 1)^2 \Leftrightarrow n! = (n + 1)^2 - 1 \Leftrightarrow n! = n(n + 2)$. Так как $n \neq 0$, то $(n - 1)! = n + 2$.

Перебором убеждаемся, что при $n < 4$ равенство не выполняется, а $n = 4$ является решением. Если $n > 4$, то правая часть меньше левой, так как при увеличении n на 1 правая часть увеличивается на 1, а левая умножается на натуральное число большее 1.

Второй тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов)

2.1. Для натуральных a , m и n числа $a + m$ и $a + n$ – квадраты двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что $a + mn$ – квадрат натурального числа.

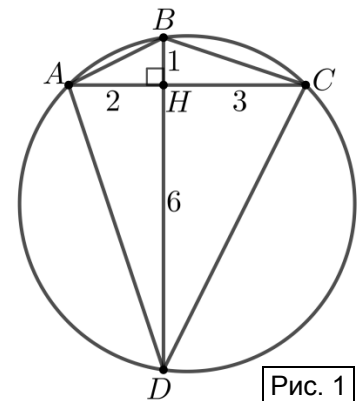


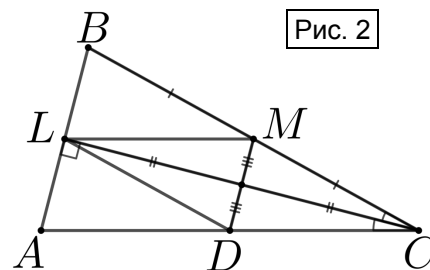
Рис. 1

Решение. По условию: $a + m = x^2$, $a + n = (x + 1)^2$, где x – натуральное число. Тогда $m = x^2 - a$, $n = (x + 1)^2 - a$. Значит, $a + mn = a + x^2(x + 1)^2 - a((x + 1)^2 + x^2) + a^2 = x^2(x + 1)^2 - 2ax(x + 1) + a^2 = (x^2 + x - a)^2$, что и требовалось, так как $a + mn \neq 0$.

2.2. В треугольнике ABC проведены медиана AM и биссектриса CL . Точка D лежит на стороне AC . Найдите AB , если известно, что середина биссектрисы CL является серединой отрезка DM , $AC = 10$ и $\cos \angle BAC = 0,25$.

Ответ: 5.

Решение. Так как отрезки CL и DM пересекаются в их общей середине, то четырехугольник $LMCD$ – параллелограмм, откуда $ML \parallel AC$ (см. рис. 2). Точка M – середина BC , значит, по теореме Фалеса L – середина AB . Тогда биссектриса CL треугольника ABC совпадает с его медианой, поэтому $AC = BC$. Значит, $CL \perp AB$.



Из прямоугольного треугольника ALC : $AL = AC \cdot \cos \angle BAC = 2,5$, тогда $AB = 2AL = 5$.

2.3. Дана доска размером 12×12 . В левом нижнем углу стоят 9 шашек, образуя квадрат размером 3×3 . За один ход можно выбрать какие-то две шашки и переставить одну из них симметрично относительно другой (не выходя при этом за пределы доски). Можно ли за несколько ходов переместить все шашки, так, чтобы они образовали квадрат в правом нижнем углу?

Ответ: нельзя.

Решение. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. Пусть в левом нижнем квадрате 3×3 будет 5 чёрных и 4 белые клетки, тогда в правом нижнем квадрате 3×3 будет 5 белых и 4 чёрные клетки. Заметим, что любой указанный ход не меняет цвет клетки, на которой стоит шашка, поэтому требуемое перемещение шашек осуществить невозможно.

Возможны и другие варианты раскраски доски в два цвета, например, «матрасиком» (чередуется цвет вертикалей).

Третий тур (20 минут; каждая задача – 8 баллов)

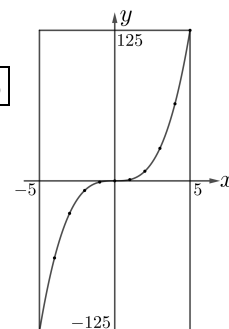
3.1. Сколько точек координатной плоскости, имеющих обе целые координаты, удовлетворяют условию:
$$\begin{cases} \max(25|x|; |y|) \leq 125, \\ y \leq x^3 \end{cases} ?$$

Ответ: 1386.

Решение. Первое неравенство выполняется, если

одновременно выполняются два условия: $-5 \leq x \leq 5$ и $-125 \leq y \leq 125$, то есть точки с обеими целыми координатами лежат на границе или внутри прямоугольника размером 250×10 (см. рис. 3). Количество таких точек равно $251 \cdot 11$.

Рис. 3



Кубическая парабола $y = x^3$ пересекает границы прямоугольника в противоположащих вершинах $(-5; -125)$ и $(5; 125)$. На ней лежат 11 целочисленных точек. Точки, лежащие ниже этого графика симметричны точкам, лежащим выше него относительно начала координат. Таким образом, количество целочисленных точек, удовлетворяющих системе, равно $\frac{251 \cdot 11 - 11}{2} + 11 = 11 \cdot 125 + 11 = 11 \cdot 126 = 1386$.

3.2. Через точку M пересечения медиан треугольника проведена прямая, пересекающая его стороны во внутренних точках K и L . Докажите, что $0,5 < \frac{MK}{ML} < 2$.

Решение. Пусть дан треугольник ABC , а прямая KL пересекает стороны AB и BC , AD и CE – медианы, M – точка их пересечения (см. рис. 3 а, б). Тогда точка K лежит внутри

отрезка AE , а точка L – внутри отрезка CD . Далее можно рассуждать по-разному, используя, что M делит каждую из медиан в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

Первый способ. Пусть F – середина AC , тогда DF и EF – средние линии треугольника ABC , параллельные AB и BC соответственно. Пусть также KL пересекает EF в точке X , а DF – в точке Y (см. рис. 4а).

По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{KM}{MY} = \frac{AM}{MD} = 2$, но $ML > MY$, поэтому $\frac{KM}{ML} < 2$. Аналогично $\frac{MX}{ML} = \frac{ME}{CM} = \frac{1}{2}$, а $KM > MX$, значит, $\frac{KM}{ML} > \frac{1}{2}$.

Вместо теоремы о пропорциональных отрезках можно сослаться на подобие двух пар треугольников: AMK и DMY , EMX и CML .

Второй способ. Проведём отрезок BM (см. рис. 4б). Так как у треугольников BKM и BLM общая высота, проведённая из вершины B , то $\frac{S_{BMK}}{S_{BML}} = \frac{MK}{ML}$. По свойству точки M : $\frac{S_{BME}}{S_{BMC}} = \frac{1}{2}$ и

$\frac{S_{BMA}}{S_{BMD}} = 2$. Точка K лежит на отрезке AE , значит, $S_{BME} < S_{BMK} < S_{BMA}$.

Аналогично $S_{BMD} < S_{BML} < S_{BMC}$. Следовательно, $\frac{1}{2} = \frac{S_{BME}}{S_{BMC}} < \frac{S_{BMK}}{S_{BML}} = \frac{MK}{ML} < \frac{S_{BMA}}{S_{BMD}} = 2$, что и требовалось.

3.3. Найдите все пары $(m; n)$ натуральных чисел, для которых $4(mn + 1)$ делится на $(m + n)^2$.

Ответ: $m = n = 1$ или любые натуральные m и n , отличающиеся на 2.

Решение. Первый способ. Так как $(m - n)^2 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + n^2 \geq 2mn \Leftrightarrow (m + n)^2 \geq 4mn$, то делимое превышает делитель не больше, чем на 4. Так как m и n – натуральные числа, то делитель не меньше, чем 4.

Если $(m + n)^2 = 4$, то условие может выполняться только, когда $4(mn + 1) = 8$. Оба равенства будут верными одновременно только, если $m = n = 1$.

Если же $(m + n)^2 > 4$, то $1 \leq \frac{4(mn + 1)}{(m + n)^2} < 2$, поэтому требуемое условие может выполняться только, когда $4(mn + 1) = (m + n)^2 \Leftrightarrow (m - n)^2 = 4 \Leftrightarrow |m - n| = 2$.

Второй способ. Из условия следует, что должно выполняться неравенство $4(mn + 1) \geq (m + n)^2 \Leftrightarrow (m - n)^2 \leq 4 \Leftrightarrow |m - n| \leq 2$. Так как числа m и n натуральные, то из этого следует, что $m = n$ или $|m - n| = 1$ или $|m - n| = 2$. Заметим, что рассматриваемые выражения симметричны относительно m и n , поэтому достаточно рассматривать каждый случай, считая, что $m \geq n$.

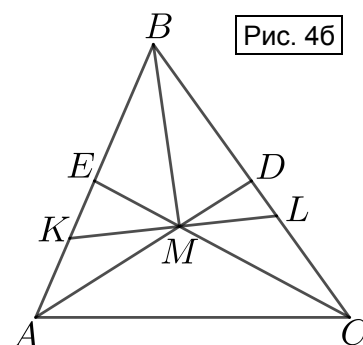
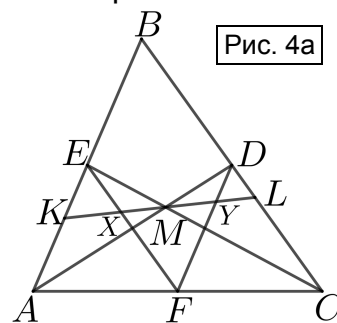
1) Если $m = n$, то $4n^2 + 4$ должно быть кратно $4n^2$. Это возможно только при $n = 1$.

2) Если $|m - n| = 1$, то $m = n + 1$. Тогда $4(n^2 + n + 1) = (2n + 1)^2 + 3$ должно быть кратно $(2n + 1)^2$, а это невозможно.

3) Если $|m - n| = 2$, то $m = n + 2$. Тогда $4(n^2 + 2n + 1) = 4(n + 1)^2$ должно быть кратно $(2n + 2)^2 = 4(n + 1)^2$. Это верно для всех натуральных n .

Четвёртый тур (25 минут; каждая задача – 9 баллов)

4.1. Автобус, едущий по маршруту длиной 100 км, снабжен компьютером, показывающим, сколько времени осталось до прибытия в конечный пункт. Это время рассчитывается исходя из предположения, что средняя скорость автобуса на оставшемся участке маршрута будет такой же, как и на уже пройденной его части. Спустя 40 минут после



начала движения ожидаемое время до прибытия составило 1 час и оставалось таким еще в течение пяти часов, поэтому водитель даже решил, что компьютер завис. Докажите, что такая ситуация все-таки возможна при работающем компьютере и найдите сколько километров проехал автобус за t часов такого движения, считая от времени старта автобуса ($\frac{2}{3} < t < 5\frac{2}{3}$).

Ответ: $\frac{100t}{1+t}$ км.

Решение. Пусть за t часов после начала движения автобус проехал s км. Тогда его средняя скорость на пройденной части маршрута равна $\frac{s}{t}$ (км/ч). По условию, двигаясь с такой скоростью, автобус за час пройдет $100 - s$ км, то есть $\frac{s}{t} = 100 - s$. Отсюда получим, что автобус должен двигаться по закону $s(t) = \frac{100t}{1+t}$. Так как $\frac{100t}{1+t} = \frac{(100t+100)-100}{1+t} = 100 - \frac{100}{t+1}$, то с увеличением t значение функции $s(t)$ увеличивается (при $t > 0$ функция возрастает). Поэтому движение по такому закону возможно.

4.2. AC – наименьшая сторона треугольника ABC . На сторонах AB и BC отмечены точки M и K соответственно так, что $AM = AC = CK$. Докажите, что отрезок MK перпендикулярен отрезку OI , соединяющему центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC .

Решение. Опустим перпендикуляры OC_1 , IC_2 , OA_1 , IA_2 на стороны AB и BC (см. рис. 5а). Тогда A_1 и C_1 – середины сторон, а A_2 и C_2 – точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AB соответственно.

Введём обозначения: $AB = c$, $BC = a$, $AC = AM = CK = b$, $IC_2 = IA_2 = r$, $OA = OB = OC = R$, полупериметр треугольника ABC равен p . Тогда $AC_1 = 0,5c$, $CA_1 = 0,5a$, откуда $MC_1 = |b - 0,5c|$ и $KA_1 = |b - 0,5a|$. Кроме того, $AC_2 = p - a$, $CA_2 = p - c$, откуда $MC_2 = b - (p - a) = 0,5(2b + 2a - a - b - c) = p - c$ и аналогично $KA_2 = b - (p - c) = p - a$. Далее можно рассуждать по-разному.

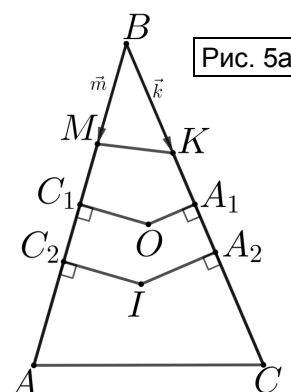
Первый способ. Воспользуемся тем, что геометрическим местом точек, для которых разность квадратов расстояний до концов данного отрезка постоянна, является прямая, перпендикулярная этому отрезку.

В нашем случае, $OM^2 = OC_1^2 + MC_1^2 = OA^2 - AC_1^2 + MC_1^2 = R^2 - (0,5c)^2 + (b - 0,5c)^2 = R^2 + b^2 - bc$; $OK^2 = OA_1^2 + KA_1^2 = OC^2 - CA_1^2 + KA_1^2 = R^2 - (0,5a)^2 + (b - 0,5a)^2 = R^2 + b^2 - ab$. Следовательно, $OM^2 - OK^2 = ab - bc$.

Вместе с тем, $IM^2 = IC_2^2 + MC_2^2 = r^2 + (p - c)^2$; $IK^2 = IA_2^2 + KA_2^2 = r^2 + (p - a)^2$. Следовательно, $IM^2 - IK^2 = (p - c)^2 - (p - a)^2 = (p - c - p + a)(p - c + p - a) = (a - c)b = ab - bc$.

Таким образом, $OM^2 - OK^2 = IM^2 - IK^2$, значит, $OI \perp MK$.

Второй способ. Пусть $\overrightarrow{BM} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{BK} = \vec{k}$, тогда $\overrightarrow{MK} = \vec{k} - \vec{m}$ и $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{OI} \cdot \vec{k} - \overrightarrow{OI} \cdot \vec{m}$. Скалярное произведение двух векторов – это произведение модуля одного из них на проекцию второго на направление первого. В введенных обозначениях $|\vec{m}| = BM = c - b$, $|\vec{k}| = BK = a - b$, проекция $\overrightarrow{OI}$ на направление вектора $\vec{m}$ равна $C_1C_2 = 0,5c - (p - a) = 0,5(a - b)$ и проекция $\overrightarrow{OI}$ на направление вектора $\vec{k}$ равна $A_1A_2 = 0,5a - (p - c) = 0,5(c - b)$. Тогда $\overrightarrow{OI} \cdot \vec{k} - \overrightarrow{OI} \cdot \vec{m} = 0,5(a - b)(c - b) - 0,5(c - b)(a - b) = 0$. Так как оба вектора ненулевые, то отсюда следует их перпендикулярность, что и требовалось доказать.



Возможен также ещё один способ решения, который можно осуществить по следующей схеме (см. рис. 56):

Рассмотреть центры I_A, I_B, I_C внеписанных окружностей треугольника ABC . Для треугольника $I_AI_BI_C$ треугольник ABC является ортотреугольником, поэтому I – ортоцентр, а O – центр окружности девяти точек треугольника $I_AI_BI_C$. Тогда OI – прямая Эйлера этого треугольника.

Далее можно рассмотреть две окружности, проходящие через вершину B и два центра внеписанных окружностей. Используя эти окружности, можно доказать, что основания P и Q внешних биссектрис лежат на радикальной оси окружности, описанной около $I_AI_BI_C$, и окружности девяти точек 'этого треугольника. Тем самым будет доказано, что PQ перпендикулярна OI .

Затем, используя многочисленные отношения отрезков, доказать параллельность PQ и MK .

4.3. Клетчатый прямоугольник разрезали на прямоугольники размером 1×2 (доминошки) так, что любая прямая, идущая не по линиям сетки параллельно одной из сторон, пересекает чётное число доминошек. Докажите, что длина одной из сторон прямоугольника делится на 4.

Решение. Так как прямоугольник можно разрезать на доминошки, то в нем чётное количество клеток. Не умаляя общности, можно считать, что чётное количество клеток будет в каждом столбце.

Предположим, что число клеток в столбце прямоугольника не делится на 4. Тогда каждый столбец пересекает чётное число горизонтальных доминошек, значит, он содержит чётное число вертикальных. Следовательно, число горизонтальных доминошек в каждом столбце не делится на 4. В частности, число доминошек, лежащих в первом и втором слева столбцах дает при делении на 4 остаток 2. Тогда число доминошек, лежащих во втором и третьем столбцах делится на 4, число доминошек в третьем и четвёртом столбцах дает остаток 2, и так далее.

Если число клеток в строке нечётно, то число доминошек в двух правых столбцах будет делиться на 4 – противоречие. Если же число клеток в строке чётно, но не делится на 4, то общее количество горизонтальных доминошек не делится на 4. Аналогично общее количество вертикальных доминошек не делится на 4. Но тогда общее количество доминошек делится на 4, а площадь прямоугольника делится на 8 – противоречие.

Пятый тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов)

5.1. Решите уравнение: $x^2 + \sqrt{-x} = 18$.

Ответ: -4 .

Решение. Пусть $\sqrt{-x} = a \geq 0$. Уравнение примет вид: $a^4 + a = 18 \Leftrightarrow (a^4 - 16) + (a - 2) = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(a + 2)(a^2 + 4) + (a - 2) = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(a^3 + 2a^2 + 4a + 9) = 0 \Leftrightarrow a = 2$, так как при $a \geq 0$ $a^3 + 2a^2 + 4a + 9 > 0$. Значит, $\sqrt{-x} = 2$, откуда $x = -4$.

Получив уравнение $a^4 + a = 18$, можно рассуждать иначе. При $a \geq 0$ его левая часть возрастает, поэтому это уравнение имеет не более одного корня. Тогда $a = 2$ несложно подобрать.

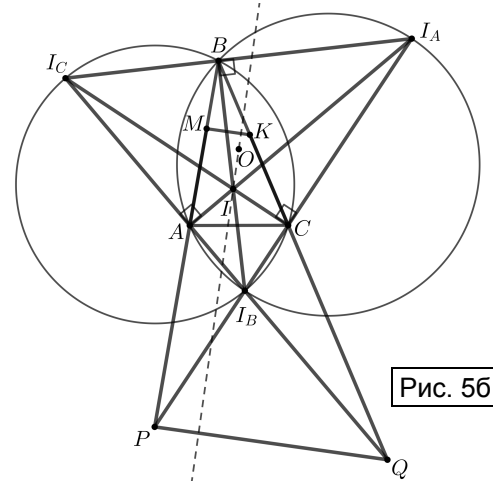


Рис. 56

5.2. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB и AC в точках P и Q соответственно. Известно, что $BQ = CP$. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный?

Ответ: обязательно.

Решение. Заметим, что $AP = AQ$ (отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки). Далее можно рассуждать по-разному:

Первый способ. Острые углы APQ и AQP равнобедренного треугольника APQ равны, поэтому равны смежные с ними тупые углы CQP и BPQ (см. рис. 6). В треугольниках CQP и BPQ : общая сторона QP , $CP = BQ$ и $\angle CQP = \angle BPQ$, причём равные углы лежат напротив больших сторон, значит эти треугольники равны (по четвертому признаку равенства треугольников). Следовательно, $QC = PB$, откуда $AC = AB$, то есть треугольник ABC – равнобедренный.

Второй способ. В треугольниках CPA и BQA : общий угол A , $CP = BQ$ и $AP = AQ$ (см. рис. 6). В таком случае, либо $\angle ACP = \angle ABQ$ (и тогда треугольники равны), либо $\angle ACP + \angle ABQ = 180^\circ$. Но $\angle ACP + \angle ABQ < \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$, значит, $\angle ACP = \angle ABQ$. Тогда треугольники CPA и BQA равны, откуда $AC = AB$, то есть треугольник ABC – равнобедренный.

При обоих способах решения вместо четвёртого признака равенства треугольников можно использовать теорему синусов.

5.3. В правильном пятиугольнике проведены все диагонали. Около каждой вершины и около каждой точки пересечения диагоналей записали число 1. За один шаг разрешается заменить все числа, стоящие вдоль одной прямой на противоположные. Можно ли за несколько шагов добиться, чтобы около каждой точки стояло число -1 ?

Ответ: нельзя.

Решение. В правильном пятиугольнике: 5 диагоналей, а внутри него – 5 точек их попарного пересечения (см. рис. 7). За один шаг ровно два числа, стоящих около этих точек, изменяются на противоположные. Значит, среди этих чисел может быть только чётное количество чисел, равных -1 . Следовательно, добиться, чтобы около каждой точки, указанной в условии, стояло число -1 , невозможно.

Аналогичное рассуждение можно провести и для чисел, стоящих около вершин.

