Оглавление

Введение

К традиционным формам проведения математических соревнований школьников: олимпиадам и математическим боям, в последнее время добавилась новая, и, на наш взгляд, интересная форма — «математическая регата». Впервые межшкольные соревнования с таким названием были проведены на конференции старшеклассников в Московском энергофизическом лицее. В дальнейшем эту идею использовали преподаватели математики лицея №1511 МИФИ для проведения школьных командных математических соревнований. Правила проведения регаты были существенно изменены, в частности, вместо проверки ответов (в устной форме) стали проверяться решения задач, которые предъявлялись в письменном виде. Это, естественным образом, повлияло и на содержание заданий.

Так как на тот момент в Москве (в отличие от некоторых других городов России) практически отсутствовали массовые командные математические соревнования для старшеклассников, то возможность их проведения в увлекательной и динамичной форме, напоминающей соревнования гребцов или яхтсменов, заинтересовала учителей математики еще нескольких школ. Особая привлекательность математических регат состоит в том, что они имеют ярко выраженную учебную направленность, так как решение школьниками задач, разбор их правильных решений, апелляции, подведение итогов и награждение призеров — все это происходит в один день, в течении 2,5–3 часов. Можно провести следующую аналогию: математические регаты соотносятся с традиционными, «большими» математическими олимпиадами, как «быстрые» шахматы с классическими!

Весной 1996 года была проведена Первая Московская Межшкольная Математическая Регата для учащихся одиннадцатых классов [6]. Наиболее существенный вклад в подготовку и проведение этой и нескольких последующих регат внесли: А.А. Бучин, И.В. Ширстова (оба — лицей №1511), А.Д. Блинков (школа №218), П.В. Чулков (лицей–гимназия №109) и А.З. Гурвиц (методист НМЦ Северного округа). Школьникам и учителям, участвовавшим в первой регате, соревнования понравились и в дальнейшем, решено было сделать их традиционными. Для проведения последующих регат правила соревнований были еще раз переработаны, в частности, с учетом мнений большинства участников, начиная со второй регаты, было решено отказаться от системы возможного выбывания команд после классификационного и утешительного туров [1].

Начиная с 1998/99 учебного года, математические регаты стали составной частью Турниров Архимеда [5] (информация об их проведении публикуется в Календаре Московских олимпиад [18] и на сервере Московского Центра Непрерывного Математического Образования). Важной особенностью проведения регат, как и всех математических соревнований Турнира Архимеда, является их «открытость» как для школьников, так и для их преподавателей математики: любой из учителей имеет право участвовать как в подборе задач, так и в работе жюри. Поэтому, все большее количество московских школ принимают участие в регатах. Помимо уже названных, в подготовке и проведении математических регат двух последних лет неоднократно участвовали учителя математики: А.А. Волкова (школа №235, затем — №174), Е.Б. Гладкова (лицей «Вторая школа»), О.Р. Горская (гимназия №1514), А.В. Иванищук (лицей №1511), К.П. Кочетков и А.В. Семенов (школа №218), О.Н. Кривошеева (школа №223), Е.И. Нечаева (школа №152), А.Г. Мякишев (лицей №1303), А.В. Спивак (гимназия №1543).

Активно работали в жюри: А.В. Алферов (школа №7), А.И. Балабанов и М.В. Козлов (лицей «Вторая школа»), Ю.А. Блинков и В.Ф. Зелицкая (школа №218), В.В. Вакулюк (МЦНМО), Г.А. Захарова (школа №152), А.Я. Канель-Белов (ДНТТМ), С.И. Липкин (школа №1189), Ю.К. Майоров (лицей №1523), М.А. Мартиросян (лицей — гимназия №109), Л.Е. Федулкин (школа №40) и многие другие. Пользуясь представленной возможностью, организаторы регат выражают благодарность администрациям всех образовательных учреждений, которые предоставляли свои помещения для проведения регат. Это, прежде всего, — лицей №1511, а также, школы №152 и №235, гимназии №1514 и №1543, лицей-гимназия №109. Выражаем признательность администрации МЦНМО, которая безвозмездно предоставляла математическую литературу для награждения призеров регат в 1999/2000 учебном году.

При подготовке к печати настоящего издания, помимо материалов организаторов регат, были использованы отдельные особо удачные решения школьников. Особая благодарность — А.В. Семенову, подготовившему подавляющееся большинство чертежей и сделавшему много ценных замечаний по тексту.

Правила математической регаты и ее проведение

1. В математической регате участвуют школьные команды учащихся одной параллели. В составе каждой команды — 4 человека. Школа может быть представлена несколькими командами. Названием команды является номер школы с добавленным к нему буквенным индексом А или Б.

2. Соревнование проводится в четыре тура (для учащихся 7–8 классов) или в пять туров (для учащихся 9–11 классов). Каждый тур представляет собой коллективное письменное решение трех задач. Любая задача оформляется и сдается в жюри на отдельном одинарном листе, причем каждая команда имеет право сдать только по одному варианту решения каждой из задач. (Эти листы каждая команда заготавливает заранее; на каждом из них сверху крупно написано название команды, а ниже — двойной индекс задачи и ее решение. Условия задач на этот лист не переписываются.)

3. Проведением регаты руководит Координатор. Он организует раздачу заданий и сбор листов с решениями; проводит разбор решений задач и обеспечивает своевременное появление информации об итогах проверки.

4. Время, отведенное командам для решения, и «стоимость» задач каждого тура в баллах указаны на листах с условиями задач, которые каждая команда получает непосредственно перед началом каждого тура.

5. Проверка решений осуществляется жюри после окончания каждого тура. Жюри состоит из трех комиссий, специализирующихся на проверке задач №1, №2 и №3 каждого тура соответственно.

6. Параллельно с ходом проверки, Координатор осуществляет для учащихся разбор решений задач, после чего школьники получают информацию об итогах проверки. После объявления итогов тура, команды, не согласные с тем, как оценены их решения, имеют право подать заявки на апелляции. В случае получения такой заявки, комиссия проверявшая решение, осуществляет повторную проверку и, после нее, может изменить свою оценку. Если оценка не изменена, то сам процесс апелляции эта же комиссия осуществляет после окончания всех туров регаты, но до окончательного подведения итогов. В результате апелляции оценка решения может быть как повышена, так и понижена, или же оставлена без изменения. В спорных случаях окончательное решение об итогах проверки принимает председатель жюри.

7. Команды-победители и призеры регаты определяются по сумме

баллов, набранных каждой командой во всех турах. Участники этих команд награждаются математической литературой. Процедура награждения происходит сразу после подведения окончательных итогов регаты.

Приведенные правила дают основное представление о том, как проходит регата. Имеет смысл добавить, что все команды и жюри находятся в одном помещении, как правило, в актовом зале школы. Столы в этом помещении расставляются так, чтобы каждая команда сидела за отдельным столом, и учащиеся могли вести обсуждение, не мешая другим командам. Рассадка команд производится в соответствии с заранее заготовленными и расставленными на столах табличками с названиями команд, причем столы команд из одной школы не располагаются рядом. Члены жюри размещаются компактно (на некотором расстоянии от столов школьников), но для работы каждой из трех комиссий выделено по отдельному столу. Необходимо также предусмотреть наличие двух классных досок: одной — для разбора решений задач, другой — для записи результатов проверки.

В состав комиссий жюри входят, как правило, преподаватели участвующих школ, выпускники этих школ — студенты математических факультетов Вузов, а иногда, и другие учителя математики. В каждую комиссию входит 3–5 человек, в зависимости от количества участников регаты. Председателем жюри является один из его авторитетных членов, по предварительной договоренности.

Обязанности Координатора регаты берет на себя один из преподавателей, принимавших активное участие в подготовке задач. Наиболее ответственная часть его работы — подробный разбор решений задач для школьников (в некоторых случаях разбирается несколько возможных способов решения), который проводится после каждого тура и занимает, в среднем, 10–15 минут. Этого времени обычно хватает комиссиям жюри, чтобы завершить проверку работ. По окончании разбора задач и по мере завершения проверки, результаты команд по каждой из задач тура вносятся в протоколы и переносятся на доску, для всеобщего обозрения. После появления на доске результатов проверки какой-либо из задач тура, координатор просит команды, не согласные с оценкой их работы, заявить об этом (поднятием таблички с названием). Эти апелляции первоначально рассматриваются комиссиями жюри без участия школьников, поскольку те в это время уже решают задачи следующего тура. Иногда какие-то из оценок изменяются на этом этапе, чаще — этого не происходит, но за командами остается право на личную апелляцию, которую по каждой из задач может осуществлять только один из представителей команды.

Для облегчения работы координатора и жюри тексты решений всех задач готовятся заранее. Каждая комиссия жюри получает несколько экземпляров решений «своих» задач непосредственно перед началом первого тура регаты. Полные тексты решений находятся только у координатора регаты.

В его обязанности также входит: фиксировать время на проведение каждого тура (он объявляет о начале и окончании каждого тура, кроме того, предупреждает команды за две минуты до его окончания); отвечать на вопросы учащихся по тексту задач; взаимодействовать с жюри. На практике, особенно при большом количестве участвующих команд, два–три человека помогают координатору: разносят тексты заданий и собирают решения учеников. Один из этих ассистентов (освобожденный от работы в жюри) переносит все результаты проверки в сводный протокол и на доску (см. приложения), а также ведет подсчеты (суммы баллов, набранные каждой командой по итогам тура и по итогам регаты).

После того, как закончены все апелляции и внесены все изменения в протоколы, происходит процедура награждения команд-победителей и призеров. По сложившейся традиции, члены каждой команды (в порядке занятых мест) подходят к столу с математической литературой и каждый школьник выбирает себе приз. Количество награждаемых команд (от трех до шести) составляет, как правило, четвертую часть от количества команд-участниц.

Подготовка регаты

Проведение регаты требует большой предварительной подготовки, как организационной, так и содержательной. Опишем систему подготовки, сложившуюся за время проведения регат.

В начале каждого учебного года распространяется информация о предполагаемых сроках и местах проведения каждой регаты и указываются координаты организаторов. Представители школ, традиционно участвующих в регатах, оповещаются персонально. Предварительные заявки на участие в каждой конкретной регате принимаются организаторами от преподавателей школ по телефону или электронной почте. Это происходит, как правило, за три–четыре недели до проведения регаты. Система предварительных заявок связана с ограниченными «посадочными» возможностями каждой из школ, принимающих регату. Школам, впервые участвующим в регате, обычно (для начала) рекомендуется выставить одну команду. При получении заявки организаторы оповещают о времени и месте обсуждения задач для предстоящей регаты. На это обсуждение, которое происходит не позже, чем за две недели до проведения регаты, каждый из заинтересованных учителей приезжает со списком задач, которые он хотел бы предложить. Кроме того существует постоянно пополняемый «банк задач», куда включены задачи, предлагавшиеся, но не использованные ранее. Так как организаторы регат преследуют, прежде всего, учебные цели, то отсутствует стремление использовать исключительно «оригинальные» задачи: главное, чтобы участвующие школьники были не знакомы с ними ранее. Поэтому, задача отклоняется, если кто-то из присутствующих преподавателей говорит, что его ученики с ней знакомы. Также отклоняются и те задачи, решение которых требует знаний выходящих за пределы программы данного класса (при этом, организаторы стараются учитывать имеющееся многообразие программ и учебников). В остальном, действует демократический механизм принятия решения о включении той или иной задачи. Принципиально важным является обсуждение условия каждой задачи вместе с ее предполагаемыми решениями, поскольку список задач (за редким исключением) должен быть утвержден в этот же день. На этой же встрече преподавателей решаются и все организационные вопросы.

Исходя из опыта проведения регат, сформулируем основные принципы составления комплекта задач для каждой регаты:

- В каждом туре учащимся предлагается решить три задачи, относящиеся к различным разделам математики. Как правило, одна из задач относится к алгебре или основам математического анализа, вторая — геометрическая, третья — логическая, комбинаторная или «числовая». Тематика задач должна максимально соответствовать возрасту участвующих школьников.

- Для таких соревнований пригодны только задачи, решение которых может быть изложено кратко.

- Задачи каждого тура должны иметь различную тематику, но примерно одинаковый уровень сложности.

- Задания разных туров, имеющие одинаковый порядковый номер, как правило, относятся к одной теме.

- Сложность заданий и время, выделяемое на их выполнение, увеличиваются от тура к туру.

- Распределение баллов по турам должно быть таким, чтобы «стоимость» задач последнего тура относилась к «стоимости» задач первого, как 3:2.

- Задания первого тура должны быть сравнительно простыми, чтобы они были решены большинством команд.

После того, как утвержден список задач, преподаватели договариваются о распределении работы по подготовке решений. Решения всех задач (в компьютерном виде) должны быть готовы не позже, чем за неделю до проведения регаты. Окончательную редакцию текстов условий и решений, осуществляют два–три человека, и только после этого, они же окончательно распределяют задачи по турам. Как правило, один из этих преподавателей и становится координатором регаты.

Таким образом, комплект материалов для проведения регаты включает в себя:

- тексты условий задач для школьников, разрезанные и разложенные «по турам» (размноженные в соответствии с количеством участвующих команд, с «запасом»);

- тексты условий и подробных решений задач, сгруппированных по нумерации, для работы жюри (не менее двух экземпляров для каждой из комиссий);

- полные тексты условий и решений задач для работы координатора регаты;

- четыре протокола — один «сводный» и еще три, по одному для каждой из комиссий жюри (см. приложение);

- таблички с названиями участвующих команд.

Подготовку помещения для проведения регаты (в том числе изготовление табличек) берут на себя преподаватели школы, в которой проводится регата.

Задачи

Регата 1 (10 класс)

Классификационный «заезд» (15 минут)

К$_1$. (6 баллов) Найдите наибольшее значение функции: $y = \dfrac{x^2}{x^4 + 25}$.

К$_2$. (5 баллов) В равнобокой трапеции диагональ перпендикулярна боковой стороне и является биссектрисой одного из углов трапеции. В каком отношении делится каждая диагональ точкой их пересечения?

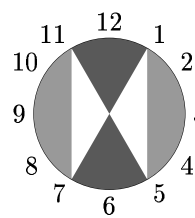
К$_3$. (6 баллов) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ y^2 + xy + y = 20. \end{cases}$$

Утешительный «заезд» (10 минут)

У$_1$. (5 баллов) Верно ли, что для любого нечетного числа a число $(100 + a)^5 + 1$ является составным?

У$_2$. (5 баллов) Часовой мастер раскрасил циферблат часов в три цвета: красный, синий и зеленый, как показано на рисунке. Какой цвет занимает большую площадь?



У$_3$. (6 баллов) Найдите сумму всех коэффициентов многочлена:

$$P(x) = (1 - 3x + 3x^2)^{743}(1 + 3x - 3x^2)^{797}.$$

Первый тур (15 минут)

I$_1$. (6 баллов) Изобразите на координатной плоскости XOY все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$(x^2 + 2x + 4)(y^2 - 6y + 11) = 6.$$

I$_2$. (6 баллов) На прямоугольном бильярдном столе $ABCD$ расположены произвольным образом шары M и N. Изобразите траекторию движения шара M, если по нему ударили таким образом, что он, отразившись от бортов AB и BC, попал в шар N.

I$_3$. (7 баллов) Найдите все целые решения неравенства:

$$x^2 < 1 - 2\sin 2x.$$

Второй тур (15 минут)

II$_1$. (**7 баллов**) Докажите неравенство: $\dfrac{(a+1)^2}{b} + \dfrac{(b+1)^2}{a} \geqslant 8$, где $a > 0$ и $b > 0$.

II$_2$. (**6 баллов**) Найдите углы треугольника, если две его высоты не меньше сторон, на которые они опущены.

II$_3$. (**6 баллов**) Шахматист-любитель придумал новую фигуру, передвигающуюся «ходом козла»: на три клетки прямо и одну в сторону. Можно ли обойти всю шахматную доску «ходом козла», побывав на каждой клетке не менее одного раза?

Третий тур (20 минут)

III$_1$. (**8 баллов**) p_1 и p_2 — два последовательных простых нечетных числа. Известно, что $p_1 + p_2 = 2n$, где $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что n — составное число.

III$_2$. (**6 баллов**) Две окружности пересекаются в точках A и B и касаются некоторой прямой в точках C и D. Докажите, что N — середина отрезка CD.

III$_3$. (**8 баллов**) Найдите наибольшее количество решений системы уравнений:

$$\begin{cases} |x-y| + |x+y| = 4, \\ |x-1| + |y| = a, \qquad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Регата 2 (10 класс)

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Решите уравнение: $5\sqrt{x-3} + 2\sqrt{x} + 3x = 21$.

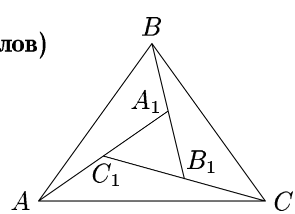
1.2. Верно ли, что в неравных треугольниках против неравных сторон лежат неравные углы?

1.3. На какую наибольшую степень числа 2 может делиться выражение $n^2 + 4n - 33$ при целых значениях n?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 6 баллов)

2.1. Решите уравнение: $|x^2+x-2|+|x-3| = x^2 + 1$.

2.2. Найдите $S_{\triangle A_1B_1C_1}$ (см. рис.), если $S_{ABC} = 7$, $AC_1 = C_1A_1$, $BA_1 = A_1B_1$, $CB_1 = B_1C_1$.



2.3. Можно ли из 37 ниток сплести сетку так, чтобы каждая нитка была связана ровно с пятью другими?

Третий тур (20 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Решите уравнение: $\sin^2 x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} = \cos^2 3x$.

3.2. В трапеции $ABCD$ основание AB, диагональ AC и сторона AD равны между собой и имеют длину 5. Длина стороны BC равна 6. Найдите длину диагонали BD.

3.3. Найдите все целые значения a, при которых дробь $\frac{a^3-8}{a+2}$ принимает целые значения.

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Изобразите на координатной плоскости XOY множество точек, удовлетворяющих неравенству $y \cdot (x^2 - 9) \geqslant x - 3$.

4.2. На биссектрисе внешнего угла при вершине C треугольника ABC выбрана произвольная точка M, не совпадающая с C. Докажите, что $AM + MB > AC + CB$.

4.3. Дана таблица 8×8, к которой записаны числа от 1 до 64 (см. рис). Закрашивается 8 клеток так, что в каждой горизонтали и в каждой вертикали — ровно одна закрашенная клетка. Докажите, что сумма чисел, записанных в этих 8 клетках, не зависит от набора закрашенных клеток.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Пятый тур (30 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Известно, что графики уравнений $y = x^2 + x - 83$ и $x = y^2 + y - 84$ пересекаются в четырех точках. Существует ли окружность, содержащая эти четыре точки?

5.2. В четырехугольнике $ABCD$: $\angle ABD = \angle BDC = 50°$, $\angle BCA = \angle CAD = 40°$. Найдите величины углов четырехугольника.

5.3. Докажите неравенство: $\sin 2 + \cos 2 + 2(\sin 1 - \cos 1) > 1$.

Регата 3 (11 класс)

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Решите уравнение: $2\cos(0{,}1x) = 2^x + 2^{-x}$.

1.2. Дана трапеция, в которую можно вписать окружность. Докажите, что окружности, построенные на её боковых сторонах, как на диаметрах, касаются друг друга.

1.3. Назовем автобусный билет несчастливым, если сумма цифр его шестизначного номера делится на 13. Могут ли два идущих подряд билета оказаться несчастливыми?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Решите уравнение: $5^x - 3^x = 16$.

2.2. Верно ли, что если в выпуклом пятиугольнике равны все внутренние углы, то вокруг него можно описать окружность?

2.3. Укажите десять различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из этих чисел.

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Докажите, что при любых действительных значениях чисел a, b и c хотя бы одно из уравнений: $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет хотя бы один действительный корень.

3.2. Из вершины A треугольника ABC опущен перпендикуляр AK на биссектрису внешнего угла треугольника при вершине B. Сравните периметры треугольников AKC и ABC.

3.3. На бесконечной шашечной доске на соседних клетках по диагонали стоят две шашки черного цвета. Можно ли поставить на доску белую шашку и произвольное количество черных шашек так, чтобы белая шашка «съела» все стоящие на доске черные шашки одним ходом?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Решите уравнение:

$$\int_{-3}^{3} \frac{3^x - 1}{3^x + 1} = \log_3(2x - 7) + x - 6.$$

4.2. Можно ли через произвольную точку в пространстве провести 1999 различных прямых так, чтобы полученное множество прямых удовлетворяло условию: «для любых двух прямых существует третья прямая, перпендикулярная им обеим»?

4.3. Докажите, что если сумма цифр натурального числа не меняется при умножении на 5, то это число делится на 9.

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + \sqrt{1 - y^2} = 1, \\ y + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

5.2. Правильный многоугольник с нечетным количеством вершин разбит произвольным образом на треугольники диагоналями, не имеющими общих внутренних точек. Докажите, что хотя бы один из этих треугольников является остроугольным.

5.3. Множество натуральных чисел разбейте на два подмножества так, чтобы каждое из них не содержало ни одной бесконечной арифметической прогрессии.

Регата 4 (7 класс)

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

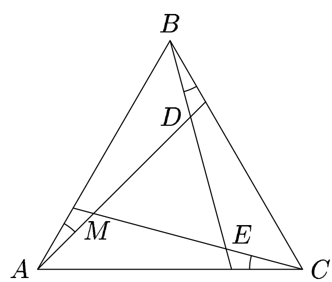
1.1. Биссектриса угла ABC образует с его стороной угол, который равен углу, смежному с углом ABC. Найдите градусную меру угла ABC.

1.2. Среди уравнений, приведенных в пунктах а)–е), укажите уравнения, задающие параллельные прямые: а) $y = 3x - 5$; б) $2y = x + 6$; в) $y = -0{,}7x$; г) $y = \dfrac{6 + x}{2}$; д) $y = \dfrac{x}{3}$; е) $y = \dfrac{4 - 7x}{10}$.

1.3. Вычислите сумму: $1 + 4 + 7 + \ldots + 97 + 100$.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Треугольник ABC — равносторонний. Лучи AD, BE и CM попарно пересекаются внутри треугольника, причем $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACM$ (см. рис.). Являются ли точки D, E и M вершинами равностороннего треугольника? Ответ обоснуйте.



2.2. Постройте график функции $y = \dfrac{x - 5}{x - 5}$.

2.3. К числу 43 справа и слева припишите по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 45.

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Из пункта A в пункт F ведет прямолинейная дорога длиной 35 км. Остановки автобуса расположены в точках B, C, D, E. Известно, что $AC = 12$ км, $BD = 11$ км, $CE = 12$ км, $DF = 16$ км. Найдите расстояния: AB, BC, CD, DE и EF.

3.2. На координатной плоскости построены пять прямых, каждая из которых является графиком прямой пропорциональности. Эти прямые проходят через точки: $A(-3; 7{,}5)$; $B(2; -2)$; $C(3,2; -6,4)$; $D(-2; -3)$; $E(5; 8)$. Задайте каждую из функций формулой.

3.3. Делится ли число $\underbrace{66\ldots6}_{1998\text{ цифр}}$ на 9? Ответ обоснуйте.

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Верны ли следующие утверждения (ответы обоснуйте)?

а) Если луч OA образует со сторонами угла BOC равные углы, то он является биссектрисой угла BOC.

б) Если два угла имеют общую вершину и их биссектрисы являются дополнительными лучами, то эти углы — вертикальные.

в) Если биссектрисы двух равных углов лежат на одной прямой, то эти углы — вертикальные.

4.2. Средний возраст одиннадцати футболистов — 22 года. Во время игры один из игроков получил травму и ушел с поля. Средний возраст оставшихся игроков стал 21 год. Сколько лет футболисту, ушедшему с поля?

4.3. Дано: $m = 44\ldots4$; $n = 33\ldots3$.

а) Можно ли подобрать такие m и n, чтобы число n было делителем числа m?

б) Можно ли подобрать такие m и n, чтобы число m было делителем числа n?

Ответы обоснуйте.

Регата 5 (10 класс)

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. В зависимости от значений параметра b определите количество корней уравнения: $\sqrt{3x-5} = b - \sqrt{3x+11}$.

1.2. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон и касается основания BC. Найдите углы трапеции.

1.3. Решите неравенство: $x^2 - (\sin 4 + \sin 5)x + \sin 4 \cdot \sin 5 < 0$.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. При какой комбинации знаков верно равенство:

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha},$$

если $\alpha = \dfrac{19}{11}\pi$?

2.2. Точки A, B и C являются вершинами неравнобедренного треугольника. Сколько существует точек D таких, что четырехугольник с вершинами A, B, C и D имеет хотя бы одну ось симметрии?

2.3. Дано несколько (не менее двух) ненулевых чисел. Вместо любых двух чисел a и b из этого набора записываются числа $a + \dfrac{b}{2}$ и $b - \dfrac{a}{2}$. Затем, эта операция производится с двумя произвольными числами из получившегося набора, и т. д. Докажите, что после нескольких таких операций нельзя вновь получить исходный набор чисел.

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. К параболам, заданным уравнениями $y = x^2 + 4$ и $y = -x^2 + 2x$, проведены две общие касательные. Докажите, что четырехугольник, вершинами которого служат точки касания, является параллелограммом.

3.2. Стороны треугольника удовлетворяют неравенствам:

$$a \leqslant 5 \leqslant b \leqslant 6 \leqslant c \leqslant 8.$$

Найдите наибольшее возможное значение площади этого треугольника.

3.3. Первые 1511 натуральных чисел расставлены по порядку вдоль окружности. Затем, последовательно вычеркивается каждое второе число (2; 4; … 1510; …). Этот процесс продолжается до тех пор, пока не останется только одно число. Какое это число?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Докажите, что ни при каких действительных a, b и c три числа: $(b-c)(bc-a^2)$, $(c-a)(ca-b^2)$ и $(a-b)(ab-c^2)$ не могут быть положительными одновременно.

4.2. Выпуклый двенадцатиугольник вписан в окружность. Каждая из шести его сторон имеет длину $\sqrt{2}$, а каждая из оставшихся — $\sqrt{24}$. Найдите радиус окружности.

4.3. Каким наибольшим количеством нулей может оканчиваться десятичная запись числа x, если $x = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$, где n — натуральное число?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Найдите границы изменения значения выражения:

$$\cos A + \cos B + \cos C,$$

где A, B и C — углы треугольника.

5.2. В тетраэдре $PABC$ проведены биссектрисы PA_1, PB_1 и PC_1 треугольников PBC, PAC и PAB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

5.3. Сколько раз в последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$, встречается число 1511?

Регата 6 (9 класс)

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{(x+3)^2} = 3 + x, \\ \sqrt{(x-3)^2} = 3 - x. \end{cases}$$

1.2. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC соответственно отмечены точки D и E так, что $AD : BD = BE : EC = 2$ и $\angle ACB = 2\angle BED$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

1.3. Существует ли треугольник ABC, для углов которого выполняется равенство: $\sin\angle A + \sin\angle B = \sin\angle C$?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Коля и Вася живут в одном доме. В каждом подъезде дома — по 4 квартиры на этаже. Коля живет на пятом этаже в 83 квартире, Вася — на третьем этаже в 169 квартире. Сколько этажей в доме?

2.2. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Площади трех из них равны 1, 2 и 3. Найдите площадь четырехугольника.

2.3. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то из неравенства $ab > a + b$ следует неравенство $a + b > 4$.

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Сплав состоит из цинка и меди, входящих в него в отношении 1 : 2, а другой сплав содержит те же металлы, но в отношении 2 : 3. Сколько частей каждого из данных сплавов нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий цинк и медь в отношении 17 : 27?

3.2. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC как на сторонах, построены равносторонние треугольники AMC и BKC так, что точки M и K лежат вне прямого угла ACB. Найдите угол между прямыми AK и BM.

3.3. При каких значениях a один из корней уравнения

$$(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0$$

больше 1, а другой — меньше 1?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. В трамвае ехало 60 человек: контролеры, кондукторы, лжекондукторы (граждане, выдававшие себя за кондукторов), лжеконтролёры (граждане, выдававшие себя за контролеров), и, возможно, обычные пассажиры. Общее количество лжеконтролеров и лжекондукторов в 4 раза меньше количества настоящих кондукторов и контролеров. Общее количество контролеров и лжеконтролёров в 7 раз больше общего количества кондукторов и лжекондукторов. Сколько в трамвае обычных пассажиров?

4.2. В равнобокой трапеции с основаниями 4 и 5 проведена диагональ длины 8. Может ли она быть биссектрисой одного из углов трапеции?

4.3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + \sqrt[6]{x} = y + \sqrt[6]{y}, \\ x^2 + xy + y^2 = 27. \end{cases}$$

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Назовем натуральное число «куском», если оно получается выписыванием подряд чисел от 1 до какого-нибудь натурального n, большего единицы (например, 123 или 123456789101112). Докажите, что произведение любых двух «кусков» не является «куском».

5.2. AL и BM — биссектрисы треугольника ABC. Окружности, описанные около треугольников ALC и BMC, вторично пересекаются в точке K, лежащей на стороне AB. Найдите величину угла ACB.

5.3. Изобразите множество точек на координатной плоскости, в которых выражение $\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ принимает наибольшее значение.

Регата 7 (9 класс)

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Задайте формулой какую-либо функцию $f(x)$, которая определена при всех x, кроме тех, которые принадлежат промежутку $[1;2)$.

1.2. В треугольнике ABC точка A_1 принадлежит отрезку BC, а точка C_1 отрезку AB. Может ли точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1 быть серединой каждого из них?

1.3. Решите уравнение в целых числах: $1+p+p^2+p^3=3^n$.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. При всех значениях a решите уравнение:

$$\sqrt{a-|x|}+\sqrt{x^2-a^2}=-a.$$

2.2. В треугольнике ABC: $\angle A>\angle B>\angle C$. К какой из вершин треугольника ближе всего расположен центр вписанной в него окружности?

2.3. На окружности расположены 1999 белых и одна красная точка. Рассмотрим все выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех, у которых есть красная вершина или тех, у которых её нет?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx},$$

если известно, что $xyz=1$.

3.2. Даны два лоскута материи, имеющие форму квадратов (их размеры — различны). Как их нужно раскроить, чтобы из всех получившихся кусков можно было сшить скатерть, также имеющую форму квадрата?

3.3. Найдите все такие двузначные числа x, для каждого из которых истинны ровно *три* из следующих шести утверждений:

1) x делится на 3;
2) x делится на 5;
3) x делится на 9;
4) x делится на 15;
5) x делится на 25;
6) x делится на 45.

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

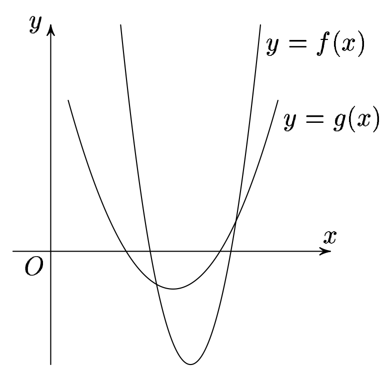
4.1. При каких значениях a сумма четвёртых степеней корней уравнения $x^2 - x + a = 0$ принимает наименьшее значение?

4.2. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB, имеющей длину c, проведена высота CH. K — середина BC. Найдите радиус окружности, проходящей через точки C, H и K.

4.3. Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принес с собой либо одну дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста — король и герцог — были с ног до головы закиданы припасами, причем на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть капусты, но все дохлые кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Даны графики двух квадратичных функций: $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, имеющие одинаковые направления «ветвей». Абсциссы их точек пересечения положительны, оси симметрии могут не совпадать (см. рис.). Сравните соответствующие коэффициенты трехчленов.



5.2. Пусть M — внутренняя точка равностороннего треугольника ABC. Существует ли треугольник, стороны которого равны отрезкам MA, MB и MC, а вершины лежат на сторонах данного равностороннего треугольника?

5.3. Представьте единицу в виде суммы квадратов пяти попарно различных положительных рациональных чисел.

Регата 8 (11 класс)

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Вычислите: $\cos 36° - \sin 18°$.

1.2. Найдите наименьший радиус круга, из которого можно вырезать треугольник, длины сторон которого 4, 5 и 7 см.

1.3. Представьте число 1999 в виде частного от деления пятой степени какого-либо натурального числа и седьмой степени какого-либо натурального числа.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Решите уравнение:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = 2.$$

2.2. O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Периметры треугольников AOB, BOC, COD и DOA равны между собой. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC и COD равны соответственно 3, 4 и 6. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник DOA.

2.3. В школьной олимпиаде по математике участвовало 100 человек, по физике — 50 человек, по информатике — 48 человек. Когда каждого из учеников спросили, в скольких олимпиадах он участвовал, ответ «по крайней мере в двух» дали в два раза меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной», а ответ «в трех» — втрое меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной». Сколько всего учеников приняло участие в этих олимпиадах?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Найдите наименьшее значение выражения: $\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3.2. Ортогональными проекциями некоторого тела на каждую из двух данных плоскостей являются круги. Докажите, что их диаметры равны.

3.3. Найдите все такие x, что $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$ являются целыми числами.

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Существует ли функция $f(x)$, удовлетворяющая двум условиям: 1) её область определения — все действительные числа; 2) $f(x^2) = x$?

4.2. Площадь полной поверхности треугольной пирамиды равна S. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, вершинами которой являются точки пересечения медиан граней данной пирамиды.

4.3. При каких целых n значение выражения $\sqrt{n^3 - n + 1}$ является целым числом?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Укажите какую-нибудь функцию, которая дифференцируема на $(-\infty, +\infty)$, а ее производная дифференцируема при всех x, кроме целых.

5.2. Докажите, что сумма синусов внутренних углов выпуклого 1999-угольника меньше 2π.

5.3. Верно ли, что в любой арифметической прогрессии с натуральными членами найдутся два числа с одинаковой суммой цифр в десятичной записи?

Регата 9 (7 класс)

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Решите уравнение:

$$1 - (2 - (3 - (\ldots(1998 - (1999 - (2000 - x))\ldots))) = 1000.$$

1.2. Даны два равнобедренных треугольника, в каждом из которых есть сторона, длина которой 6 см, и угол, градусная мера которого 100°. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны? Обоснуйте ответ.

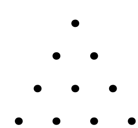
1.3. Представьте число 2001 в виде дроби, числителем которой является девятая степень какого-то целого числа, а знаменателем — десятая степень какого-то целого числа.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Вместо знаков $*$ вставьте такие числа, чтобы равенство

$$(x^2 + * \cdot x + 2) \cdot (x + 3) = (x + *) \cdot (x^2 + * \cdot x + 6)$$

стало тождеством.



2.2. Даны десять точек, расположенные в виде «равностороннего треугольника» (см. рис.). Зачеркните некоторые из данных точек так, чтобы нельзя было построить ни одного равностороннего треугольника с вершинами в оставшихся точках. Постарайтесь зачеркнуть наименьшее количество точек.

2.3. Найдите значение выражения:

$$\frac{8+222\cdot 444\cdot 888+444\cdot 888\cdot 1776}{2\cdot 4\cdot 8+444\cdot 888\cdot 1776+888\cdot 1776\cdot 3552}.$$

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Докажите, что если число b является средним арифметическим чисел a и c, причем $a > c$, то выражение $ab + bc - ac - b^2$ принимает только положительные значения.

3.2. В треугольнике ABC проведены медиана BM и высота CH. Найдите длину AC, если $MH = 10$ см.

3.3. «Во время игры в шахматы у меня осталось фигур в три раза меньше, чем у соперника, и в шесть раз меньше, чем свободных клеток на доске, но все равно я выиграл эту партию!» — сказал Винтик Шпунтику. «А у меня, в одной из партий, фигур осталось в пять раз меньше, чем у соперника, и в десять раз меньше, чем свободных клеток на доске, и все-таки я сумел победить!» — в свою очередь рассказал Шпунтик. Чьему рассказу можно верить и почему?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. В автобусе имеются одноместные и двухместные сидения. Кондуктор заметил, что когда в автобусе сидело 13 человек, то 9 сидений были полностью свободными, а когда сидело 10 человек, то свободными были 6 сидений. Сколько сидений в автобусе?

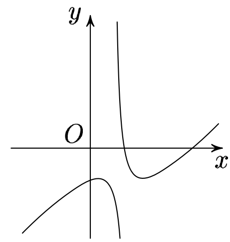
4.2. Какое наименьшее количество плоских разрезов необходимо сделать, чтобы разрезать куб на 64 маленьких кубика? После каждого разреза разрешается перекладывать образовавшиеся части в любое место.

4.3. Джон и Мэри живут в небоскребе, на каждом этаже которого 10 квартир. Номер этажа Джона равен номеру квартиры Мэри, а сумма номеров их квартир равна 239. В какой квартире живет Джон?

Регата 10 (10 класс)

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Может ли график функции $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{kx+l}$ иметь следующий вид (см. рис. на следующей странице)?



1.2. В равнобокую трапецию вписан круг радиуса r. Найдите длину боковой стороны трапеции, если угол между диагональю и большим основанием равен α.

1.3. Квадрат 4×4 разрезают по границам клеток на четыре одинаковых многоугольника. Сколькими способами это можно сделать (способы считаются различными, если при разрезании получаются неравные многоугольники)?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Может ли сумма возрастающей и убывающей функций быть периодической функцией, отличной от постоянной?

2.2. Дан квадрат $ABCD$. На сторонах BC и CD выбраны точки K и N, так что $BK = KC$ и $CN : ND = 2 : 1$. Отрезки AK и BN пересекаются в точке T. Площадь четырехугольника $KCNT$ равна 13. Найдите площадь треугольника BTA.

2.3. Решите уравнение: $5\cos^5 x + 3\sin^3 x = 5$.

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z} = \dfrac{z}{u} = \dfrac{u}{s} = \dfrac{s}{t}, \\ x = 8u, \\ x + y + z + u + s + t = 15\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

3.2. Существует ли тетраэдр, периметр каждой грани которого больше суммы остальных трех ребер?

3.3. Какое наибольшее количество натуральных чисел, меньших пятидесяти, можно выбрать так, чтобы любые два из них были взаимно простыми?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Решите уравнение: $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{3998} + x^{4000} = 2001x^{2000}$.

4.2. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABMP$ и $BCDK$. Докажите, что продолжение медианы BE треугольника ABC является высотой треугольника BMK.

4.3. Решите уравнение в натуральных числах:

$$12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0.$$

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Существует ли натуральное n, такое что:

$$\sin(\sqrt{2}) + \sin(2\sqrt{2}) + \ldots + \sin(n\sqrt{2}) > 2000?$$

5.2. Существует ли такой пятиугольник, отличный от правильного, что точки попарного пересечения его диагоналей являются вершинами пятиугольника, который ему подобен?

5.3. Решите уравнение: $(x^2 + [x] + 1)^2 + [x^2 + [x] + 1] = x - 1$.

Регата 11 (8 класс)

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Сколько корней имеет уравнение:

$$\sqrt{1999 - 2000x} + \sqrt{2001x - 2000} = 1?$$

1.2. Точки C и D лежат на окружности с диаметром AB. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC — в точке Q. Докажите, что $AB \perp PQ$.

1.3. Запишите наибольшее десятизначное число, кратное семи, все цифры в десятичной записи которого различны.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Найдите значение выражения:

$$\frac{(2+3)\cdot(2^2+3^2)\cdot\ldots\cdot(2^{256}+3^{256})\cdot(2^{1024}+3^{1024})+2^{1024}}{3^{1024}}.$$

2.2. В равнобокую трапецию с длинами оснований 8 см и 18 см вписана окружность. Найдите ее радиус.

2.3. Сто сумасшедших последовательно красят доску 100×100 в сто цветов, соблюдая единственное правило: в одной строке и в одном столбце не может оказаться двух клеток, раскрашенных одинаково. Смогут ли 99 сумасшедших правильно докрасить доску, если первый сумасшедший уже раскрасил «свои» сто клеток?

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Если каждый мальчик купит пирожок, а каждая девочка — булочку, то они вместе потратят на 1 рубль меньше, чем если бы каждый мальчик купил булочку, а каждая девочка — пирожок. Цена пирожка и цена булочки различаются больше, чем на 50 копеек. Известно также, что мальчиков больше, чем девочек. На сколько? Что дороже, пирожок или булочка, и на сколько?

3.2. Две противоположные стороны AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ лежат на перпендикулярных прямых. Расстояние между серединами сторон BC и AD равно 5. Найдите расстояние между серединами диагоналей AC и BD.

3.3. Можно ли на доску 5×5 поставить три шахматных коня так, чтобы они «били» все незанятые ими клетки?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. При каких значениях a уравнения $x^3+ax+1=0$ и $x^4+ax^2+1=0$ имеют хотя бы один общий корень?

4.2. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин и до всех сторон треугольника — наименьшая.

4.3. Найдите все целые a и b такие, что a^4+4b^4 является простым числом.

Ответы и решения

Регата 1

К$_1$. Данная функция определена $\forall x \in \mathbb{R}$. Если $x = 0$, то $y = 0$. Если $x \neq 0$, то $\dfrac{x^2}{x^4+25} = \dfrac{1}{x^2 + \dfrac{25}{x^2}} = \dfrac{0{,}2}{\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{5}{x^2}} \leqslant 0{,}1$, так как $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{5}{x^2} \geqslant 2$, причем равенство достигается при $x = \pm\sqrt{5}$. Следовательно, наибольшее значение функции равно 0,1.

К$_2$. Пусть в трапеции $ABCD$: $AB = CD$, $AC \perp CD$, $AC \cap BD = O$ и AC — биссектриса $\angle BAD$ (см. рис. 1). Тогда, $\angle BCA = \angle CAD = \angle CAB = \alpha$, значит $BC = BA$; $\angle BAD = 2\pi$; $\angle CDA = 90^\circ - \alpha$. Так как трапеция — равнобокая, то $\angle BAD = \angle CDA$, то есть, $\alpha = 30^\circ$. Из треугольника ACD имеем, что $AD = 2CD = 2BC$, а так как треугольники AOD и COB — подобны, то $\dfrac{BO}{OD} = \dfrac{CO}{OA} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$.

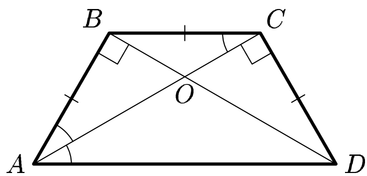


Рис. 1.

К$_3$. Произведя почленное сложение и вычитание данных уравнений, получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} (x+y)^2 + (x+y) = 30, \\ (x^2 - y^2) + (x - y) = 10. \end{cases}$$

Тогда, из первого уравнения получим, что $x + y = 5$ или $x + y = -6$. Приведя второе уравнение к виду: $(x - y)(x + y + 1) = -10$, получим, что:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = -6, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Применив для каждой из систем почленное сложение и вычитание уравнений, получаем

Ответ: $\left(1\frac{2}{3}; 3\frac{1}{3}\right)$; $(-2; -4)$.

У$_1$. *Ответ*: неверно. Например, при $a = -99$ значение выражения равно 2.

У$_2$. Вследствие симметрии, достаточно рассмотреть полукруг, и сравнить площади равнобедренного треугольника с углом 120° при вершине, сектора с углом 60° и сегмента. Площадь сектора больше, чем площадь рассматриваемого треугольника, так как частью этого сектора является равнобедренный треугольник с углом 60° при вершине, равновеликий данному. Так как площадь сектора с углом 60° в два раза меньше площади сектора с углом 120°, от которого рассматриваемый треугольник составляет меньшую часть, а сегмент — большую часть, то наибольшую площадь имеет сегмент.

Ответ: большую площадь занимает красный цвет.

У$_3$. Сумма коэффициентов многочлена равна его значению при $x = 1$.

Ответ: 1.

I$_1$. $A = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geqslant 3$, причем равенство достигается только при $x = -1$, $B = y^2 - 6y + 11 = (y-3)^2 + 2 \geqslant 2$, причем равенство достигается только при $y = 3$. Следовательно, $AB \geqslant 6$, значит, решением уравнения является ровно одна пара чисел: $(-1; 3)$.

I$_2$. Так как угол «падения» равен углу «отражения», то, используя симметрию относительно прямых AB и BC, получим (см. рис. 2):

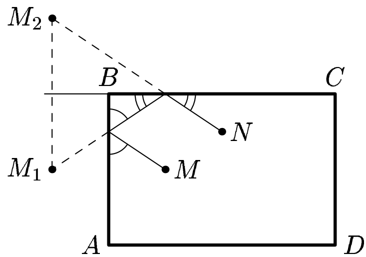


Рис. 2

I$_3$. Так как $|\sin 2x| \leqslant 1$, то $1 - 2\sin 2x \leqslant 3$, следовательно, $x^2 < 3$. Поскольку $x \in \mathbb{Z}$, то $x = 0$ или $x = \pm 1$. Непосредственной проверкой получаем ответ: -1; 0.

II$_1$.

$$\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} = \frac{a^2}{b} + \frac{2a}{b} + \frac{1}{b} + \frac{b^2}{a} + \frac{2b}{a} + \frac{1}{a} \geqslant 8,$$

так как

$$\frac{a^2}{b} + \frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{2a}{b} \qquad (a > 0,\ b > 0),$$

аналогично, $\dfrac{b^2}{a} + \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{2b}{a}$, но $\dfrac{2a}{b} + \dfrac{2b}{a} = 2\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) \geqslant 4$.

II$_2$. Пусть AD и BE — высоты треугольника ABC (см. рис. 3). Рассмотрев прямоугольные треугольники ADC и BEC, получим, что $AC \geqslant AD$ и $BC \geqslant BE$. По условию, $AD \geqslant BC$ и $BE \geqslant AC$, следовательно, $AC \geqslant AD \geqslant BC \geqslant BE \geqslant AC$, что означает, что знаки неравенства надо везде заменить на равенства. Получаем, что треугольник ABC — равнобедренный ($AC = BC$) и высоты AD и BE совпадают со сторонами AC и BC соответственно, то есть ABC — прямоугольный.

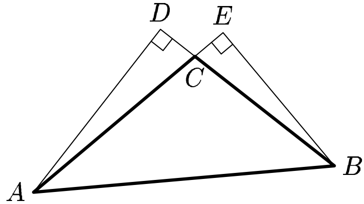


Рис. 3.

Ответ: 90°, 45° и 45°.

II$_3$. Нельзя, так как «ход козла» не меняет цвета клетки (в шахматной раскраске), на которой стоит фигура.

III$_1$. Из условия: $n = \dfrac{p_1 + p_2}{2}$, следовательно $n \in (p_1, p_2)$. Так как p_1 и p_2 — последовательные простые числа, то (p_1, p_2) не содержит простых чисел, то есть n — составное, что и требовалось доказать.

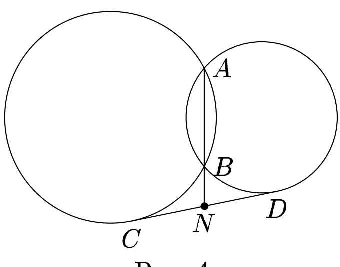


Рис. 4

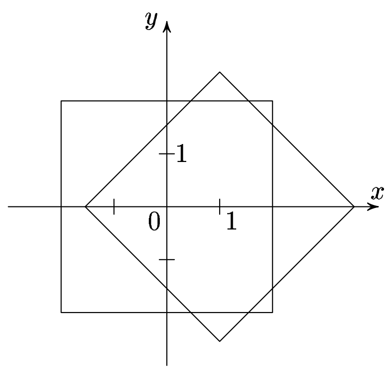


Рис. 5

III$_2$. Используя для каждой из окружностей (см. рис. 4) свойство секущей, имеем, что $NC^2 = NA \cdot NB = ND^2$. Следовательно, $NC = ND$, что и требовалось доказать.

III$_3$. Графиком первого уравнения является граница квадрата с центром в начале координат и длиной стороны — 4 единичных отрезка. График второго уравнения — граница квадрата с центром $(1; 0)$, длина стороны которого меняется в зависимости от значения параметра a. Построив эти графики в одной системе координат, находим расположение, при котором количество точек пересечения графиков — наибольшее (см. рис. 5 на предыдущей странице).

Ответ: 6.

Регата 2

1.1. $x = 4$ — решение уравнения. Других решений нет, так как в левой части уравнения — возрастающая функция.

1.2. Утверждение неверно. Рассмотрим, например, два треугольника: один со сторонами 3, 4 и 5, а другой со сторонами 6, 8 и 10. Это неравные прямоугольные треугольники, в которых равные (прямые) углы лежат против неравных сторон. (Возможны и другие примеры, в частности, любая пара подобных, но не равных треугольников.)

1.3. $n^2 + 4n - 33 = n(n+4) - 33$. Так как числа n и $n+4$ имеют одинаковую четность, то исходное выражение делится на 2 тогда и только тогда, когда n — нечетное число. Подставив $n = 2k - 1$, получаем, что данное выражение равно $4k^2 - 8k - 30 = 2(2k^2 - 4k - 15)$, а значит, оно делится на 2, но не делится на 4.

Ответ: 2^1.

2.1. Обозначим: $a = x^2 + x - 2$, $b = 3 - x$. Тогда $a + b = x^2 + 1$. Так как $a + b > 0$ и, по условию, $|a+b| = |a| + |b|$, то $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Следовательно, $x^2 + x - 2 \geqslant 0$ и $3 - x \geqslant 0$. Далее решаем систему неравенств.

Ответ: $x \in (-\infty, -2] \cup [1; 3]$.

2.2. Проведем отрезки AB_1, BC_1 и CA_1 (см. рис. 6). По свойству медианы треугольника получим, что все семь образовавшихся треугольников имеют равные площади. Значит, площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 1.

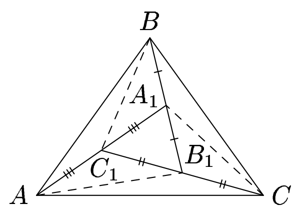


Рис. 6.

2.3. Нельзя, так как в противном случае количество узлов (пересечений двух ниток) равнялось бы $\frac{37 \cdot 5}{2}$, а это число не является целым.

3.1. $\forall x > 0$ $\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geqslant 1$, причем равенство достигается только при $x = 1$. Сравнивая области значений выражений, стоящих в левой и в правой частях уравнения, получаем, что в этом случае уравнение не имеет корней. Аналогично, рассмотрев области значений этих же выражений при $x < 0$, получим тот же результат.

Ответ: решений нет.

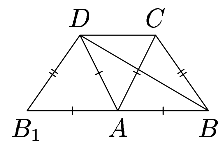


Рис. 7.

3.2. Продолжим отрезок BA за точку A на расстояние, равное BA (см. рис. 7). Полученную точку B_1 соединим с точкой D. Рассмотрим треугольник BDB_1, в котором $AB = AD = AB_1$. Следовательно, $\angle BDB_1 = 90°$. Так как углы CAB и DAB_1 равны соответственно углам DCA и CDA, расположенным при основании равнобедренного треугольника, то равны и треугольники CAB и DAB_1, значит, $B_1D = BC = 6$, $BB_1 = 10$, то есть, $BD = 8$.

3.3. $\dfrac{a^3-8}{a+2} = a^2 - 2a + 4 - \dfrac{16}{a+2}$. Значит, для того, чтобы данное выражение принимало целые значения, необходимо и достаточно, чтобы $(a+2)$ являлось делителем 16. Следовательно, знаменатель дроби принимает значения: ± 16; ± 8; ± 4; ± 2; ± 1.

Ответ: -18; -10; -6; -4; -3; -1; 0; 2; 6; 14.

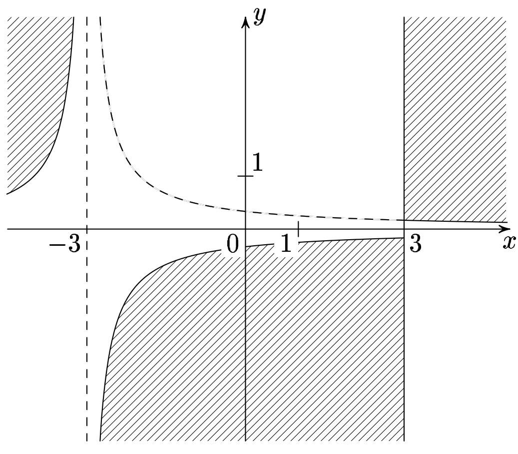


Рис. 8

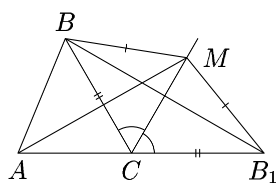


Рис. 9

4.1. Если $x > 3$, то $y \geqslant \dfrac{1}{x+3}$; если $-3 < x < 3$, то $y \leqslant \dfrac{1}{x+3}$; если $x < -3$, то $y \geqslant -\dfrac{1}{x+3}$. При $x = 3$ данное неравенство верно, а при $x = -3$ — неверно (см. рис. 8).

4.2. См. рис. 9. Рассмотрим осевую симметрию относительно прямой CM. B_1 — образ точки B. Тогда, $B_1C = BC$, $B_1M = BM$. Используя неравенство треугольника, получим, что $AM + MB = AM + MB_1 > AB_1 = AC + CB_1 = AC + CB$.

4.3. Занумеруем столбцы в таблице слева направо цифрами от 1 до 8. Тогда, числа первой строки представим в виде суммы 0 и номера столбца; числа, записанные во второй строке, как 8 + № (столбца); в третьей строке: 16 + № и так далее. Поскольку в каждой строке и в каждом столбце закрашено ровно по одной клетке, то, независимо от выбора, сумма восьми чисел набора равна:

$$(0 + 8 + 16 + \ldots + 56) + (1 + 2 + \ldots + 8) = 260.$$

5.1. При сложении данных уравнений получим:

$$x + y = x^2 + y^2 + x + y - 167 \iff x^2 + y^2 = 167.$$

Любая пара (x, y), являющаяся решением каждого из данных уравнений, является и решением полученного, значит, все общие точки графиков этих уравнений лежат на окружности радиуса $\sqrt{167}$ с центром в начале координат.

5.2. Рассмотрим осевую симметрию относительно прямой BD. Образом точки A является точка A_1. Тогда $\angle A_1BD = \angle ABD = 50°$, а $BA_1 = BA$. Возможны два случая:

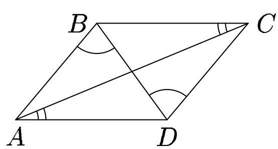


Рис. 10а

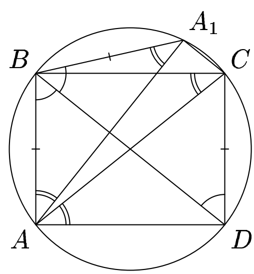


Рис. 10б

1) Точка A_1 совпала с точкой C (см. рис. 10а). Тогда, $ABCD$ — ромб с углами 100° и 80°.

2) Точка A_1 не совпала с точкой C (см. рис. 10б). В этом случае, рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Точка A_1 лежит на этой окружности, так как $\angle BA_1A = \angle BCA$, а точка D — поскольку BA_1CD — равнобокая трапеция. Следовательно, $\angle BDA = \angle BCA = 40°$, а, значит, $ABCD$ — прямоугольник, и все его углы — по 90°.

5.3. Рассмотрим разность:

$$\sin 2 + \cos 2 + 2(\sin 1 - \cos 1) - 1 =$$
$$= 2\sin 1 \cdot \cos 1 + \cos^2 1 - \sin^2 1 + 2\sin 1 - 2\cos 1 - \sin^2 1 - \cos^2 1 =$$
$$= 2\sin 1(\cos 1 - \sin 1) - 2(\cos 1 - \sin 1) = 2(\cos 1 - \sin 1)(\sin 1 - 1) > 0,$$

так как $\cos 1 < \sin 1$, а $\sin 1 < 1$. Следовательно, левая часть данного неравенства больше правой, что и требовалось доказать.

Регата 3

1.1. $\forall x \in \mathbb{R}\ 2\cos(0{,}1x) \leqslant 2$, а $2^x + 2^{-x} \geqslant 2$, причем равенство в последнем случае достигается только при $x = 0$. Следовательно корнем уравнения может являться только число 0, в чем и убеждаемся непосредственной проверкой.

Ответ: 0.

1.2. Пусть M и K — центры окружностей (см. рис. 11). Так как отрезок MK является средней линией трапеции, то

$$MK = \frac{1}{2}(AD+BC) = \frac{1}{2}(AB+CD) = R+r.$$

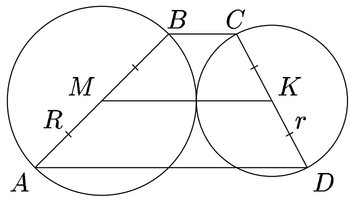


Рис. 11.

Следовательно, окружности касаются, что и требовалось доказать.

1.3. Могут, например, у идущих подряд чисел 444999 и 445000, суммы цифр равны 39 и 13 соответственно.

2.1. Разделив обе части уравнения на выражение $3^x > 0$, получим уравнение $\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1 = \frac{16}{3^x}$, равносильное данному. Так как функция $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x - 1$ является возрастающей, а функция $g(x) = \frac{16}{3^x}$ — убывающей, то уравнение имеет не более одного корня, который легко подобрать (например, можно использовать египетский треугольник).

Ответ: 2.

2.2. Утверждение неверно. Один из возможных примеров: построить правильный пятиугольник $ABCDE$, вписанный в окружность, и провести отрезок MK, параллельный DE (см. рис. 12). В пятиугольнике $ABCMK$ все внутренние углы равны, но он не является вписанным, так как существует единственная окружность, содержащая точки A, B и C.

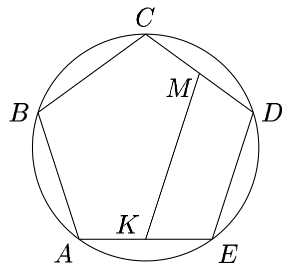


Рис. 12.

2.3. Например: 1; 2; 3; 6; 12; 24; 48; 96; 192; 384.

3.1. 1) Если среди данных уравнений хотя бы одно не является квадратным, то другое уравнение имеет корень 0. Например, если первое уравнение — не квадратное, то $a = 0$, значит число 0 является корнем второго уравнения.

2) Предположим, что все три уравнения — квадратные, но ни одно из них не имеет действительных корней. Тогда, справедливы неравенства: $b^2 - ac < 0$; $c^2 - ab < 0$ и $a^2 - bc < 0$. Сложив эти неравенства почленно, имеем:

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac < 0 \iff 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac < 0 \iff$$
$$\iff (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 < 0$$

что неверно при любых a, b и c. Следовательно, хотя бы одно из данных уравнений имеет хотя бы один действительный корень, что и требовалось доказать.

3.2. Продолжим AK до пересечения с лучом CB в точке E. Так как BK — высота и биссектриса треугольника ABE, то $AB = BE$ и $AK = KE$ (см. рис. 13). $P_{ABC} = AC + CE$, а $P_{AKC} = AC + CK + KE$. Применяя для CKE неравенство треугольника, имеем: $CK + KE > CE$, следовательно, $P_{ABC} < P_{AKC}$.

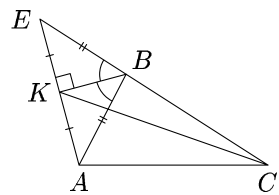


Рис. 13.

3.3. Пронумеруем горизонтали шашечной доски так, чтобы одна из данных черных шашек стояла на линии с номером 0, а другая — с номером 1 (см. рис. 14). При «съедании» любой черной шашки, белая шашка перемещается на две горизонтали вверх или вниз, значит четность номера линии при таком ее перемещении не изменяется. Поскольку две данные черные шашки находятся на горизонталях разной четности, то одним ходом их «съесть» невозможно.

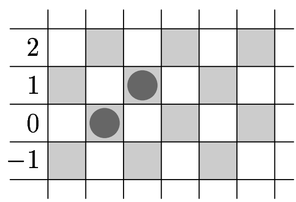


Рис. 14.

4.1. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{3^x + 1}$, которая определена и непрерывна на $\mathbb{R}$. Так как

$$f(-x) = \frac{3^{-x}-1}{3^{-x}+1} = \frac{1-3^x}{1+3^x} = -f(x),$$

то эта функция — нечетная. Следовательно, $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 0$. Получаем уравнение $\log_3(2x-7) = 6 - x$, которое имеет не более одного корня, так как функция $y = \log_3(2x-7)$ — возрастающая, а функция $y = 6 - x$ — убывающая. Проверяя числа, входящие в область определения левой части уравнения, находим корень уравнения.

Ответ: 5.

4.2. Искомое множество прямых получится, если рассмотреть плоскость α, содержащую данную точку A, перпендикуляр AB к этой плоскости, и в плоскости α через точку A провести 999 пар перпендикулярных прямых a_k и b_k, где $k = 1, 2, \ldots, 999$. Тогда, по свойству перпендикулярности прямой и плоскости, для любых двух прямых a_i и b_j, в качестве им перпендикулярной выступает (AB), а для прямых AB и любой a_k — прямая b_k.

4.3. Пусть x и $5x$ — числа, имеющие одинаковую сумму цифр. Тогда, эти числа имеют одинаковые остатки при делении на 9, так как остаток от деления любого натурального числа на 9 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 9. Следовательно, $5x - x = 4x$ кратно 9, а так как 4 и 9 — взаимно простые числа, то число x делится на 9, что и требовалось доказать.

5.1. Из рассмотрения подкоренныч выражений следует, что: $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$. Тогда, $\exists\alpha$: $\sin\alpha = x$ и $\exists\beta$: $\sin\beta = y$. Кроме того, поскольку $0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1$, то $\sin\alpha \geqslant 0$. Аналогично, и $\sin\beta \geqslant 0$. Данная система примет вид:

$$\begin{cases} \sin\alpha + |\cos\beta| = 1, \\ \sin\beta + |\cos\alpha| = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Возведя каждое уравнение в квадрат и почленно сложив, получим уравнение–следствие:

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha|\cos\beta| + \cos^2\beta + \sin^2\beta + 2|\cos\alpha|\sin\beta + \cos^2\alpha = 4 \iff$$
$$\iff \sin\alpha|\cos\beta| + |\cos\alpha|\sin\beta = 1.$$

В зависимости от знаков $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ имеем: $\sin(\alpha \pm \beta) = \pm 1$, то есть $\alpha \pm \beta = \pm\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Тогда, $|\cos\beta| = |\sin\alpha| = \sin\alpha$, так как $\sin\alpha > 0$. Возвращаясь к тригонометрической системе, получим, что $\sin\alpha = |\cos\beta| = \dfrac{1}{2}$ и $\sin\beta = |\cos\alpha| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

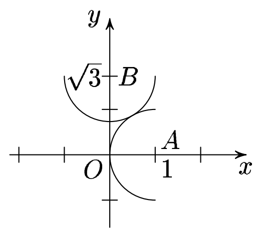


Рис. 15.

Другой возможный способ решения: построить в одной системе координат графики данных уравнений, которые представляют собой полуокружности радиуса 1 с центрами в точках $A(1;0)$ и $B(0;\sqrt{3})$ соответственно (см. рис. 15). Так как $|AB| = \sqrt{(1-0)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2$, и сумма радиусов полуокружностей равна расстоянию между их центрами, то графики имеют ровно одну общую точку, координаты которой и являются решениями системы.

5.2. Рассмотрим окружность с центром O, описанную около данного многоугольника. При любом его указанном разбиении все полученные треугольники будут вписаны в эту окружность. Так как количество вершин многоугольника — нечетно, то ни одна из его диагоналей не содержит точку O, а значит, найдется треугольник, для которого O — внутренняя точка. Он и будет искомым, поскольку треугольник, у которого центр описанной окружности лежит внутри, является остроугольным.

5.3. Например: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15 … В этом случае, $\forall d \in \mathbb{N}$ в каждом из подмножеств найдется такая группа чисел, что «расстояние» от нее до следующей группы чисел из этого подмножества больше, чем d.

Регата 4

1.1. Углы ABD и CBD равны, так как BD — биссектриса угла ABC (см. рис. 16). Тогда, по условию, угол EBC, смежный с углом ABC, равен каждому из углов ABD и CBD. Так как сумма этих трех углов равна $180°$, то каждый из них имеет величину $60°$, то есть, $\angle ABC = 120°$.

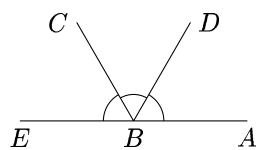


Рис. 16.

1.2. Перепишем уравнения данных прямых так, чтобы можно было сравнивать их угловые коэффициенты. а) $y = 3x - 5$; б) $y = 0{,}5x + 3$; в) $y = -0{,}7x$; г) $y = 0{,}5x + 3$; д) $y = \frac{1}{3}x$; е) $y = -0{,}7x + 0{,}4$. Прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны, а свободные члены различны, следовательно, прямые б) и г) совпадают, а прямые в) и е) параллельны.

1.3. Пусть $S = 1+4+7+\ldots+97+100$, тогда $S = 100+97+\ldots+4+1$, значит, $2S = (1 + 100) + (4 + 97) + \ldots + (97 + 4) + (100 + 1)$, причем количество пар равно $(100 + 2) : 3 = 34$, значит, $S = 1717$.

2.1. Рассмотрим треугольники: ADB, BEC и CMA. Имеем: $AB = BC = CA$, $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACM$ (по условию); $\angle ABD = \angle BCE = \angle CAM$, так как эти углы дополняют равные углы до $60°$. Следовательно, треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Из равенства треугольников следует равенство их соответствующих сторон: $AD = BE = CM$ и $BD = CE = AM$. Так как $MD = AD - AM$, $DE = BE - DB$, $ME = CM - CE$, то $MD = DE = ME$, то есть, треугольник MDE — равносторонний.

2.2. $y = 1$, если $x \neq 5$ (см. рис. 17).

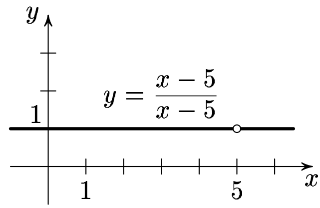


Рис. 17.

2.3. Обозначим цифры, которые приписаны к числу 43 слева и справа, соответственно a и b. Число делится на 45, значит, оно делится на 5 и на 9. Так как число делится на 5, то b (последняя цифра) равна 0 или 5. Сумма цифр числа равна: $a+4+3+$ $+b = a+7+b$. Пользуясь признаком делимости на 9, получаем, что если $b = 0$, то $a = 2$; если $b = 5$, то $a = 6$.

Ответ: 2430 или 6435.

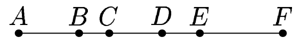


Рис. 18.

3.1. См. рис. 18: $AB = AF - (BD + DF) = 35 - (11 + 16) = 8$ (км). $BC = AC - AB = 12 - 8 = 4$ (км). $CD = BD - BC = 11 - 4 = 7$ (км). $DE = CE - CD = 12 - 7 = 5$ (км). $EF = DF - DE = 16 - 5 = 11$ (км).

Ответ: $AB = 8$ км; $BC = 4$ км; $CD = 7$ км; $DE = 5$ км; $EF = 11$ км.

3.2. Прямо пропорциональная зависимость задаётся формулой вида: $y = kx$, где $k \neq 0$. Тогда, если $x \neq 0$, то $k = \dfrac{y}{x}$ (см. рис. 19).

Ответ: $y = -2{,}5x$; $y = -x$; $y = -2x$; $y = 1{,}5x$; $y = 1{,}6x$.

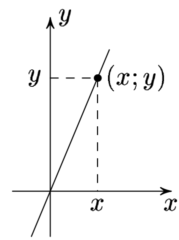


Рис. 19.

3.3. Сумма цифр данного числа: $6 \cdot 1998 = 2 \cdot 3 \times$ $\times 3 \cdot 666 = 2 \cdot 666 \cdot 9$ делится на 9, следовательно, число делится на 9.

4.1. Утверждения а)–в) не верны, что показывают следующие примеры (см. рис. 20а–в).

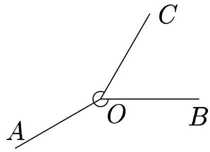


Рис. 20а

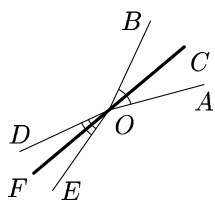


Рис. 20б

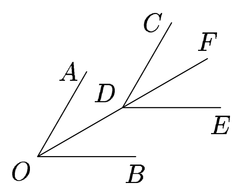


Рис. 20в

4.2. Сумма возрастов игроков до травмы была $22 \cdot 11 = 242$ (года), а после травмы — $21 \cdot 10 = 210$ (лет). Возраст игрока, ушедшего с поля, равен $242 - 210 = 32$ (года).

4.3. а) Можно, например, $m = 444$, $n = 3$. б) Нельзя, так как число m делится на 2, а число n не делится на 2.

Регата 5

1.1. Приведем уравнение к виду: $\sqrt{3x-5}+\sqrt{3x-11}=b$. Функция, стоящая в левой части уравнения, определена на $\left[1\frac{2}{3};+\infty\right)$ и возрастает на этом промежутке, так как является суммой возрастающих функций. Значит, свое наименьшее значение, равное 4, она принимает при $x=\frac{5}{3}$. Кроме того, эта функция непрерывна, а область значений $\sqrt{t}$ есть $[0;+\infty)$. Следовательно, областью значения левой части уравнения является $[4;+\infty)$, причем каждое свое значение эта функция принимает только при одном значении аргумента.

Ответ: при $b<4$ уравнение корней не имеет, а при $b\geqslant 4$ — имеет один корень.

1.2. Пусть точки O, M, N и K являются серединами отрезков AD, AB, CD и MN соответственно (см. рис. 21). Тогда, трапеция $AMND$ вписана в данную окружность, следовательно, эта трапеция -равнобокая. Так как MN — средняя линия трапеции $ABCD$, то и трапеция $ABCD$ — равнобокая. K — середина MN, значит, $\angle OKM=$ $=90^\circ$, то есть треугольник OMK является прямоугольным. $OK=$ $=0{,}5R=0{,}5OM$. Значит, $\angle KMO=30^\circ=\angle AOM$, а так как $OA=OM$, то $\angle MAO=75^\circ$. Отсюда получаем, что $\angle A=\angle D=75^\circ$; $\angle B=\angle C=105^\circ$.

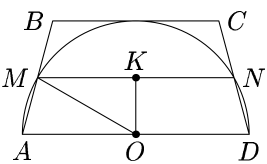


Рис. 21.

1.3. Поскольку левая часть неравенства есть произведение

$$(x-\sin 5)(x-\sin 4),$$

то решениями неравенства являются все x, лежащие между числами $\sin 5$ и $\sin 4$. Так как

$$\sin 5-\sin 4=2\sin(0{,}5)\cdot\cos(4{,}5)>0,$$

то $\sin 5<x<\sin 4$.

Ответ: $(\sin 5;\sin 4)$.

2.1. Так как $\frac{3\pi}{2}<\frac{19}{11}\pi<2\pi$, то при $\alpha=\frac{19}{11}\pi$ имеем $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, $\sin\frac{\alpha}{2}>0$. Следовательно, $1+\sin\alpha<1-\sin\alpha$, значит, $\sqrt{1+\sin\alpha}<\sqrt{1-\sin\alpha}$. Возведем в квадрат обе части данного равенства. Получим следствие из него:

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2}=1+\sin\alpha\pm\sqrt{1+\sin\alpha}\cdot\sqrt{1-\sin\alpha}+1-\sin\alpha\iff$$

$$\iff 2(1-\cos\alpha) = 2 \pm 2\cos\alpha,$$

значит, в исходном равенстве должны быть разные знаки перед радикалами в правой части. Учитывая, что $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$ и $\sqrt{1+\sin\alpha} < \sqrt{1-\sin\alpha}$, получаем окончательный ответ: $2\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}$.

2.2. Если четырехугольник имеет ось симметрии, то образом любой его вершины при симметрии относительно этой оси является вершина этого же четырехугольника. Следовательно, ось симметрии должна либо являться серединным перпендикуляром к стороне данного треугольника, либо содержать его сторону (см. рис. 22а,б). Поэтому, если данный треугольник не является прямоугольным, то имеем шесть различных вариантов расположения точки D.

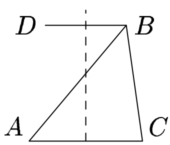


Рис. 22а

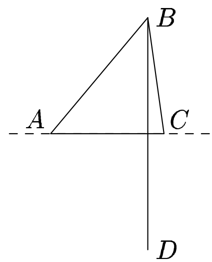


Рис. 22б

Если данный треугольник — прямоугольный, то возможно только три различных варианта расположения точки D, так как при симметриях относительно прямых, содержащих катеты, не образуется четырехугольников, а образы вершин A и B при симметриях относительно серединных перпендикуляров к катетам совпадают (см. рис. 23а–в).

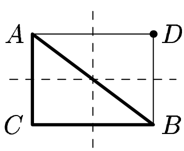


Рис. 23а

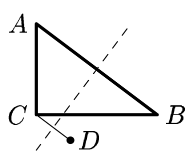


Рис. 23б

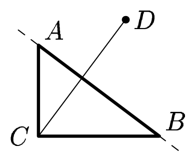


Рис. 23в

2.3. Рассмотрим и преобразуем выражение: $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}(a^2+b^2) > a^2+b^2$. То есть, при каждом выполнении указанной в условии операции, сумма квадратов всех данных чисел увеличивается, значит, мы уже не сможем получить исходный набор чисел, что и требовалось доказать.

3.1. *Первый способ.* Так как данные параболы имеют противоположные коэффициенты при x^2, то существует точка C, при симметрии относительно которой одна из парабол переходит в другую. $\Bigl($Точка $A(0;4)$ — «вершина» параболы $y=x^2+4$; $B(1;1)$ — «вершина» параболы $y=-(x-1)^2+1$. Поэтому, $C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\Bigr)$. Общие касательные двух парабол являются неподвижными прямыми этой центральной симметрии, то есть проходят через точку C (для обоснования этого факта достаточно рассмотреть K — точку касания на одной из парабол и прямую KC, которая пройдет через точку касания другой параболы, так как при любом движении образ пересечения фигур равен пересечению их образов). Четырехугольник с вершинами в точках касания является параллелограммом, так как диагонали этого четырехугольника точкой C их пересечения делятся пополам.

Второй способ. Пусть прямая касается параболы $y=x^2+4$ в точке с абсциссой a, тогда уравнение этой касательной: $y=2ax-a^2+4$. Пусть прямая касается параболы $y=-x^2+2x$ в точке с абсциссой b, тогда уравнение этой касательной: $y=(-2b+2)x+b^2$. Так как эта прямая одновременно является касательной к двум параболам, то имеем систему уравнений: $\begin{cases}2a=-2b+2,\\-a^2+4=b^2.\end{cases}$ Решения этой системы уравнений: $\begin{cases}a=\dfrac{1+\sqrt7}{2},\\b=\dfrac{1-\sqrt7}{2},\end{cases}$ или $\begin{cases}a=\dfrac{1-\sqrt7}{2},\\b=\dfrac{1+\sqrt7}{2}.\end{cases}$ Координаты вершин четырехугольника: $\left(\frac{1+\sqrt7}{2};\frac{12+\sqrt7}{2}\right)$; $\left(\frac{1-\sqrt7}{2};\frac{12-\sqrt7}{2}\right)$; $\left(\frac{1-\sqrt7}{2};-\frac{2+\sqrt7}{2}\right)$; $\left(\frac{1+\sqrt7}{2};\frac{-2+\sqrt7}{2}\right)$. Координаты середины отрезка с координатами концов $\left(\frac{1+\sqrt7}{2};\frac{12+\sqrt7}{2}\right)$ и $\left(\frac{1-\sqrt7}{2};-\frac{2+\sqrt7}{2}\right)$ — $\left(\frac{1}{2};2\frac{1}{2}\right)$. Координаты середины отрезка с координатами концов $\left(\frac{1-\sqrt7}{2};\frac{12-\sqrt7}{2}\right)$ и $\left(\frac{1+\sqrt7}{2};\frac{-2+\sqrt7}{2}\right)$ — $\left(\frac{1}{2};2\frac{1}{2}\right)$. Следовательно, четырехугольник с вершинами в точках касания — параллелограмм.

3.2. Площадь треугольника можно вычислять по формуле: $S=0{,}5ab\cdot\sin\gamma$. Следовательно, $S\leqslant 0{,}5ab\leqslant 0{,}5\cdot5\cdot6=15$, так как наибольшее возможное значение a равно 5, а наибольшее значение b

равно 6. Наибольшее значение площади достигается в случае, когда данный треугольник — прямоугольный с катетами 5 и 6. Это возможно, так как гипотенуза такого прямоугольного треугольника имеет длину $\sqrt{61}$, а $7 < \sqrt{61} < 8$.

Ответ: наибольшее значение площади треугольника равно 15.

3.3. *Первый способ.* Используя метод математической индукции, можно доказать, что если вдоль окружности расположено n чисел, причем $n = 2^k + m$, где $m < 2k$, то при последовательном вычеркивании каждого второго числа последним останется число $2m + 1$. Поскольку $1511 = 1024 + 487 = 210 + 487$, то, в нашем случае, останется число $2 \cdot 487 + 1 = 975$.

Второй способ. Пусть первоначально вдоль окружности расположено n чисел. Искомое число обозначим $f(n)$. Тогда, по условию, имеем рекуррентные соотношения: $f(2n) = 2f(n) - 1$ и $f(2n + 1) = 2f(n) + 1$. Применяя эти соотношения, последовательно получим:

$$\begin{array}{ccc} f(1511) = 2f(755) + 1; & f(755) = 2f(377) + 1; & f(377) = 2f(188) + 1; \\ f(188) = 2f(94) - 1; & f(94) = 2f(47) - 1; & f(47) = 2f(23) + 1; \\ f(23) = 2f(11) + 1; & f(11) = 2f(5) + 1; & f(5) = 2f(2) + 1; \\ & f(2) = 2f(1) - 1. & \end{array}$$

Очевидно, что $f(1) = 1$. Далее, $f(2) = 1$; $f(5) = 3$; ... ; $f(1511) = 975$.

4.1.

$$(b - c)(bc - a^2) = b^2c - a^2b - bc^2 + a^2c;$$
$$(c - a)(ca - b^2) = ac^2 - a^2c - b^2c + ab^2;$$
$$(a - b)(ab - c^2) = a^2b - ab^2 - ac^2 + bc^2;$$
$$(b - c)(bc - a^2) + (c - a)(ca - b^2) + (a - b)(ab - c^2) =$$
$$= b^2c - a^2b - bc^2 + a^2c + ac^2 - a^2c - b^2c +$$
$$+ ab^2 + a^2b - ab^2 - ac^2 + bc^2 = 0.$$

Сумма трех чисел равна нулю, то есть ни при каких действительных a, b и c они не могут быть одновременно положительными, что и требовалось доказать.

4.2. Независимо от способов чередования сторон данного многоугольника найдутся две стороны разной длины, имеющие общую вершину, например, AB и BC (см. рис. 24 на следующей странице). Тогда, точки A, B и C однозначно определяют окружность. Следовательно, искомый радиус окружности не зависит от порядка расположения остальных сторон многоугольника. Тогда, соединив центр окружности с каждой вершиной двенадцатиугольника, имеем два типа равнобедренных треугольников: с основаниями $\sqrt{2}$ и $\sqrt{24}$ соответственно. Сумма углов противолежащих основаниям у двух треугольников разных типов равна $360^\circ : 6 = 60^\circ$, поэтому, применяя свойство вписанного угла, получим: $\angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC = 150^\circ$. В треугольнике ABC сторона AC равна $\sqrt{38}$ (по теореме косинусов). Треугольник AOC — равносторонний, поэтому радиус окружности равен $\sqrt{38}$.

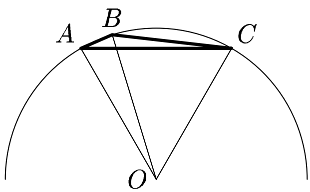


Рис. 24

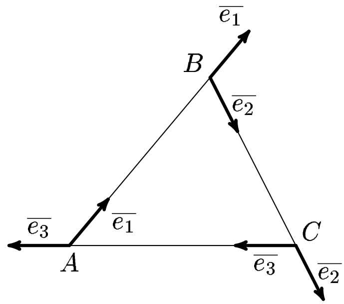


Рис. 25

4.3. При $n = 1$ $x = 10$; при $n = 2$ $x = 30$; при $n = 3$ $x = 100$. Докажем, что число x не может оканчиваться тремя нулями. Для этого достаточно показать, что это число не кратно 8. Если $n > 2$, то каждое из чисел 2^n и 4^n кратно 8, число $1^n = 1$ дает при делении на 8 остаток 1, а число 3^n при делении на 8 дает либо остаток 3 (при нечетных n), либо остаток 1 (при четных n). Следовательно, число x при делении на 8 имеет остаток 4 или остаток 2, то есть тремя нулями оканчиваться не может.

Ответ: двумя нулями.

5.1. Оценка значения выражения «снизу» осуществляется с помощью тригонометрических преобразований, например:

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = \cos A + \cos B + \cos(180^\circ - (A+B)) - 1 =$$
$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - (1 + \cos(A+B)) =$$
$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\frac{A+B}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) \geqslant 2\cos\frac{A+B}{2} \geqslant 1,$$

так как $-90^\circ < \dfrac{A-B}{2} < 90^\circ$, а $0^\circ < \frac{A+B}{2} < 90^\circ$. Для оценки «сверху» значения данного выражения рассмотрим: $\overline{e_1} \parallel \overline{AB}$; $\overline{e_2} \parallel \overline{BC}$; $\overline{e_3} \parallel \overline{AC}$, где $|\overline{e_1}| = |\overline{e_2}| = |\overline{e_3}| = 1$. Тогда, $\angle(\overline{e_1}, \overline{e_2}) = 180\circ - B$; $\angle(\overline{e_2}, \overline{e_3}) = 180^\circ - C$; $\angle(\overline{e_1}, \overline{e_3}) = 180^\circ - A$ (см. рис. 25). Очевидно, что $(\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3})^2 \geqslant 0$. Но

$$\begin{aligned}(\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3})^2 &= \overline{e_1}^2 + \overline{e_2}^2 + \overline{e_3}^2 + 2\overline{e_1}\cdot\overline{e_2} + 2\overline{e_2}\cdot\overline{e_3} + 2\overline{e_1}\cdot\overline{e_3} = \\ &= 1 + 1 + 1 + 2\cos(180^\circ - B) + 2\cos(180^\circ - A) + 2\cos(180^\circ - C) = \\ &= 3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C).\end{aligned}$$

$3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) \geqslant 0 \iff \cos A + \cos B + \cos C \leqslant 1{,}5$. Таким образом, ответ: $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leqslant 1{,}5$.

5.2. *Первый способ* (см. рис. 26а). Для каждого из треугольников PBC, PAC и PAB применив свойство биссектрисы треугольника, имеем:

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{PA}{PB}; \qquad \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{PB}{PC}; \qquad \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{PC}{PA}.$$

Следовательно,

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{PB}{PC}\cdot\frac{PC}{PA}\cdot\frac{PA}{PB} = 1,$$

то есть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (по теореме Чевы), что и требовалось доказать.

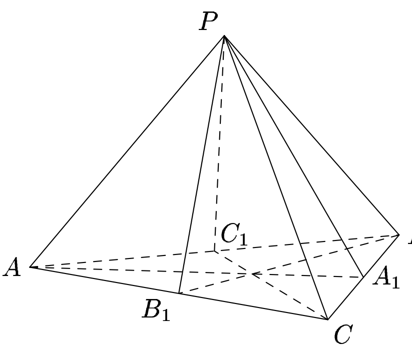


Рис. 26а

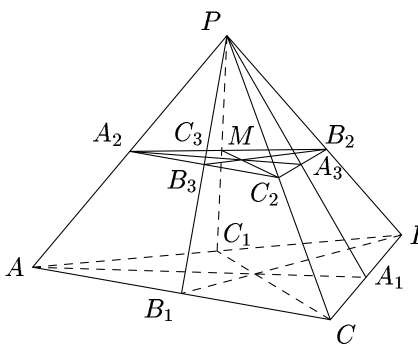


Рис. 26б

Второй способ. Проведем плоскость, пересекающую лучи PA, PB и PC в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно, так что $PA_2 = PB_2 = PC_2$ (см. рис. 26б). Получим тетраэдр $PA_2B_2C_2$: лучи PA_1, PB_1 и PC_1 пересекают ребра его основания в серединах — точках A_3, B_3 и C_3 соответственно. Тогда прямые A_2A_3, B_2B_3 и C_2C_3 содержат медианы треугольника $A_2B_2C_2$, следовательно, пересекаются в точке M. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются образами прямых A_2A_3, B_2B_3 и C_2C_3 при центральном проектировании с центром P плоскости $A_2B_2C_2$ на плоскость ABC. Поскольку такое отображение является взаимно-однозначным, то образом точки M является точка пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1 $\Bigl($если f — взаимно-однозначное соответствие, то $f\Bigl(\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i\Bigr) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} f(X_i)\Bigr)$. Следовательно, AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

5.3. *Первый способ.*

$$\left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right] = 1511 \iff 1511 \leqslant \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < 1512 \iff$$
$$\iff 1510{,}5 \leqslant \sqrt{2n} < 1511{,}5 \iff$$
$$\iff 2281610{,}25 \leqslant 2n < 2284632{,}25 \iff$$
$$\iff 1140805{,}125 \leqslant n < 1142316{,}125.$$

Учитывая, что n — натуральное число, имеем: $1140805 < n \leqslant 1142316$. Количество натуральных решений этого неравенства равно: $1142316 - 1140805 = 1511$.

Второй способ. Последовательность, заданная в условии, в явном виде записывается так: 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; … , поэтому число 1511 встретится в ней 1511 раз. Для доказательства достаточно использовать, что $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$, и проверить, что член последовательности с номером $n(n+1)$ не превышает n, а следующий член уже не меньше, чем $n+1$. Действительно,

$$a_{0,5n(n+1)} = \left[\sqrt{n(n+1)} + \frac{1}{2}\right] < \left[\frac{n+(n+1)}{2} + \frac{1}{2}\right] = [n+1] = n+1,$$

то есть $a_{0,5n(n+1)} \leqslant n$;

$$a_{0,5n(n+1)+1} = \left[\sqrt{n(n+1)+2} + \frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} + \frac{1}{2}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \left[n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = [n+1] = n+1.$$

Ответ: 1511 раз.

Регата 6

1.1.

$$\begin{cases}\sqrt{(x+3)^2} = 3 + x,\\ \sqrt{(x-3)^2} = 3 - x\end{cases} \iff \begin{cases}|x+3| = 3 + x,\\ |x-3| = 3 - x\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}x + 3 \geqslant 0,\\ x - 3 \leqslant 0\end{cases} \iff -3 \leqslant x \leqslant 3.$$

Ответ: $[-3; 3]$.

1.2. *Первый способ.* Проведем CK — биссектрису треугольника ABC (см. рис. 27а). Так как $\angle BCK = \angle BED$, то $CK \parallel ED$. По теореме о пропорциональных отрезках имеем, что $BD : DK = BE : EC = 2$. Следовательно, $BK = 1{,}5BD = 0{,}5AB$, то есть CK — медиана треугольника. Так как CK — медиана и биссектриса, то ABC — равнобедренный треугольник, что и требовалось доказать.

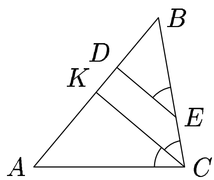


Рис. 27а

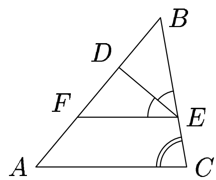


Рис. 27б

Второй способ. Проведем $EF \parallel AC$ (см. рис. 27б). По теореме о пропорциональных отрезках, имеем, что: $BF : AF = BE : EC = 2$. Следовательно, $BF = 2BD$, то есть D — середина BF. Так как ED — биссектриса и медиана треугольника FBE, то он — равнобедренный, но этот треугольник подобен данному, значит, и треугольник ABC — равнобедренный, что и требовалось доказать.

1.3. Предположим, что такой треугольник существует. Тогда, умножив каждую часть данного равенства на выражение $2R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, получим равенство: $BC + AC = AB$, которое противоречит неравенству треугольника.

Ответ: такого треугольника не существует.

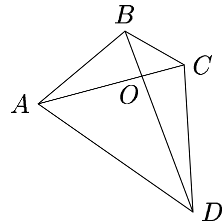


Рис. 28.

2.1. Представим себе, что в доме — только один подъезд. Так как $83 = 4 \cdot 20 + 3$, а $169 = 4 \cdot 42 + 1$, то в этом случае, Коля жил бы на 21 этаже, а Вася — на 43 этаже. Пусть n — реальное количество этажей в доме, тогда из условия задачи и предыдущего рассуждения следует, что $21 \equiv 5 \pmod n$ и $43 \equiv 3 \pmod n$. Следовательно, $21 - 5 = 16$ кратно числу n и $43 - 3 = 40$ кратно числу n. Учитывая, что $n \geqslant 5$, получим, что $n = 8$.

Ответ: в доме — 8 этажей.

2.2. Пусть дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, O — точка пересечения его диагоналей (см. рис. 28). Воспользуемся утверждением: $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{COD}$, которое несложно доказать, если записать площадь каждого из этих треугольников как половину произведения длин их сторон и синуса угла между ними. Возможны три различных случая взаимного расположения треугольников с известными площадями, поэтому обозначив за x площадь четвертого из получившихся треугольников, получим совокупность трех уравнений: $1 \cdot x = 2 \cdot 3$ или $2 \cdot x = 1 \cdot 3$ или $3 \cdot x = 1 \cdot 2$. Ее решения: $x = 6$ или $x = 1{,}5$, или $x = 2/3$.

Ответ: площадь четырехугольника может быть равной 12, 7,5 или $6\frac{2}{3}$.

2.3. Из условия и неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух положительных чисел следует, что $a + b < ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Обозначив $x = a + b$, имеем неравенство $x < \left(\frac{x}{2}\right)^2$, решая которое для $x > 0$, получим, что $x > 4$, что и требовалось доказать.

3.1. Пусть масса третьего сплава равна 1 и в нем содержится x частей первого сплава и $(1 - x)$ частей второго сплава. Выразив количество цинка в каждом из данных сплавов, составляем уравнение: $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}(1 - x) = \frac{17}{44}$. Отсюда, $x = \frac{9}{44}$, а $1 - x = \frac{35}{44}$.

Ответ: сплавы надо взять в отношении 9 : 35.

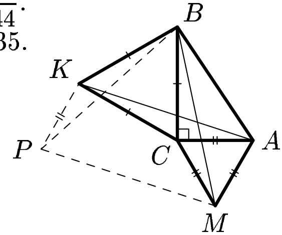


Рис. 29.

3.2. *Первый способ.* Рассмотрим поворот с центром в точке C на угол $60°$. Образами точек B и M при этом преобразовании будут точки K и A соответственно, то есть при таком повороте прямая BM перейдет в прямую AK, следовательно, угол между ними равен $60°$ (см. рис. 29).

Второй способ. Проведя через точки K и M прямые, соответственно параллельные AM и AK, достроим треугольник AKM до параллелограмма $AKPM$ (см. рис. 29). Треугольники BCM, KCA и BKP равны между собой (по двум сторонам и углу величиной $150°$ между ними), следовательно, $BM = AK = BP$. Так как $MP = AK$, то треугольник BMP — равносторонний, то есть, $\angle BMP = 60°$, но $MP \parallel AK$, значит, угол между прямыми BM и AK равен $60°$.

3.3. Так как $\forall\, a \in \mathbb{R}\quad a^2+a+1 > 0$, то функция

$$f(x) = (a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5$$

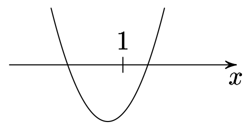


Рис. 30.

является квадратичной. Ее график — парабола, расположенная «ветвями» вверх. Условие задачи равносильно тому, что график имеет две точки пересечения с осью абсцисс, а число 1 лежит на этой оси между точками пересечения (см. рис. 30). Для этого, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $f(1) < 0$. Так как $f(1) = a^2 + 4a - 7$, то, решая неравенство $a^2 + 4a - 7 < 0$, получим: $-2 - \sqrt{11} < a < -2 + \sqrt{11}$.

Ответ: при $a \in (-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11})$.

4.1. Общее количество лжеконтролеров и лжекондукторов в пять раз меньше количества необычных пассажиров (то есть контролеров, кондукторов, лжеконтролеров и лжекондукторов). Следовательно, количество необычных пассажиров кратно 5. Аналогично, количество кондукторов и лжекондукторов в восемь раз меньше количества необычных пассажиров, следовательно, количество необычных пассажиров кратно 8. Таким образом, количество необычных пассажиров кратно 40 и при этом не превосходит 60. Значит, всего имеется 40 необычных пассажиров, а остальные 20 пассажиров — обычные.

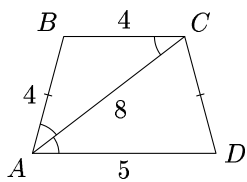


Рис. 31а.

4.2. Пусть в трапеции $ABCD$: $BC \parallel AD$, $BC = 4$, $AD = 5$ и диагональ AC является биссектрисой одного из углов. Возможны два случая:

1) AC — биссектриса острого угла BAD (см. рис. 31а). Тогда, в треугольнике ABC: $AB = BC = 4$, а $AC = 8$, что противоречит неравенству треугольника.

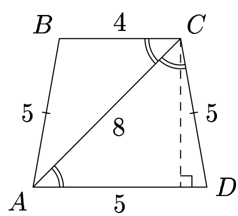


Рис. 31б.

2) CA — биссектриса тупого угла BCD (см. рис. 31б). Тогда, $AB = CD = AD = 5$. Проведем высоту трапеции CK. Сторона $DK = 0{,}5(AD - BC) = 0{,}5$; $AK = 4{,}5$. CK — общий катет

двух прямоугольных треугольников ACK и DCK, значит, должно выполняться числовое равенство: $5^2-0{,}5^2=8^2-4{,}5^2$, которое, на самом деле, неверно.

Ответ: не может.

4.3. Рассмотрим функцию $f(t)=t+\sqrt[6]{t}$. Она определена на $[0;+\infty)$ и возрастает на этом промежутке, следовательно, каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента. Поэтому, из первого уравнения системы следует, что $x=y$. Тогда, из второго уравнения получаем, что $x=y=3$.

Ответ: $(3;3)$.

5.1. Рассмотрим произвольный «кусок» x. Из определения «куска» следует, что для него существует натуральное число n такое, что $12\times\times 10^n<x<13\cdot 10^n$. Аналогично, для второго «куска» y существует $k\in\mathbb{N}$ такое, что $12\cdot 10^k<y<13\cdot 10^k$. Поэтому,

$$144\cdot 10^{n+k}<xy<169\cdot 10^{n+k}.$$

Следовательно, вторая цифра в записи числа xy это 4, 5 или 6. Так как в записи любого «куска» второй слева должна быть цифра 2, то произведение двух «кусков» не является «куском», что и требовалось доказать.

5.2. Проведем отрезок CK (см. рис. 32). $\angle LCK=\angle LAK$ (эти углы вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу). Аналогично, $\angle MCK=\angle MBK$. $\angle ACB==\angle LCK+\angle MCK$. Следовательно, искомый угол ACB в три раза меньше, чем сумма углов треугольника ABC, то есть равен $60°$.

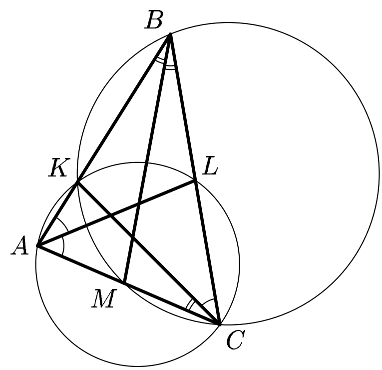


Рис. 32.

Ответ: $\angle ACB=60°$.

5.3. $\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-{}-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Следовательно, существует такое α, что $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\alpha$, а $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin\alpha$. Имеем: $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$, причем значение $\sqrt{2}$ достигается, если $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, то есть, при $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Декартовы координаты искомых точек находим, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ x>0 \\ y<0 \end{cases}.$$

Ответ: см. рис. 33.

Регата 7

1.1. *Ответ*: например,

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{x-2} \quad \text{или} \quad f(x) = \frac{\sqrt{|x-1{,}5|-0{,}5}}{x-2}.$$

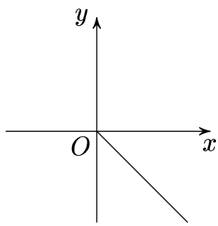


Рис. 33

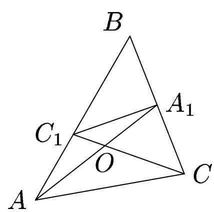


Рис. 34

1.2. Пусть $AA_1 \cap CC_1 = O$ (см. рис. 34). Предположим, что $AO = AO_1$ и $CO = CO_1$. Тогда AC_1A_1C — параллелограмм, следовательно, $AC_1 \parallel A_1C$, но тогда прямые AC_1 и A_1C не пересекаются, то есть, треугольника ABC не существует. Таким образом наше предположение неверно и точка O не является серединой отрезков AA_1 и CC_1.

Ответ: нет.

1.3. Разложим левую часть уравнения на множители. Имеем: $(1+p)(1+p^2) = 2^n$. При любых целых n выражение 3^n принимает положительные значения, следовательно $(1+p)(1+p^2) > 0$, а, значит, $1+p>0 \iff p>-1$. Так как p — также целое число, то одно из решений: $p=0$; $n=0$ — очевидно. Если же $p>0$, то левая часть уравнения (значит, и правая) принимает только натуральные значения (причем каждый из множителей больше единицы), значит, n — натуральное число. Тогда, значение каждого множителя из левой части уравнения должно быть натуральной степенью трех. Но, одновременно быть кратны трем оба множителя не могут. Это можно доказать несколькими способами:

Первый способ. Если $1+p$ делится на 3, то $p = 3k-1$, где $k \in N$. Тогда, $1+p^2 = 9k^2 - 6k + 2$ не делится на 3.

Второй способ. Так как $1+p^2 = (1+p)^2 - 2p$, то числа $1+p^2$ и $1+p$ имеют те же общие делители, что и числа $1+p$ и $2p$. Учитывая, что $1+p$ и $2p$ — взаимнопростые, получим, что общими делителями рассматриваемых натуральных чисел могут являться только числа 2 или 1, в зависимости от четности p. Следовательно, других целых решений уравнение не имеет.

Ответ: $p = 0$; $n = 0$.

Возможно также использование алгоритма Евклида или легко доказываемого факта: $p^2 \neq 3k-1$ ни при каких натуральных p и k.

2.1. В левой части уравнения стоит сумма неотрицательных величин, следовательно, для параметра a должно выполняться условие $-a \geqslant 0$ (то есть, $a \leqslant 0$). Так как при $a < 0$ выражение $\sqrt{a-|x|}$ не определено ни при каких значениях x, то единственное значение параметра, при котором уравнение может иметь корни, это $a = 0$. При $a = 0$ получаем $\sqrt{-x} + \sqrt{x^2} = 0$; $\sqrt{-x} = -|x|$; $x = 0$.

Ответ: при $a = 0$ $x = 0$; при $a \neq 0$ решений нет.

2.2. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, значит, O является точкой пересечения биссектрис треугольника (см. рис. 35).

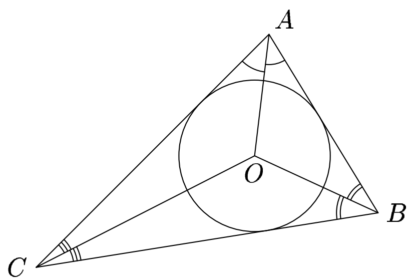


Рис. 35.

1) Рассмотрим треугольник AOB. Так как $\frac{1}{2}\angle A > \frac{1}{2}\angle B$, то $\angle OAB > \angle OBA$. Так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $OB > OA$.

2) Аналогично, из треугольника AOC получаем, что $OC > OA$.

3) Имеем, что $OB > OA$ и $OC > OA$, следовательно, OA — наименьшее из расстояний от центра вписанной окружности до вершин треугольника.

Ответ: к вершине A.

2.3. Если к многоугольнику, все вершины которого белого цвета, «добавить» красную вершину, то получится многоугольник с красной вершиной. То есть, для всех n, таких что $3 < n \leqslant 2000$ каждому выпуклому $(n-1)$-угольнику, все вершины которого — белые, соответствует выпуклый n-угольник с красной вершиной. Но, кроме того, существуют треугольники, имеющие красную вершину. Значит, многоугольников с красной вершиной больше, чем многоугольников без красной вершины.

Ответ: многоугольников, имеющих красную вершину, больше.

Можно подсчитать, на сколько больше: на столько, сколько существует отрезков с белыми концами, то есть на $\frac{1998\cdot 1999}{2}$.

3.1. *Первый способ.*

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=$$
$$=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+xyz}+\frac{xy}{xy+xyz+xyzx}=$$
$$=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+1}+\frac{xy}{xy+1+x}=\frac{1+x+xy}{1+x+xy}=1.$$

Второй способ.

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=$$
$$=\frac{1}{xyz+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=$$
$$=\frac{1}{x(yz+1+y)}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=$$
$$=\frac{1+x}{x(yz+1+y)}+\frac{1}{xyz+z+zx}=$$
$$=\frac{1+x}{xyz+x+xy}+\frac{1}{z(1+x+xy)}=\frac{z+xz+1}{z+xz+xyz}=1.$$

3.2. См. рис. 36 (сравните с «классическим» доказательством теоремы Пифагора, использующем площади квадратов и прямоугольных треугольников).

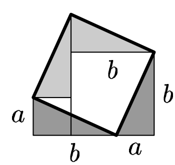


Рис. 36.

3.3. Рассмотрим следующие случаи:

1) Пусть x делится на 45. Тогда x делится на 15, на 9, на 5 и на 3. Следовательно, имеем более трех истинных утверждений, что противоречит условию задачи. Значит, x не делится на 45.

2) Если x делится на 25, то x делится и на 5. Если при этом x делится на 3, то оно кратно и числу 45, что противоречит уже доказанному; если же x в рассматриваемом случае не делится на 3, то оно не кратно

ни одному из оставшихся чисел, что противоречит условию. Значит, x не делится на 25.

3) Если x делится на 15, то оно кратно числам 3 и 5, то есть, имеем уже три истинных утверждения. Следовательно, искомые числа, должны быть кратны числу 15, но не кратны числам 9 и 25.

Ответ: 15; 30; 60.

4.1. Уравнение имеет действительные корни, если $1 - 4a \geqslant 0$, то есть, $a \leqslant \frac{1}{4}$. При $a \leqslant \frac{1}{4}$ $\quad x_1 + x_2 = 1$ и $x_1x_2 = a$.

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 =$$
$$= \left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2(x_1x_2)^2 = (1^2 - 2a)^2 - 2a^2 =$$
$$= 1 - 4a + 4a^2 - 2a^2 = 2a^2 - 4a + 1 = 2(a - 1)^2 - 1.$$

Функция $f(a) = 2(a - 1)^2 - 1$ убывает на промежутке $(-\infty; 1]$ и возрастает на промежутке $[1; +\infty)$. Так как $a \leqslant \frac{1}{4}$, то свое наименьшее значение на промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$ функция $f(a)$ принимает при $a = \frac{1}{4}$.

Ответ: при $a = \frac{1}{4}$.

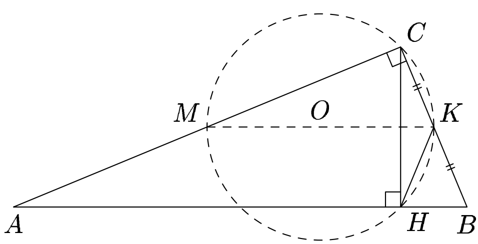


Рис. 37а

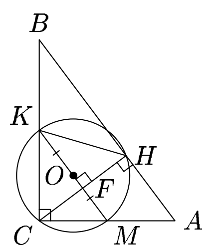


Рис. 37б

4.2. *Первый способ.* Треугольник CHB — прямоугольный, следовательно $KC = KB = KH$ (см. рис. 37а). $\angle MCK$ — прямой, следовательно, MK — диаметр окружности, а так как хорды KC и KH равны, то $MK \perp CH$, а значит, $MK \parallel AB$. Следовательно, MK — средняя линия треугольника ABC; $MK = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$. Искомый радиус: $R = \frac{1}{2}MK = \frac{c}{4}$.

Второй способ.

1) Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника CKH, то есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника (см. рис. 37б). $M = AC \cap \omega(O; OC)$. $\angle KCM$ —

вписан в окружность, $\angle KCM = 90^\circ$, следовательно, KM — диаметр окружности, значит $O \in KM$.

2) Треугольник ACH — прямоугольный; HK — его медиана, проведенная к гипотенузе, следовательно, $HK = \frac{1}{2}BC = CK$. То есть, треугольник CKH — равнобедренный и $(KO) \perp (CH)$. $F = (KO) \cap (CH)$ и F — середина CH, следовательно, KF — средняя линия треугольника BCH, отсюда $(KF) \parallel (AB)$, значит, KM — средняя линия треугольника CAB. Тогда, $KM = \frac{1}{2}c$, то есть, $R = \frac{1}{4}c$.

Ответ: $\frac{1}{4}c$.

4.3. Пусть в короля попало x яиц, y кочанов и 64 кошки. Тогда, герцогу досталось $4x$ яиц и $6y$ кочанов. Так как предметов, угодивших в них, равное количество, то составляем уравнение: $x+y+64 = 4x+6y$, которое равносильно уравнению $3x + 5y = 64$. Из условия задачи следует, что общее количество яиц делится на 3, а общее количество кочанов — на 2. Следовательно, $5x$ кратно трем, а $7y$ кратно двум. С учетом того, что числа 5 и 3, а также числа 7 и 2 образуют пары взаимно простых чисел, имеем, что $x = 3k$, а $y = 2n$, где $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$. Подставляя в исходное уравнение, получаем: $9k + 10n = 64$. Перебором находим, что его решением в натуральных числах является только $n = 1$; $k = 6$. То есть, $x = 18$; $y = 2$. Значит, на представление было принесено $5x = 90$ (яиц), $7y = 14$ (кочана) и 64 кошки. Следовательно, количество зрителей, пришедших на представление, равно: $90 : 3 + 14 : 2 + 64 = 101$.

Ответ: 101.

5.1. Так как $f(0) = c_1$ и $g(0) = c_2$, то $c_1 > c_2 > 0$. Так как «ветви» парабол направлены вверх и парабола $g(x)$ более «пологая», то $a_1 > a_2 > 0$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - g(x)$. Пусть x_1 и x_2 — абсциссы точек пересечения данных парабол, тогда x_1 и x_2 — нули функции $h(x)$. Так как $h(x) = (a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2)$, то по теореме Виета имеем, что $x_1 + x_2 = -\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$. Учитывая, что $a_1 - a_2 > 0$, $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, получим: $b_1 - b_2 = -(x_1 + x_2)(a_1 - a_2) < 0$. Следовательно, $b_1 < b_2$.

Ответ: $a_1 > a_2 > 0$; $b_1 < b_2$; $c_1 > c_2 > 0$.

5.2. Проведем дополнительные построения: $MK \parallel AC$, $MF \parallel AB$, $MN \parallel BC$ (см. рис. 38). Имеем:

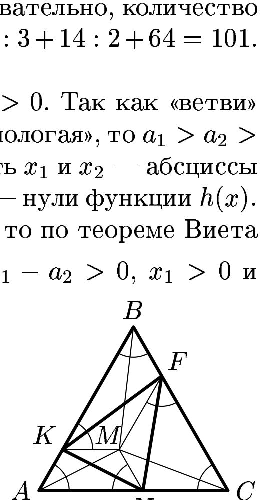


Рис. 38.

1) $AKMN$ — равнобокая трапеция, следовательно, $AM = KN$.

2) $BFMK$ — равнобокая трапеция, следовательно, $BM = KF$.

3) $MFCN$ — равнобокая трапеция, следовательно, $MC = KN$.

Тогда, треугольник KFN — искомый.

Ответ: существует.

5.3. Один из возможных способов решения:

$$1 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2\right) =$$

$$= \left(\frac{9}{25}\right)^2 + \left(\frac{12}{25}\right)^2 + \left(\frac{4}{13}\right)^2 + \left(\frac{48}{65}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{9}{25}\right)^2 + \left(\frac{12}{25}\right)^2 + \left(\frac{4}{13}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) + \left(\frac{48}{65}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{9}{25}\right)^2 + \left(\frac{12}{25}\right)^2 + \left(\frac{12}{65}\right)^2 + \left(\frac{16}{65}\right)^2 + \left(\frac{48}{65}\right)^2.$$

Еще один вариант ответа: $1 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{25}\right)^2 + \left(\frac{36}{125}\right)^2 + \left(\frac{81}{625}\right)^2 + \left(\frac{108}{625}\right)^2$.

Задача легко обобщается: аналогичные представления единицы возможны для любого конечного количества слагаемых.

Регата 8

1.1. Разделим и умножим данное выражение на одно и то же, не равное нулю, число:

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{\cos 36^\circ \cos 18^\circ - \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{0{,}5 \cos 18^\circ + 0{,}5 \cos 54^\circ - 0{,}5 \sin 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{0{,}5 \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = 0{,}5.$$

1.2. Очевидно, что искомый диаметр не меньше, чем наибольшая сторона, то есть, чем 7 см. Так как $4^2 + 5^2 < 7^2$, то данный треугольник — тупоугольный. Следовательно, вершина тупого угла будет лежать внутри круга, диаметром которого является большая сторона треугольника. Диаметр круга, описанного около треугольника, больше, чем 7 см, так как в таком круге большая сторона данного треугольника является хордой, отличной от диаметра.

Ответ: 7 см.

1.3. Например, $1999 = 1999^{15} : 1999^{14} = (1999^3)^5 : (1999^2)^7$.

2.1. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \\ + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) = 2;$$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = 2$, где $x \neq -1, -2, -3$. В итоге, получим квадратное уравнение $x^2 + 4x - 2 = 0$.

Ответ: $-2 \pm \sqrt{6}$.

2.2. Обозначим площади четырех треугольников, указанных в условии, S_1, S_2, S_3, S_4 (см. рис. 39), а радиусы вписанных в них кругов — r_1, r_2, r_3 и r_4 соответственно. Тогда, воспользовавшись формулой для вычисления площади треугольника: $S = 0{,}5ab\sin\gamma$ и тождеством $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, получим, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. С другой стороны, площадь треугольника может быть найдена как произведение его полупериметра и радиуса вписанной окружности. Так как, по условию, периметры всех четырех треугольников равны, то $r_4 = \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2} = \frac{3 \cdot 6}{4} = 4{,}5$.

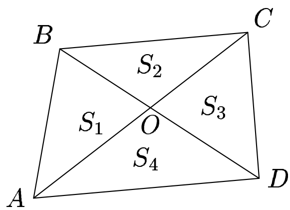


Рис. 39.

Ответ: 4,5.

2.3. Ситуацию, описанную в условии задачи, удобно изобразить с помощью «кругов Эйлера» (см. рис. 40). Обозначим: $x = a + b + c$ — количество человек, участвовавших ровно в одной олимпиаде; $y = d + e + f$ — количество человек, участвовавших ровно в двух олимпиадах. Составим системы уравнений: а) $\begin{cases} 2y + 2g = x + y + g, \\ 3g = x + y + g \end{cases} \iff$

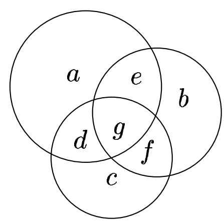


Рис. 40.

$$\iff \begin{cases} 3g = 2x, \\ g = 2y \end{cases}; \quad \text{б)} \begin{cases} a + d + e + g = 100, \\ b + e + f + g = 50, \\ c + d + g + f = 48 \end{cases} \iff x + 2y + 3g = 198,$$

откуда $g = 36$, $x = 54$, $y = 18$.

Ответ: 108 человек.

3.1. *Ответ*: $-\sqrt{2}$ (см. регата 6, 5.3.).

3.2. Если данные плоскости совпадают или параллельны, то утверждение очевидно. В случае, если данные плоскости α и β пересекаются по прямой c (см. рис. 41), то ортогональной проекцией тела F на прямую c является отрезок d. Рассмотрим круги, являющиеся ортогональными проекциями F на каждую из данных плоскостей, и ортогонально спроектируем каждый из них на прямую c. По теореме о трех перпендикулярах, мы получим тот же отрезок d, а так как в плоскости проекцией круга на прямую является диаметр этого круга, то диаметры рассматриваемых кругов равны, что и требовалось доказать.

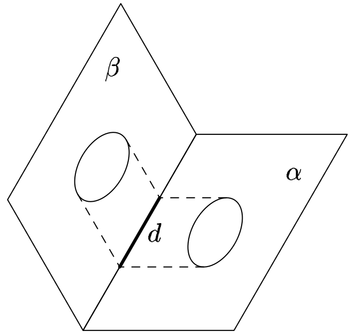


Рис. 41.

3.3. Пусть $\operatorname{tg} x = n$, а $\operatorname{tg} 2x = m$, тогда, используя формулу тангенса двойного аргумента, получим: $\dfrac{2n}{1-n^2} = m \iff \dfrac{-2n}{(n-1)(n+1)} = m$. Так как НОД$(n, n-1) = 1$, то, для того, чтобы m было целым, необходимо и достаточно, чтобы число $\dfrac{2}{n^2-1}$ было целым, что выполняется только в случае, если $n^2 = 0$. Следовательно, $m = n = 0$.

Ответ: $x = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

4.1. Пусть существует такая функция $f(x)$, тогда, вместе с каждым значением x в ее область определения входит и $-x$ (условие 1). Используя условие 2 получим, что $f((-x)^2) = -x$, но, с другой стороны, $f((-x)^2) = f(x^2) = x$. Отсюда следует, что x должен быть тождественно равен нулю, что опять же противоречит условию 2.

Ответ: не существует.

4.2. Пусть $ABCD$ — данная пирамида, а $A_1B_1C_1D_1$ — пирамида, вершины которой есть точки пересечения медиан (центры тяжести) граней данной (см. рис. 42). Используя свойство медиан и свойства средней линии треугольника, а также подобие треугольников, получим, что каждое ребро второй пирамиды параллельно соответствующе-

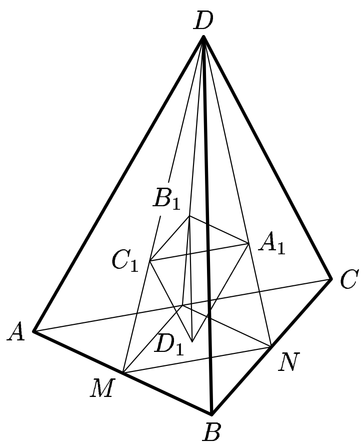


Рис. 42.

му ребру первой, а его длина — втрое меньше длины соответствующего ребра (например, $C_1A_1 \parallel MN \parallel AC$ и $C_1A_1 = \frac{2}{3}MN = \frac{1}{3}AC$.) Таким образом, каждая грань тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ подобна соответствующей грани тетраэдра $ABCD$ с коэффициентом $\frac{1}{3}$. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента их подобия, поэтому площадь полной поверхности пирамиды $A_1B_1C_1D_1$ равна $\frac{S}{9}$.

4.3. Очевидно, что при $n = 0$ или при $n = 1$ данное выражение принимает целые значения. Докажем, что других целых значений n, удовлетворяющих условию, не существует. При всех натуральных n, кроме $n = 1$, выполняется неравенство $(n-1)^2 < n^2-n+1 < n^2$, поэтому для таких n число $n^2 - n + 1$ не может быть квадратом целого числа. Аналогично, для всех целых отрицательных n выполняется неравенство $(n - 1)^2 > n^2 - n + 1 > n^2$, поэтому и для таких n число $n^2 - n + 1$ не может быть квадратом целого числа.

Ответ: $n = 0$ или $n = 1$.

5.1. Например, $f(x) = \sqrt[7]{\sin(\pi x)}$. Действительно, $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{\pi}{7}\sin^{-\frac{6}{7}}(\pi x)\cos(\pi x)$, а $f'(x)$ дифференцируема во всех точках области определения, то есть, для всех x таких, что $\sin(\pi x) \neq 0 \iff \pi x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \iff x \notin \mathbb{Z}$.

5.2. Сумма всех внутренних углов любого выпуклого n-угольника равна $2\pi(n-2)$, причем величина α_k любого его внутреннего угла такова, что $0 < \alpha_k < \pi$. Следовательно, $\forall\, \alpha_k \quad \pi - \alpha_k > 0$. Используя тождество $\sin\alpha = \sin(\pi-\alpha)$, и неравенство $\sin x < x$, справедливое $\forall\, x > 0$, получим: $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\alpha_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(\pi - \alpha_k) < \sum\limits_{k=1}^{n} (\pi - \alpha_k) = \pi n - \pi(n-2) = 2\pi$, что и требовалось доказать.

5.3. Верно. Пусть $x_n = \overline{a_1 \ldots a_t}$ — некоторый член арифметической прогрессии, а ее разность $d = \overline{b_1 \ldots b_k}$. Тогда, например, члены этой прогрессии $x_s = x_n + d \cdot 10^t = \overline{b_1 \ldots b_k a_1 \ldots a_t}$ и $x_p = x_n + d \cdot 10^{t+1} = \overline{b_1 \ldots b_k 0 a_1 \ldots a_t}$ имеют одинаковую сумму цифр.

Регата 9

1.1. Раскрыв скобки, имеем: $1-2+3-4+\ldots+1999-2000+x = 1000$; $-1000 + x = 1000$; $x = 2000$.

Ответ: 2000.

1.2. Нет. Рассмотрим, например, два треугольника, в одном из которых длину 6 см имеет основание, а в другом — боковая сторона, причем величину 100° имеет в каждом треугольнике угол при вершине (угол при основании равнобедренного треугольника не может быть тупым). Треугольники не равны, так как не равны их соответствующие стороны.

1.3. Например, $2001 = \dfrac{\left(2001^9\right)^9}{\left(2001^8\right)^{10}}$.

2.1. Обозначив неизвестные коэффициенты a, b и c соответственно, и приведя к стандартному виду многочлены в левой и правой части, имеем:

$$(x^2 + ax + 2)(x + 3) = x^3 + (a + 3)x^2 + (3a + 2)x + 6;$$
$$(x + b)(x^2 + cx + 6) = x^3 + (b + c)x^2 + (bc + 6) + 6b.$$

Данное равенство будет являться тождеством тогда и только тогда, когда одновременно выполняются равенства: $6b = 6$; $bc + 6 = 3a + 2$; $b + c = a + 3$. Решая соответствующую систему уравнений, получим, что $b = 1$; $a = 3$; $c = 5$.

Ответ: $(x^2 + 3x + 2)(x + 3) = (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$.

Так как по условию задачи не требуется доказывать единственность искомого набора чисел, то возможно также решение методом подбора.

2.2. Достаточно зачеркнуть четыре точки, например так (см. рис. 43):

Тот факт, что меньше четырех точек зачеркнуть нельзя, учащиеся (при данной формулировке условия) доказывать не обязаны.

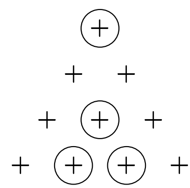


Рис. 43.

2.3.

$$\frac{8 + 222 \cdot 444 \cdot 888 + 444 \cdot 888 \cdot 1776}{2 \cdot 4 \cdot 8 + 444 \cdot 888 \cdot 1776 + 888 \cdot 1776 \cdot 3552} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (1 + 222^2 + 444^2)}{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot (1 + 222^2 + 444^2)} = \frac{1}{8}.$$

3.1. *Первый способ.* Так как $b = \dfrac{a + c}{2}$, то $a > b > c$. Тогда,

$$ab + bc - ac - b^2 = (ab - ac) + (bc - b^2) = a(b - c) - b(b - c) = (a - b)(b - c) > 0.$$

Второй способ. Подставим значение b в данное выражение и преобразуем его, используя формулы сокращенного умножения:

$$ab + bc - ac - b^2 = a \cdot \frac{a+c}{2} + \frac{a+c}{2} \cdot c - ac - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \frac{(a+c)^2}{4} - ac = \frac{(a+c)^2}{4} - ac = \frac{(a-c)^2}{4} > 0,$$

так как $a > c$.

3.2. В прямоугольном треугольнике AHC с прямым углом H отрезок MH является медианой, проведенной к гипотенузе (см. рис. 44). Следовательно, $AC = 2MH = 20$ см.

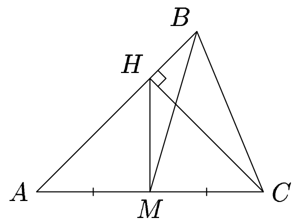


Рис. 44.

3.3. Пусть истинно высказывание Винтика, тогда должно выполняться равенство: $n + 3n + 6n = 64$, где n — количество фигур, оставшихся у Винтика. Так как n — натуральное число, то равенство выполняться не может, то есть, рассказу Винтика верить нельзя. Аналогично, если истинно высказывание Шпунтика, то должно выполняться равенство: $m + 5m + 10m = 64$, где m — количество фигур, оставшихся у Шпунтика. Это равенство верно при $m = 4$, но, так как у его соперника в этом случае должно остаться 20 фигур, а количество шахматных фигур одного цвета во время партии не может быть больше 16, то рассказу Шпунтика также верить нельзя.

Ответ: ни одному из рассказов верить нельзя.

4.1. В первом случае, наименьшее количество занятых сидений равно 7, а наибольшее — 13. Во втором случае, наименьшее количество занятых сидений равно 5, а наибольшее — 10. Таким образом, если x — количество всех сидений в автобусе, то выполняются неравенства: $7 + 9 \leqslant x \leqslant 13 + 9$ и $5 + 6 \leqslant x \leqslant 10 + 6$. Отсюда, единственным возможным значением x является 16, причем оно может достигаться только тогда, когда в первом случае занято максимальное количество двухместных сидений, а во втором случае занято максимальное количество одноместных. Проверяем: в первом случае, 13 человек заняли 6 двухместных и одно одноместное сидение, оставив 9 одноместных сидений свободными; во втором случае, 10 человек заняли 10 одноместных сидений, оставив 6 двухместных сидений свободными. То есть, условие задачи выполняется, если в автобусе шесть сидений — двухместных и десять сидений — одноместных.

Ответ: 16.

4.2. Так как после каждого разреза количество частей не может возрасти более, чем в два раза, а $64 = 2^6$, то количество разрезов не может быть меньше 6. Остается привести пример, когда количество разрезов равно 6. Для этого достаточно, после разреза куба на две равные части плоскостью, параллельной двум его граням, поставить полученные части «в столбик» и произвести второй разрез, в результате которого мы получим четыре кубика. Их, в свою очередь, ставим «в столбик», производим разрез, который опять удваивает количество равных частей и так далее.

Ответ: 6.

4.3. Пусть x — номер квартиры Джона. Тогда, номер его этажа равен $239 - x$. Частное от деления с остатком номера квартиры на 10 равно номеру предыдущего этажа, поэтому: $x = 10 \cdot (238 - x) + r$, где $0 \leqslant r < 9$, $11x = 2380 + r$, $x = 216 + \dfrac{4 + r}{11}$. $x \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $r = 7$. $x = 217$.

Ответ: 217.

Регата 10

1.1. Не может. Это можно доказать несколькими способами.

Первый способ. Пусть график имеет указанный вид, тогда существует прямая, пересекающая его в четырех точках. Пусть ее уравнение имеет вид $y = mx + n$, тогда уравнение $\dfrac{ax^2 + bx + c}{kx + l} = mx + n$ имеет четыре корня, но его следствием является квадратное уравнение, то есть, оно не может иметь более двух корней. Получено противоречие, следовательно, график данной функции не может иметь такой вид.

Второй способ. Формулу, задающую данную функцию можно привести к виду: $y = px + \dfrac{qx + t}{kx + l}$. При $k \neq 0$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{qx + t}{kx + l} = \dfrac{q}{k}$, поэтому прямая $y = px + \dfrac{q}{k}$ должна являться асимптотой графика данной функции как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$, что не соответствует виду графика данной функции.

1.2. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (см. рис. 45). Проведем диагональ AC и высоту CK. Тогда, $\angle CAD = \alpha$, $CK = 2r$, следовательно, $AK = \dfrac{2r}{\operatorname{tg}\alpha}$. Используя свойство описанного четырехугольника, легко доказать, что в данной трапеции боковая сторона равна средней линии, которая, в свою очередь, равна AK. *Ответ:* $\dfrac{2r}{\operatorname{tg}\alpha}$.

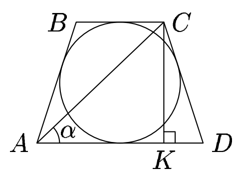


Рис. 45.

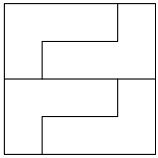


Рис. 46а

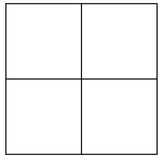


Рис. 46б

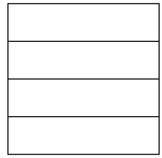


Рис. 46в

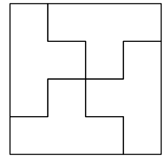


Рис. 46г

1.3. Существует всего пять различных видов многоугольников, состоящих из четырех клеток. Четыре возможных варианта — на рис. 46 а)–г). Еще один вид получить указанным разрезанием невозможно.

Ответ: 4.

2.1. Да, например, функция $f(x) = 2x + \sin x$ является возрастающей, а функция $g(x) = -2x$ — убывающей. Их сумма: $y = \sin x$ — периодическая функция. Несложно также привести какой-либо пример, задав функции графически.

2.2. Проведем отрезок $KM \parallel CN$ (см. рис. 47). M — середина BN, т.е,, KM — средняя линия BCN. Следовательно, $KM = \frac{1}{2}CN = \frac{1}{3}AB$. Треугольники KTM и ATB подобны, $\frac{KT}{AT} = \frac{KM}{AB} = \frac{1}{3}$.

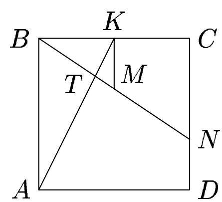


Рис. 47.

Пусть $S_{BTA} = S$, тогда $S_BTK = \frac{1}{3}S$, а $S_{BCN} = $ $= \frac{4}{3}S_{ABK} = \frac{16}{9}S$. Так как $S_{BCN} = S_{BTK} + S_{KCNT}$, то составляем уравнение: $\frac{16}{9}S = \frac{1}{3}S + 13$. Решая уравнение, получим, что $S = 9$.

2.3. Для любых x выполняются неравенства: $\cos^5 x \leqslant \cos^2 x$ и $\sin^3 x \leqslant \sin^2 x$. Следовательно,

$$5\cos^5 x + 3\sin^3 x \leqslant 5\cos^2 x + 3\sin^2 x = \\ = 2\cos^2 x + 3(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2\cos^2 x + 3 \leqslant 5.$$

Таким образом, решениями исходного уравнения являются значения x, при которых все неравенства можно заменить на равенства. Это достигается тогда и только тогда, когда $\cos x = 1$, а $\sin x = 0$.

Ответ: $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.1. Из первого уравнения системы следует, что $(x; y; z; u; s; t)$ — геометрическая прогрессия. Из второго уравнения получим, что ее знаменатель равен 0,5. Тогда, используя формулу для вычисления суммы первых членов геометрической прогрессии, приводим третье уравнение системы к виду:

$$\frac{x\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{63}{4}.$$

Получим, что $x = 8$ и последовательно вычислим значения остальных переменных: $y = 4$, $z = 2$, $u = 1$, $s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{4}$.

3.2. Предположим, что такой тетраэдр $ABCD$ существует (см. рис. 48). Тогда, для его ребер должны выполняться четыре неравенства:

$$AB + BC + AC > DA + DB + DC;$$
$$AB + BD + AD > CA + CB + CD;$$
$$AC + CD + AD > BA + BC + BD;$$
$$BC + CD + BD > AB + AC + AD.$$

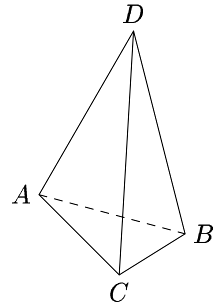


Рис. 48.

Сложив их почленно, получаем ложное неравенство:

$$2AB + 2BC + 2AC + 2AD + 2BD + 2CD >$$
$$> 2AB + 2BC + 2AC + 2AD + 2BD + 2CD.$$

Получено противоречие, следовательно, тетраэдра, удовлетворяющего условию задачи, не существует.

3.3. Докажем, что набор, состоящий только из единицы и простых чисел, меньших пятидесяти заведомо удовлетворяет условию задачи. Действительно, пусть в этот набор вошло составное число n. Тогда число n можно заменить на любой его простой делитель, так как ни один из них не может быть включен в набор одновременно с n. Таким образом количество чисел в нужном нам наборе на единицу больше, чем количество простых чисел, меньших пятидесяти.

Ответ: 16.

4.1. *Первый способ.* Перенесем выражение $2001x^{2000}$ в левую часть уравнения, и, сложим его с x^{2000}. Разобьем получившееся выражение $-2000x^{2000}$ на 1000 одинаковых слагаемых, каждое из которых равно $-2x^{2000}$, и сгруппируем:

$$(1-2x^{2000}+x^{4000})+(x^2-2x^{2000}+x^{3998})+\ldots+(x^{1998}-2x^{2000}+x^{2002}) = 0.$$

Применив формулу квадрата двучлена, получаем:

$$(1 - x^{2000})^2 + (x - x^{1999})^2 + \ldots + (x^{999} - x^{1001})^2 = 0.$$

Следовательно, каждое из слагаемых в левой части уравнения равно нулю, то есть, одновременно выполняются равенства: $x^{2000} = 1$; $x^{1999} = x$; $\ldots$; $x^{1001} = x^{999}$. Получаем ответ: $x = \pm 1$.

Второй способ. Проверив, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения, разделим обе его части на x^{2000}. Получим:

$$\frac{1}{x^{2000}} + \frac{1}{x^{1998}} + \ldots + 1 + \ldots + x^{1998} + x^{2000} = 2001.$$

Левая часть этого уравнения является суммой единицы и тысячи слагаемых вида $x^{2n} + \frac{1}{x}^{2n}$, где $n = 1, 2, \ldots, 1000$. Воспользуемся тем, что сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше двух, и получим, что левая часть уравнения принимает значения большие или равные 2001, причем равенство возможно тогда и только тогда, когда $x^{2n} = 1$ при всех указанных значениях n, то есть, $x = \pm 1$.

4.2. *Первый способ.* Рассмотрим поворот вокруг точки B на 90° против часовой стрелки. Образом точки M будет являться точка A, а образом точки K — точка L, лежащая на прямой CB, причем $LB = BC$ (см. рис. 49). Так как BE — средняя линия треугольника ALC, то $BE \parallel AL$. AL — образ прямой KM при данном повороте, значит, $AL \perp KM$, следовательно, и $BE \perp KM$, то есть, продолжение BE будет являться высотой треугольника BMK, что и требовалось доказать.

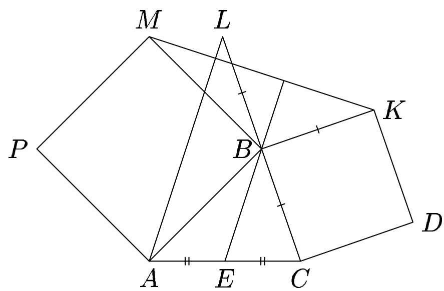


Рис. 49.

Второй способ. Рассмотрим векторы: $\overline{BA} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{b}$, $\overline{BM} = \overline{x}$, $\overline{BK} = \overline{y}$. Тогда, $\overline{BE} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b})$. Так как $\overline{x} \perp \overline{a}$, $\overline{y} \perp \overline{b}$, то $\overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{b} \cdot \overline{y} = 0$. Кроме того, эти четыре вектора имеют одинаковые модули и $\angle(\overline{a}, \overline{y}) = 90^\circ + \angle ABC = \angle(\overline{b}, \overline{x})$, следовательно, $\overline{a} \cdot \overline{y} = \overline{b} \cdot \overline{x}$. Используя полученные факты, имеем:

$$\overline{BE} \cdot \overline{MK} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b})(\overline{y} - \overline{x}) = \frac{1}{2}(\overline{a} \cdot \overline{y} + \overline{b} \cdot \overline{y} - \overline{a} \cdot \overline{x} - \overline{b} \cdot \overline{x}) = \frac{1}{2}(\overline{a} \cdot \overline{y} - \overline{b} \cdot \overline{x}) = 0,$$

то есть, $\overline{BE} \perp \overline{MK}$, а это и означает, что прямая BE содержит высоту треугольника BMK, что и требовалось доказать.

4.3. Выразим y через x и разделим числитель на знаменатель:

$$y = \frac{12x^2 - 4x - 9}{2x - 3} = 6x + 7 + \frac{12}{2x - 3}.$$

Для того, чтобы значение y было натуральным, необходимо, чтобы $2x - 3$ являлось делителем числа 12. Учитывая, что при натуральных значениях x это выражение принимает только нечетные значения, достаточно рассмотреть значения $2x - 3$, равные ± 1 или ± 3; решаем соответствующие уравнения, отбираем натуральные корни и для них проверяем, является ли значение y натуральным.

Ответ: $(1;1)$; $(2;31)$; $(3;29)$.

5.1. Воспользуемся формулой

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

которую можно вывести, умножив и разделив левую часть на $2\sin\frac{\alpha}{2}$ или доказать, используя метод математической индукции. При любых значениях α числитель этой дроби не превосходит единицы. При $\alpha = \sqrt{2}$ знаменатель этой дроби принимает значения большие, чем 0,5, так как $\sin\frac{\sqrt{2}}{2} > \sin\frac{\pi}{6}$. Следовательно, данная сумма меньше двух.

Ответ: не существует.

5.2. Существует. В любом правильном пятиугольнике точки попарного пересечения диагоналей обладают указанным свойством. Рассмотрим правильный пятиугольник F и его невырожденную параллельную проекцию F_1 на некоторую плоскость, не параллельную плоскости пятиугольника F. Так как параллельное проектирование сохраняет параллельность прямых и отношение длин параллельных отрезков, то F_1 — пятиугольник, удовлетворяющий условию задачи.

5.3. *Первый способ.* Перенесем слагаемое -1 в левую часть уравнения и рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + [x] + 1$. Тогда, данное уравнение можно записать в виде: $f(f(x)) = x$. Так как $\forall x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $[x] \leqslant x < [x]+1$, то $f(x) > x$. Следовательно, $f(f(x)) > f(x) > x$, то есть, данное уравнение корней не имеет. Заключительный вывод может быть получен и из других соображений. Справедливость равенства $f(f(x)) = x$ означает, что функцией, обратной к $f(x)$ является она сама. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$, причем, из неравенства $f(x) > x$ следует, что график функции $f(x)$ должен располагаться выше этой прямой, значит, график обратной ей функции — ниже. Следовательно, совпасть эти два графика не могут.

Второй способ. Пусть $x^2+[x]+1=y$, тогда, $y^2+[y]=x-1$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2+[y]+1=x, \\ x^2+[x]+1=y. \end{cases}$$

Ее следствием является уравнение $(y^2-x^2)+([y]-[x])=x-y$. Пусть $x \geqslant y$, тогда, $x^2 \geqslant y^2$ и $[x] \geqslant [y]$, то есть, правая часть этого уравнения принимает неотрицательные значения, а левая часть — неположительные. Аналогичная ситуация возникает и в случае, когда $y \geqslant x$. Таким образом, равенство возможно только, если $x=y$. Следовательно, данное уравнение равносильно уравнению $x^2+[x]+1=x$, которое не имеет решений, так как $\forall x \in \mathbb{R} \quad x < [x]+1$.

Регата 11

1.1. Найдем области определения каждого из квадратных корней. Первый из них определен, если $x \leqslant \dfrac{1999}{2000}$, а второй, если $x \geqslant \dfrac{2000}{2001}$. Так как $1-\dfrac{1999}{2000}=\dfrac{1}{2000}>\dfrac{1}{2001}=1-\dfrac{2000}{2001}$, то $\dfrac{1999}{2000}<\dfrac{2000}{2001}$. Следовательно, таких значений x, для которых левая часть уравнения имеет смысл, не существует, то есть, уравнение не имеет корней.

1.2. 1) Пусть точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB (см. рис. 50а). Тогда, BC и AD — высоты треугольника APB, так как $\angle ACB = \angle ADB = 90°$ (вписанные углы, опирающиеся на диаметр). Q — точка пересечения высот треугольника APB, значит, третья высота этого треугольника принадлежит прямой PQ, то есть, $AB \perp PQ$, что и требовалось доказать. При другом порядке расположения точек C и D в той же полуплоскости меняются «ролями» точки P и Q.

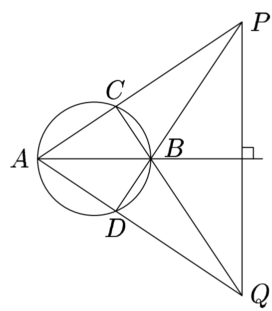


Рис. 50а.

2) В случае, если точки C и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB, меняются «ролями» прямые AB и PQ (см., например, рис. 50б на следующей странице). Доказательство для данного случая проводится аналогично.

1.3. Наибольшим среди таких чисел является число 9876543201, так как число 9876543210, которое является наибольшим среди десятизначных чисел, все цифры в десятичной записи которых различны, при делении на 7 дает остаток 2, а указанное число меньше его на 9.

2.1. Умножим числитель данной дроби на выражение $(3-2)$. Так как его значение равно 1, то величина дроби не изменится. Применив одну и ту же формулу сокращенного умножения $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ несколько раз, получим, что данная дробь равна $\dfrac{3^{1024} - 2^{1024} + 2^{1024}}{3^{1024}} = 1$.

Ответ: 1.

2.2. Рассмотрим равнобокую трапецию $ABCD$ и окружность с центром O и радиусом r, вписанную в нее.

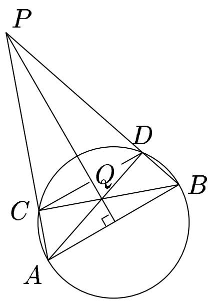


Рис. 50б

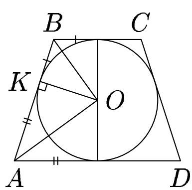


Рис. 51а

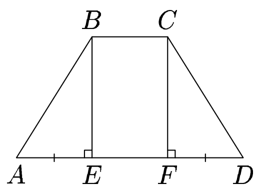


Рис. 51б

Первый способ. Окружность касается оснований трапеции в их серединах, K — точка касания окружности с боковой стороной AB (см. рис. 51а). По свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки, $AK = \frac{1}{2}AD = 9$ см, $BK = \frac{1}{2}BC = 4$ см, $\angle AOB = 90°$, так как образован биссектрисами углов, сумма величин которых равна $180°$. OK — высота прямоугольного треугольника AOB, проведенная к гипотенузе. Ее длина равна среднему пропорциональному длин отрезков AK и BK, то есть, $OK = r = 6$ см.

Второй способ. По свойству описанного четырехугольника $AB + CD = BC + AD$, следовательно, $AB = CD = (BC + AD) : 2 = 13$ см. Проведем высоты трапеции BE и CF (см. рис. 51б). $AE = DF = (AD - BC) : 2 = 5$ см. Применив теорему Пифагора для любого из треугольников ABE или CDF, получим, что высота трапеции равна 12 см. Радиус вписанной окружности равен половине высоты, то есть, 6 см.

2.3. Нет, например, если в первой строке первые 99 клеток покрашены в 99 различных цветов, а последняя клетка второй строки покрашена в сотый цвет.

3.1. Пусть x — количество мальчиков, а y — количество девочек; a рублей стоит пирожок, b рублей стоит булочка. Составляем уравнение: $xa+yb+1 = xb+ya$. Переносим все слагаемые, содержащие переменные, в одну часть и раскладываем на множители: $(x-y)(b-a) = 1$. По условию, $x > y$, следовательно, $a < b$. Так как $b-a > 0{,}5$, то $x-y < 2$. Так как x и y — целые и $x > y$, то $x-y = 1$, следовательно, $b-a = 1$. То есть, мальчиков на одного человека больше, чем девочек, а булочка дороже пирожка на 1 рубль.

3.2. Пусть E и F — середины сторон BC и AD, а M и K — середины диагоналей AC и BD (см. рис. 52).

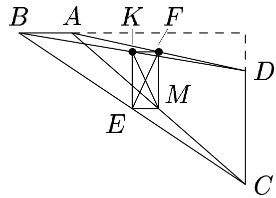


Рис. 52.

Первый способ. Соединим последовательно точки K, F, M и E. Так как отрезок KF является средней линией треугольника DBA, то $KF \parallel AB$ и $KF = 0{,}5AB$. Аналогично, EM — средняя линия треугольника CAB, значит, $EM \parallel AB$ и $EM = 0{,}5AB$. Следовательно, $KF \parallel EM$ и $KF = EM$, то есть, четырехугольник $KFME$ — параллелограмм. Так как KE — средняя линия треугольника DBC, то $KE \parallel DC$. По условию, $AB \perp CD$, а по ранее доказанному, $KF \parallel AB$, следовательно, $KE \perp KF$, то есть, $KFME$ — прямоугольник. Используя равенство диагоналей прямоугольника, получим: $MK = EF = 5$.

Второй способ. Рассмотрим декартову систему координат: $O(0;0)$ — точка пересечения прямых AB и CD; AB — ось x; CD — ось y. Тогда, $A(a;0)$; $B(b;0)$; $C(0;c)$; $D(0;d)$. Используя формулу для вычисления координат середины отрезка, получим, что $E(0{,}5b;0{,}5c)$; $F(0{,}5a;0{,}5d)$; $M(0{,}5a;0{,}5c)$; $K(0{,}5b;0{,}5d)$. Применив формулу для вычисления расстояния между точками на координатной плоскости ($PQ = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$), получим, что $MK = EF = 5$.

Ответ: 5.

3.3. Нет. Доказательство можно провести несколькими способами.

Первый способ. Если конь стоит в центральной клетке доски, то он «бьет» восемь полей, а если на любой другой, то не более шести. Таким образом, из 22 свободных клеток доски «битыми» могут оказаться не более, чем двадцать.

Второй способ. Рассмотрим традиционную «шахматную» раскраску данной доски. Тогда тринадцать полей данной доски будут иметь черный цвет, а двенадцать — белый. Если шахматный конь стоит на черной клетке, то он «бьет» только белые клетки, и наоборот. Таким образом, каждый из трех коней будет бить не более восьми клеток одного цвета, значит найдутся клетки, которые не будут заняты и не будут «биты».

4.1. Пусть x_0 — общий корень данных уравнений, причем $x_0 \neq 0$, в чем легко убедится непосредственной проверкой. Подставим число x_0 в каждое из уравнений, умножим обе части первого из получившихся верных равенств на x_0 и вычтем второе равенство. Получим, что $x_0 = 1$, то есть, если данные уравнения имеют общий корень при каких-то значениях a, то он равен 1. Подставив $x = 1$ в любое из уравнений, получим, что $a = -2$, то есть, для того чтобы число 1 являлось общим корнем данных уравнений, *необходимо*, чтобы $a = -2$. Достаточность этого условия проверяется подстановкой $x = 1$ и $a = -2$ в другое уравнение.

Ответ: при $a = -2$.

4.2. Искомой точкой является ортоцентр треугольника (точка пересечения его высот), который лежит внутри данного треугольника, так как, по условию, он — остроугольный. Предположим, что это не так, выберем точку M внутри данного треугольника ABC, не совпадающую с его ортоцентром H, и рассмотрим сумму расстояний от точки M до всех вершин и до всех сторон треугольника (см. рис. 53). Попарно сгруппировав длины отрезков, применив неравенство треугольника и то, что гипотенуза прямоугольного треугольника больше его катета, получим:

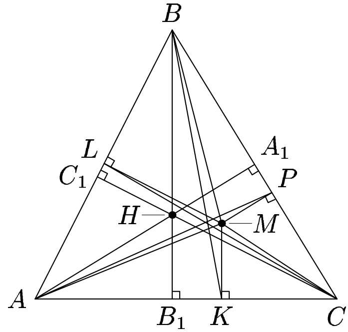


Рис. 53.

$$\begin{aligned} &MA + MB + MC + MP + MK + ML = \\ &\qquad = (MA + MP) + (MB + MK) + (MC + ML) > \\ &\qquad > AP + BK + CL > AA_1 + BB_1 + CC_1 = \\ &\qquad = HA + HA_1 + HB + HB_1 + HC + HC_1. \end{aligned}$$

Отметим, что если точка M принадлежит какой-либо из высот треугольника, то все записанные соотношения также будут верны.

4.3.

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 = (a^4 + 4a^2b^2 + 4b^2) - 4a^2b^2 = \\ = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 - 2ab + 2b^2). \\ (a^2 + 2ab + 2b62) = ((a-b)^2 + b^2)((a+b)^2 + b^2). \end{aligned}$$

Для того, чтобы полученное произведение было простым числом, необходимо, чтобы один из множителей был равен 1. Учитывая, что числа a и b — целые, получим: $\begin{cases} a = b, \\ b = \pm 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = -b, \\ b = \pm 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} b = 0, \\ a = \pm 1 \end{cases}$. В последнем случае, оба множителя принимают значение, равное 1, поэтому произведение не является простым числом. В остальных случаях, один из множителей равен единице, а другой — пяти, то есть, произведение равно 5.

Ответ: $a = \pm 1$, $b = \pm 1$ (четыре пары).

Приложения

Сведения о состоявшихся регатах

№ п/п	Класс	Дата и место проведения	Кол-во команд	Победители и призеры
1	10	14.05.96 лицей №1511	8	**I** лицей №1511 (Б) **II** гимназия №1514 (Б) **III** лицей №1511 (А)
2	10	15.04.98 лицей №1511	14	**I** школа №218 (А) **II** лицей «Вторая школа» (А) **III** гимназия №1514 (А)
3	11	19.12.98 лицей №1511	14	**I** школа №218 (А) **II** лицей «Вторая школа» **III** гимназия №1514 **IV** лицей №1511 (Б) **V** школа №5 г. Долгопрудный
4	7	28.02.99 школа №235	13	**I** школа №218 (Б) **II** школа №218 (А) **III** школа №152 (Б)
5	10	24.04.99 лицей №1511	20	**I** гимназия №1543 **II** лицей №1523 (А) **III** лицей №1511 (А) **IV** школа №1101 (А) **V** лицей №1511 (Б)
6	9	15.05.99 школа №235	14	**I** лицей «Вторая школа» (А) **II** школа №57 **III** гимназия №1543 **IV** школа №218 (А)
7	9	27.11.99 лицей-гимназия №109	19	**I** лицей «Вторая школа» (Б) **II** гимназия №1514 (Б) **III** гимназия №1543 **IV** школа №218 (А) **V** гимназия №1514 (А) **VI** школа №1101 (А)

№ п/п	Класс	Дата и место проведения	Кол-во команд	Победители и призеры
8	11	11.12.99 лицей №1511	20	**I** гимназия №1543 (Б) **II** гимназия №1543 (А) **III** гимназия №1514 (А) **IV–V** гимназия №1514 (Б) и лицей «Вторая школа» **VI** лицей №1511 (А)
9	7	11.03.00 школа №152	19	**I** гимназия №1543 (А) **II** лицей «Вторая школа» (Б) **III** лицей «Вторая школа» (А) **IV** гимназия №1543 (В) **V** школа №5 г. Долгопрудный (А)
10	10	15.04.00 гимназия №1543	17	**I** гимназия №1543 **II** лицей «Вторая школа» (Б) **III** школа №1189 (А) **IV** гимназия №1534 **V** гимназия №1514 (А)
11	8	13.05.00 гимназия №1514	24	**I–II** лицей «Вторая школа» (А и Б) **III** школа №218 **IV–V** школа №5 г. Долгопрудный (Б) и гимназия №1514 (А) **VI** школа №7 (Б)

Участие школьных команд

Номер (название) школы	**№1**	**№2**	**№3**	**№4**	**№5**	**№6**	**№7**	**№8**	**№9**	**№10**	**№11**
«Вторая школа»	—	3	1	—	1	2	3	1	2	2	2
№5 г. Долгопрудный	—	—	1	—	—	—	—	—	2	—	2
№7	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	2
№40	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
№57	—	—	—	—	—	1*	—	—	—	—	—
№109	2	2	2	—	2	2	3	3	—	1	2
№152	—	—	—	2	1	1	2	1	2	1	2
№174	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1

* сборная команда 57-ой школы и гимназии №1543

Номер (название) школы	**№1**	**№2**	**№3**	**№4**	**№5**	**№6**	**№7**	**№8**	**№9**	**№10**	**№11**
№218	2	3	3	2	1	2	2	2	2	1	1
№223	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—
№235	—	—	1	3	1	1**	—	—	—	—	—
№292	—	—	—	1	—	—	—	—	1	—	—
№429	—	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—
№548	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1
№651	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
№747	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
№1018	—	—	—	—	2	1	—	2	—	—	—
№1101	—	—	—	—	2	1	3	3	1	—	1
№1121	—	—	—	2	2	1	—	—	—	—	—
№1189	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2
№1510	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—
№1511	2	2	2	—	2	—	—	2	—	2	—
№1514	2	2	2	—	2 + 1***	—	2	2	—	2	3
№1523	—	2	2	—	2 + 1***	1	—	1	—	—	—
№1525	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—
№1534	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—
№1543	—	—	—	—	1	1	1	2	3	1	—
№1560	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	1
№1694	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Новая Гуманитарная Школа	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
Итого команд	**8**	**14**	**14**	**13**	**20**	**14**	**19**	**20**	**19**	**17**	**24**

** сборная команд школ №235 и №218

*** сборная команда гимназии №1514 и лицея №1523

Участие трех команд от одной школы (как и участие сборных команд) является исключением. Эти команды, как правило, формировались непосредственно перед проведением регаты и включались в соревнования вместо не явившихся команд.

Образец сводного протокола

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА

____
(дата проведения)

___ **классы**	I тур	II тур	III тур	IV тур	V тур	**Сумма баллов**	**Место**
Задачи / Команды	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3		
....	3 6 5	2 0 1	7 7 5	0 0 1	1 0 0	**38**	**6**
....	4 6 4	7 3 0	7 7 6	1 0 0	1 0 9	**55**	**II**
....	0 3 6	0 0 0	5 0 0	0 0 0	1 0 0	**15**	**16–17**
....	6 0 6	2 0 0	0 0 4	3 0 0	0 0 0	**21**	**12**
....	......	......	......	......	......	......	......

Каждая комиссия жюри получает перед началом регаты копию сводного протокола, в котором в каждом из туров цветом выделены столбцы с задачами 1, 2 или 3 соответственно. Команды школ вносятся во все протоколы в одном и том же порядке (как правило, в порядке возрастания номеров).

Статистика решения задач и некоторые комментарии

Регата №1

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
$К_1$ (6 баллов)	0	2	3
$К_2$ (5 баллов)	4	3	3
$К_3$ (6 баллов)	4	1	4,5
$У_1$ (5 баллов)	1	1	2,5
$У_2$ (5 баллов)	0	1	2
$У_3$ (6 баллов)	0	2	0
I_1 (6 баллов)	2	3	2,3
I_2 (6 баллов)	0	5	0,3
I_3 (7 баллов)	1	0	4,7

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
II_1 (7 баллов)	2	3	2,5
II_2 (6 баллов)	1	4	1,2
II_3 (6 баллов)	2	2	2,3
III_1 (8 баллов)	0	4	0,5
III_2 (6 баллов)	1	5	1
III_3 (8 баллов)	0	3	1,3

Две команды (из восьми стартовавших) не набрали 50% баллов в классификационном заезде. Утешительный заезд проводился только для этих двух команд, но, не преодолев и его, они выбыли из соревнований. Очевидно, что организаторы существенно недооценили сложность задач $К_1$, $У_2$ и $У_3$. Многие задачи предложенные в последующих турах также оказались чрезмерно трудными для участников регаты. Это относится, в частности, ко всем заданиям последнего тура. Для проведения последующих регат было решено: отказаться от системы выбывания команд; более взвешено подходить к отбору задач, привлекая большее количество «экспертов»; уравнять «стоимости» задач внутри каждого заезда (тура); увеличить время на решение задач последних туров.

Регата №2

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
1.1 (6 баллов)	8	5	3,5
1.2 (6 баллов)	12	1	5,5
1.3 (6 баллов)	4	6	2
2.1 (6 баллов)	6	2	3,5
2.2 (6 баллов)	5	5	2
2.3 (6 баллов)	7	3	3,2
3.1 (7 баллов)	1	3	2
3.2 (7 баллов)	1	9	1
3.3 (7 баллов)	5	4	3,6

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
4.1 (8 баллов)	3	1	4,7
4.2 (8 баллов)	3	7	3,2
4.3 (8 баллов)	11	0	7,4
5.1 (9 баллов)	5	8	3,6
5.2 (9 баллов)	не оценивалась, т.к. в текст задачи, выданный учащимся, вкралась опечатка		
5.3 (9 баллов)	8	3	6,4

Результаты решения задач были существенно выше, чем в первой регате, что свидетельствует, как о более высоком математическом уровне участников, так и о справедливости корректив, внесенных в правила проведения соревнования и в принципы его подготовки. Серьезной проблемой остается экспертная оценка трудности задач, и, как следствие, правильное их распределение по турам. Из приведенной таблицы видно, что в данном случае, мы несколько переоценили задачи 4.3 и 5.3, и, наоборот, недооценили задачи 1.3, 3.1 и 3.2. К сожалению, подобная ситуация типична для большинства математических соревнований.

Регата №3

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
1.1 (6 баллов)	10	2	4,4
1.2 (6 баллов)	11	3	4,7
1.3 (6 баллов)	6	7	2,9
2.1 (7 баллов)	8	0	5,1
2.2 (7 баллов)	4	7	3
2.3 (7 баллов)	8	4	4,5
3.1 (7 баллов)	1	5	3,4
3.2 (7 баллов)	2	10	1,6
3.3 (7 баллов)	10	0	6,2
4.1 (8 баллов)	7	4	5,1

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
4.2 (8 баллов)	7	2	6,1
4.3 (8 баллов)	2	10	1,6
5.1 (9 баллов)	6	4	5,4
5.2 (9 баллов)	2	10	2,3
5.3 (9 баллов)	6	8	3,9

«Недооцененными», по-видимому, оказались только задачи 3.1 и 4.3. Обращает на себя внимание большое количество «нулей» в оценке решений задач 2.2, 3.2 и 5.2, но, к сожалению, проблемы с решением школьниками геометрических задач являются типичными для большинства олимпиад. Возможно, что некоторые задания оказались слишком простыми для ряда участников, что косвенно подтверждается результатами победителей регаты — 100% от возможного количества баллов.

Регата №4

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
1.1 (6 баллов)	6	3	4,0
1.2 (6 баллов)	0	4	1,5
1.3 (6 баллов)	0	7	1,5
2.1 (7 баллов)	2	9	1,4
2.2 (7 баллов)	2	3	2,8
2.3 (7 баллов)	1	4	1,5
3.1 (8 баллов)	8	3	5,2
3.2 (8 баллов)	1	1	3,0
3.3 (8 баллов)	5	4	4,8
4.1 (9 баллов)	0	6	2,0
4.2 (9 баллов)	9	3	6,4
4.3 (9 баллов)	5	3	5,2

Сравнительно низкие результаты решения ряда задач первого и второго туров объясняются, на наш взгляд, прежде всего отсутствием у школьников опыта участия в подобных соревнованиях. Кроме того, в силу возрастных особенностей, семиклассникам требуется больше времени для разумной организации командной работы, чем старшеклассникам.

Регата №5

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
1.1 (6 баллов)	1	16	0,9
1.2 (6 баллов)	0	20	0
1.3 (6 баллов)	5	4	3,0
2.1 (7 баллов)	1	7	2,5
2.2 (7 баллов)	0	0	2,0
2.3 (7 баллов)	0	19	0,3
3.1 (7 баллов)	0	12	0,4
3.2 (7 баллов)	0	16	1,0
3.3 (7 баллов)	0	20	0
4.1 (8 баллов)	11	5	5,5
4.2 (8 баллов)	1	12	1,5
4.3 (8 баллов)	0	12	0,4
5.1 (9 баллов)	0	4	2,1
5.2 (9 баллов)	9	10	4,1
5.3 (9 баллов)	7	6	4,1

Самые низкие баллы за всю историю проведения регат объясняются тем, что в подборе задач участвовало много новых учителей. Опираясь на опыт проведения «классических» олимпиад, они явно переоценили возможности подавляющего большинства участников в рамках иной соревновательной формы. Особенно неудачны (по уровню сложности) оказались комплекты заданий для первого и третьего туров.

Регата №6

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
1.1 (6 баллов)	8	3	3,9
1.2 (6 баллов)	1	12	0,6
1.3 (6 баллов)	6	8	2,6
2.1 (7 баллов)	2	8	1,6
2.2 (7 баллов)	3	5	2,7
2.3 (7 баллов)	2	7	1,9
3.1 (7 баллов)	6	4	3,3
3.2 (7 баллов)	3	7	2,8
3.3 (7 баллов)	2	11	1,1
4.1 (8 баллов)	2	11	1,5
4.2 (8 баллов)	2	5	2,6
4.3 (8 баллов)	2	6	2,1
5.1 (9 баллов)	0	7	1,4
5.2 (9 баллов)	3	11	1,9
5.3 (9 баллов)	1	8	1,4

Подбор заданий — более удачен, чем в предыдущей регате, хотя и здесь не обошлось без ошибок, например, задача 1.2 явно не годится для первого тура. Только по задаче 5.1 ни одна из команд не набрала максимального балла, что допустимо, так как это задача из последнего тура. В этот раз, геометрические задачи решались лучше, чем остальные. Сравнительно низкие средние баллы объясняются крайне неоднородным составом участников, поэтому было решено в дальнейшем, по возможности, ограничивать представительство тех школ, команды которых стабильно выступают неудачно. Таким школам, как и тем, кто участвует впервые, было рекомендовано выставлять одну команду.

Регата №7

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
1.1 (6 баллов)	6	9	2,1
1.2 (6 баллов)	9	3	3,9
1.3 (6 баллов)	1	15	0,5
2.1 (7 баллов)	9	3	5,1
2.2 (7 баллов)	9	1	3,8
2.3 (7 баллов)	2	11	1,4
3.1 (7 баллов)	4	13	1,5
3.2 (7 баллов)	1	18	0,4
3.3 (7 баллов)	6	5	3,3
4.1 (8 баллов)	1	6	1,9
4.2 (8 баллов)	3	15	1,3
4.3 (8 баллов)	1	15	1,3
5.1 (9 баллов)	1	5	1,9
5.2 (9 баллов)	1	16	1,0
5.3 (9 баллов)	8	11	3,8

С каждой из предложенных задач справилась по крайней мере одна команда. Задачи 1.3 и 2.3 оказались более сложными, чем это требуется от задач начальных туров. Удивителен низкий результат решения задачи 3.2, идея решения которой есть в любом школьном учебнике по геометрии! Трудными для школьников оказались задания четвертого и пятого туров (кроме 5.3).

Регата №8

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
1.1 (6 баллов)	3	17	0,9
1.2 (6 баллов)	4	16	1,2
1.3 (6 баллов)	4	16	1,2
2.1 (7 баллов)	9	7	4,4

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
2.2 (7 баллов)	6	11	2,7
2.3 (7 баллов)	7	13	2,5
3.1 (7 баллов)	10	7	3,9
3.2 (7 баллов)	0	11	1,0
3.3 (7 баллов)	4	11	2,0
4.1 (8 баллов)	4	11	2,2
4.2 (8 баллов)	4	9	2,7
4.3 (8 баллов)	2	5	1,7
5.1 (9 баллов)	3	14	1,7
5.2 (9 баллов)	5	11	3,5
5.3 (9 баллов)	2	15	1,2

Серьезной проблемой остается подбор задач для первых туров. Решения командами заданий первого тура (равно как и задачи 2.3.) оказалось невозможным оценить «промежуточным» количеством баллов, что явилось безусловным недостатком этих задач. Вместе с тем, хорошо решаемыми оказались геометрические задачи (кроме 3.2).

Регата №9

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
1.1 (6 баллов)	4	15	1,3
1.2 (6 баллов)	10	7	3,5
1.3 (6 баллов)	0	19	0
2.1 (7 баллов)	1	12	0,7
2.2 (7 баллов)	11	3	5,6
2.3 (7 баллов)	3	14	1,2
3.1 (7 баллов)	6	10	3,0
3.2 (7 баллов)	3	3	2,4
3.3 (7 баллов)	1	4	2,8
4.1 (8 баллов)	1	5	3,8
4.2 (8 баллов)	0	8	3,8

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
4.3 (8 баллов)	3	3	3,4

С заданиями первого тура — проблема, аналогичная той, которая была в предыдущей регате. Особо неудачными оказались задачи 1.3 и 2.1. Вместе с тем, подбор задач третьего и четвертого туров оказался неплохим, так как позволил дифференцировать оценку их решений.

Регата №10

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
1.1 (6 баллов)	5	8	2,5
1.2 (6 баллов)	3	10	1,5
1.3 (6 баллов)	10	0	5,3
2.1 (7 баллов)	8	7	3,5
2.2 (7 баллов)	0	12	0,6
3.2 (7 баллов)	1	9	0,8
3.3 (7 баллов)	2	3	3,9
4.1 (8 баллов)	1	10	1,0
4.2 (8 балов)	2	15	1,0
4.3 (8 баллов)	1	9	1,4
5.1 (9 баллов)	0	4	0,8
5.2 (9 баллов)	0	15	0,4
5.3 (9 баллов)	3	10	3,0

После некоторого перерыва вновь удалось сравнительно удачно подобрать задания для первого тура. Задания 2.2 и 2.3, видимо, оказались чересчур «трудоемкими» для второго тура, а задача 3.2 — чересчур простой для третьего тура. Задания четвертого и пятого туров были сравнительно трудными, но для 10 класса это, возможно, и не является недостатком.

Регата №11

Номер задачи (максимальная сумма баллов)	Количество команд, набравших максимальный балл	Количество команд, получивших 0 баллов	Средний балл, полученный командами
1.1 (6 баллов)	4	11	2,4
1.2 (6 баллов)	0	18	0,6
1.3 (6 балолв)	2	21	0,7
2.1 (7 баллов)	2	14	1,0
2.2 (7 баллов)	11	11	3,6
2.3 (7 баллов)	0	19	0,2
3.1 (8 баллов)	8	4	4,1
3.2 (8 баллов)	3	14	1,7
3.3 (8 баллов)	16	3	6,1
4.1 (9 баллов)	0	10	3,1
4.2 (9 баллов)	1	20	1,0
4.3 (9 баллов)	2	9	2,1

Неудачной оказалась расстановка «третьих» задач: 1.3 и 2.3 — слишком трудные, а 3.3 — слишком легкая для третьего тура. Аналогичная ситуация с задачами 1.2 и 2.2. Соответствуют своему месту остальные задачи третьего тура. Удачным (для последнего тура) является задание 4.1 — максимальный балл было набрать трудно, но «продвинулись» в решении этой задачи многие команды.

Из приведенных комментариев видно, что составить «идеальный» вариант для проведения регаты очень трудно, но надежды на это организаторы не теряют.

Школьные математические регаты

В заключение приведены задачи двух тренировочных математических регат, в разное время проходивших в школе №218.

Регата для 6–7 классов

1.1 (6 баллов) Решите ребус (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, различным буквам — различные цифры): $Б + БЕЕЕ = МУУУ$.

Решение. Так как при сложении данных чисел цифра $Е$ в разряде десятков поменялась на цифру $У$, то суммой однозначных чисел $Б$ и $Е$ является двузначное число, начинающееся с единицы. Так как, помимо увеличения на единицу цифры в разряде десятков, также изменилась и цифра в разряде сотен, то $Е = 9$, $Б = 1$, $У = 0$.

Ответ: $1 + 1999 = 2000$.

1.2 (6 баллов) Верно ли, что:

а) фигуры с равными площадями имеют равные периметры?

б) фигуры с равными периметрами имеют равные площади?

Ответы обосновать.

а) *Ответ*: нет. Например, прямоугольник со сторонами 2 и 8 и квадрат со стороной 4.

б) *Ответ*: нет. Например, прямоугольник со сторонами 2 и 6 и квадрат со стороной 4.

1.3 (6 баллов) 4 коровы черной масти и 3 коровы рыжей масти за 5 дней дали такое же количество молока, что и 3 коровы черной масти и 5 коров рыжей масти за 4 дня. Какие коровы более производительны — черные или рыжие?

Решение. 4 коровы черной масти и 3 коровы рыжей масти за 5 дней дают столько же молока, сколько 20 коров черной масти и 15 коров рыжей масти за один день. 3 коровы черной масти и 5 коров рыжей масти за 4 дня дают столько же молока, сколько 12 коров черной масти и 20 коров рыжей масти за один день. Получилось, что 8 коров черной масти дают столько же молока, сколько 5 коров рыжей масти, то есть, рыжие коровы производительнее, чем черные. Данные рассуждения могут быть также записаны с помощью переменных: пусть каждая корова черной масти дает x литров молока в день, а каждая корова рыжей масти — y литров молока в день. По условию имеем равенство: $(4x + 3y) \cdot 5 = (3x + 5y) \cdot 4$; $8x = 5y$. Следовательно, $y > x$.

Ответ: рыжие.

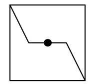
2.1 (7 баллов) Числа a и b — целые. Известно, что $a + b = 100$. Может ли сумма $7a + 3b$ равняться числу 627?

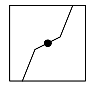
Решение. Так как сумма чисел a и b является четным числом, то эти числа имеют одинаковую четность. Значит, и числа $7a$ и $3b$ тоже имеют одинаковую четность, следовательно, их сумма должна быть четной. 627 — нечетное число, значит заданная сумма не может равняться числу 627.

Ответ: не может.

2.2 (7 баллов) Нарисуйте, как разрезать квадрат на два равных: а) пятиугольника; б) шестиугольника.

Ответ: Ломаные проходят через центр квадрата (см. рисунки).





2.3 (7 баллов) Жители города А говорят только правду, жители города В — только ложь, а жители города С — попеременно правду и ложь (то есть, из каждых двух высказанных ими утверждений, одно — истинно, а другое — ложно). В пожарную часть сообщили по телефону: «У нас пожар, скорее приезжайте!». «Где?» — спросил дежурный по части. «В городе С» — ответили ему. В какой город должна приехать пожарная машина, если известно, что через час после ее приезда пожар был потушен?

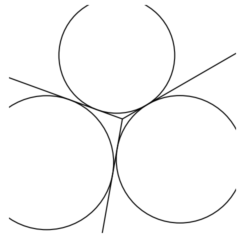
Решение. Для того, чтобы узнать куда отправить пожарную машину, нужно выяснить из какого города был звонок, так как из последней фразы в условии следует, что информация о пожаре — истинна. Если бы звонок был из А, то второй ответ оказался бы ложным, что невозможно для жителей города А. Если звонок был из В, то фраза «у нас пожар» означает, что пожар либо в А, либо в С; фраза в «городе С» означает, что пожар точно не в С; значит, пожар в городе А. Если звонок был из С, то оба утверждения либо истинны, либо ложны одновременно, что невозможно для жителей города С.

Ответ: в город А.

3.1 (8 баллов) С любым числом, записанным на доске, разрешается производить следующие операции: 1) заменять его числом, которое в два раза больше; 2) стирать его последнюю цифру. Как с помощью этих операций из числа 458 получить число 14?

Решение. Существует много различных способов. Один из них: умножим число 458 на 2 пять раз последовательно и получим число 14656, затем сотрем три последние цифры, и получим число 14.

3.2 (8 баллов) Вокруг небольшого курортного городка расположены три озера различных размеров, имеющие форму круга. В каком бы направлении ни шел отдыхающий (по прямой), он обязательно через некоторое время оказывался на берегу одного из озер. Нарисуйте план этой местности, обозначив городок на нем — точкой, если известно, что городок расположен не на острове.



Решение. Достаточно взять три луча с общим началом в точке, обозначающей городок, делящие плоскость на три части, и произвольные окружности, вписанные в образовавшиеся углы (см. рисунок).

3.3 (8 баллов) В колонию, состоящую из двухсот бактерий, попадает один вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вируса, и одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В следующую минуту возникшие два вируса уничтожают две бактерии, и затем каждый из вирусов и каждая из оставшихся бактерий снова делятся пополам, и так далее. Будет ли эта колония жить бесконечно долго или, если она в конце концов погибнет, то через какое время это произойдет?

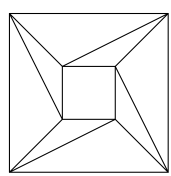
Решение. Представим себе, что каждый вирус имеет дело со «своей» колонией бактерий. Тогда, к исходу первой минуты на каждый вирус будет приходиться по 199 бактерий, к исходу второй минуты — по 198, и так далее, к исходу 199 минуты — по одной бактерии, к исходу 200 минуты — бактерий не останется.

Ответ: колония погибнет через 200 минут.

4.1 (9 баллов) В одной из историй, которую приписывают Иосифу Флавию, воину древней Иудеи, а впоследствии — известному историку, описано, как он попал в плен к римлянам вместе с дюжиной своих подчиненных. Пленных поставили в круг, объявив, что оставят в живых только одного из них. Иосифу приказали назвать натуральное число, большее тринадцати, затем, начиная с него, считали по кругу, и убивали того, на кого «выпадало» названное Иосифом число. После этого отсчет начинали заново, и убивали следующего, на кого это число выпадало. Какое наименьшее число мог назвать Иосиф Флавий, если в итоге — он единственный из пленных, оставшийся в живых?

Решение. Искомое число не должно при делении на 13, 12, ... , 3 и 2 давать остаток 1. Значит, число на единицу меньшее названного, не должно быть кратно ни одному из чисел от 2 до 13. Наименьшее из таких чисел — 17, то есть, Иосиф назвал число 18.

Ответ: 18.



4.2 (9 баллов) Нарисуйте 8 точек и соедините их отрезками так, чтобы отрезки не пересекались и через каждую точку проходило ровно 4 отрезка.

Ответ: например, так (см. рисунок).

4.3 (9 баллов) Из пункта A в пункт B ведет единственная дорога длиной 15 км. В 9 часов 30 минут со скоростью 4 км/ч из A в B отправился пешеход. На следующий день, выйдя в 11 часов, он отправился в обратный путь со скоростью 5 км/ч. Оба раза пешеход перешагивал через единственный ручей, пересекающий дорогу, в одно и тоже время. В котором часу это было?

Решение. За первые 1,5 ч своего движения из пункта A (с 9 ч 30 мин до 11 ч) пешеход пройдет 6 км. Из условия следует, что ручей не может находится на пройденном им участке. Обозначим C — точку дороги, в которой пешеход окажется в 11 ч. Расстояние от C до B равно 9 км. Ручей должен располагаться в точке, время движения до которой одинаково как по пути из C в B, так и по пути из B в C. Поэтому, представим себе, что из двух пунктов, расстояние между которыми 9 км, в 11 часов одновременно навстречу друг другу начали движение два пешехода, скорости которых 4 км/ч и 5км/ч. Тогда их встреча произойдет через час, то есть они встретятся в 12 часов, пересекая ручей.

Ответ: 12 часов.

Регата для 10–11 классов

1.1 (6 баллов) Верно ли, что 57599 — простое число?

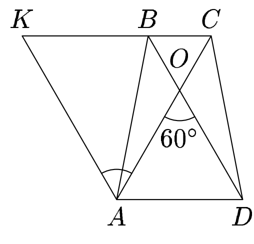
Решение. Неверно, так как $57599 = 57600 - 1 = 240^2 - 1 = 239 \cdot 241$.

1.2 (6 баллов) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} a = bcd, \\ a + b = cd, \\ a + b + c = d, \\ a + b + c + d = 1. \end{cases}$$

Решение. Вычтем третье уравнение из четвертого. Тогда, $d = 1 - d$, то есть, $d = 0{,}5$. Вычтем второе уравнение из третьего. Тогда, $c = d(1 - c)$, значит, $c = \frac{1}{3}$. Вычтем первое уравнение из второго. Тогда, $b = cd(b - 1)$, то есть, $b = \frac{1}{7}$. Так как $a = bcd$, то, $a = \frac{1}{42}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{42}; \frac{1}{7}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.



1.3 (6 баллов) В трапеции $ABCD$ с основанием AD диагональ AC равна сумме оснований, угол между диагоналями равен $60°$. Докажите, что трапеция — равнобокая.

Решение. Достроим треугольник BAD до параллелограмма $KBDA$ (см. рисунок). Тогда,

$KC = AD + BC = AC$, $\angle KAC = \angle AOD = 60^\circ$, следовательно, треугольник KAC — равнобедренный с углом 60° при основании, то есть, треугольник KAC — равносторонний. Следовательно, $AC = AK = BD$, то есть, диагонали трапеции равны, значит трапеция — равнобокая, что и требовалось доказать.

2.1 (7 баллов) Можно ли из натуральных чисел от 1 до 100 выбрать 71 число так, чтобы их сумма равнялась сумме остальных чисел?

Решение. Наименьшая такая сумма — сумма первых 71 натуральных чисел:

$$1 + 2 + \ldots + 71 = \frac{1 + 71}{2} \cdot 71 = 36 \cdot 71 = 2556.$$

Тогда, сумма оставшихся чисел равна:

$$72 + 73 + \ldots + 100 = \frac{72 + 100}{2} \cdot 29 = 2494.$$

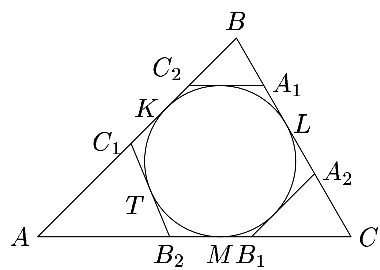
Но $2556 > 2494$, следовательно, требуемые числа выбрать нельзя.

2.2 (7 баллов) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

Решение. Если $(x; y)$ — решение системы, то $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, значит, $x + 1 \geqslant 1$. Тогда, $\sqrt{x+1} + \sqrt{y} \geqslant 1$ и равенство возможно только если $x = 0$, $y = 0$. Эта пара чисел является решением и первого уравнения системы. Ответ: $(0; 0)$.

2.3 (7 баллов) В треугольник ABC периметра 1997 вписана окружность. Вокруг нее описан шестиугольник так, что все его вершины лежат на сторонах данного треугольника. Найдите сумму периметров трех треугольников, отсеченных сторонами шестиугольника от треугольника ABC.



Решение. Пусть $C_1C_2A_1A_2B_1B_2$ — данный шестиугольник; K, L, M — точки касания окружности и сторон треугольника (см. рис.). Рассмотрим T — точку касания окружности с отрезком C_1B_2. $C_1K = C_1T$, $B_2M = B_2T$, следовательно, $AC_1 + C_1B_2 + AB_2 = AK + AM$. Обозначим периметры треугольников, отсекаемых от данного (AC_1B_2, C_2BA_1, B_1A_2C), как P_1, P_2 и P_3 соответственно. Тогда, $P_1 + P_2 + P_3 = AK + AM + BK + BL + CL + CM = AB + BC + AC = 1997$.

Ответ: 1997.

3.1 (7 баллов) Натуральное двузначное число не делится на 3. Докажите, что сумма квадратов его цифр также не делится на 3.

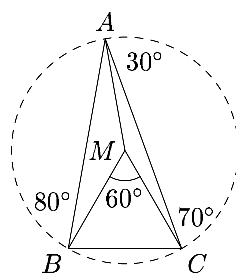
Решение. Пусть x и y — цифры данного числа. Предположим, что x^2+y^2 делится на 3. Докажем, что тогда x делится на 3 и y делится на 3. Если $x = 3n \pm 1$, $y = 3k \pm 1$ $(n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N})$, то $x^2 + y^2 = 9n^2 \pm 6n + 9k^2 \pm \pm 6k + 2$ — не делится на 3. Если $x = 3n \pm 1$, $y = 3k$ (или наоборот), то $x^2+y^2 = 9n^2 \pm 6n + 9k^2 + 1$ — не делится на 3. Если же $x = 3n$, $y = 3k$, то $x^2+y^2 = 9(n^2+k^2)$ делится на 3. Других случаев быть не может, значит, сумма цифр данного числа, равная $x + y$, делится на 3. Следовательно, данное число также должно делиться на 3 — противоречие с условием. То есть, наше предположение неверно, а верно, что $x^2 + y^2$ не делится на 3, что и требовалось доказать.

3.2 (7 баллов) Функция $f(x)$ задана формулой: $f(x) = x^3 + x$, функция $g(x)$ — обратная к $f(x)$. Решите уравнение: $f(x) = g(x)$.

Решение. Так как функция $f(x)$ — возрастающая, то и ей обратная функция $g(x)$ также возрастающая. Поэтому, графики этих функций, построенные в одной системе координат, могут пересекаться только в точках прямой $y = x$, следовательно: $f(x) = g(x) \iff f(x) = x \iff \iff x^3 + x = x \iff x^3 = 0 \iff x = 0$.

Ответ: 0.

3.3 (7 баллов) Внутри треугольника ABC, в котором $\angle C = 70°$, $\angle B = 80°$, взята точка M так, что треугольник CMB — равносторонний. Найдите $\angle MAB$ и $\angle MAC$.



Решение. Рассмотрим окружность с центром в точке M и радиусом $R = MB = MC$ (см. рисунок). $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) = 30°$, $\angle BMC = 60°$, следовательно, точка A лежит на этой окружности, то есть, окружность является описанной для треугольника ABC. Значит, $AM = BM = CM$, тогда, $\angle MAB = \angle MBA = 20°$, $\angle MAC = \angle MCA = 10°$.

4.1 (8 баллов) Сравните числа: $\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

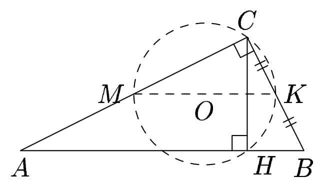
Решение. $\sqrt{3} > 1{,}732$; $\sqrt{2} > 1{,}414 \iff \sqrt{3} + \sqrt{2} > 3{,}146 > \pi \iff \iff \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$. Так как функция $y = \sin x$ возрастает на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\sin\frac{\sqrt{2}}{2} > \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.2 (8 баллов) Укажите какое-либо значение x, при котором неверно равенство:

$$\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\frac{(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}+\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}=1.$$

Решение. При раскрытии скобок в левой части равенства может получиться только выражение вида ax^2+bx+c. Рассмотрим функцию $f(x)=ax^2+bx+c$. Заметим, что $f(\sqrt{2})=f(\sqrt{3})=f(\sqrt{5})=1$, то есть, функция принимает одно и то же значение в трех различных точках. Следовательно, $f(x)$ не может быть квадратичной, значит, $a=0$. По той же причине, функция $f(x)$ не может быть линейной возрастающей или линейной убывающей. Следовательно, $f(x)$ — постоянная функция, принимающая значение 1 при любом x, то есть, не существует такого значения x, при котором данное равенство неверно.

4.3 (8 баллов) Найдите радиус окружности, проходящей через вершину C прямого угла треугольника ABC, основание H высоты CH, и K — середину катета BC, если гипотенуза треугольника равна c.



Решение. Треугольник CHB — прямоугольный, следовательно, $KC=KB=KH$ (см. рисунок). $\angle MCK$ — прямой, следовательно MK — диаметр окружности, а так как хорды KC и KH равны, то он перпендикулярен CH, а значит, $MK \parallel AB$. Следовательно, MK — средняя линия треугольника ABC, то есть, $MK=0{,}5AB=0{,}5c$. Искомый радиус: $R=0{,}5MK=0{,}25c$.

5.1 (9 баллов) Найдите наибольшее значение выражения:

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{1-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Решение.

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{1-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2},$$

где $a = \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, $\beta = \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. $(a-b)^2 \geqslant 0 \iff a^2+b^2-2ab \geqslant$ $\geqslant 0 \iff a^2+b^2 \geqslant 2ab \iff \dfrac{2ab}{a^2+b^2} \leqslant 1$. Данное выражение может принимать значение 1, например, если $\sin\alpha = 1$, а $\sin\beta = 0$. Следовательно, наибольшее значение данного выражения равной 1.

Ответ: 1.

5.2 (9 баллов) Для любого натурального n докажите неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}.$$

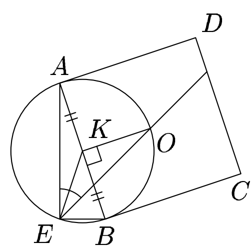
Решение. Если $n = 1$, то неравенство верно (левая и правая части равны). Если $n > 1$, то $\dfrac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}-1$, так как $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 > \sqrt{2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}} > \sqrt{3}-\sqrt{2}$, так как $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2} > \sqrt{3}$; и т. д., $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} -$ $-\sqrt{n-1}$, так как $\dfrac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} = \sqrt{n}+\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$. Сложив полученные неравенства, имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}-1 \iff 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},$$

то есть, неравенство справедливо для любого натурального n, что и требовалось доказать.

Это неравенство можно также доказать, используя метод математической индукции.

5.3 (9 баллов) Вне квадрата, на его стороне, построен прямоугольный треугольник, у которого сторона квадрата является гипотенузой. В каком отношении биссектриса прямого угла этого треугольника делит площадь квадрата?



Решение. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника AEB (см. рисунок). Ее центром является точка K — середина стороны AB, и она проходит через центр квадрата O, так как $KE = 0{,}5AB =$ $= KO$. Следовательно, $\angle AEO = 0{,}5\angle AKO = 45^\circ$. Следовательно, EO — биссектриса угла AEB. Эта биссектриса проходит через центр симметрии квадрата, значит, она делит его площадь пополам. *Ответ*: 1 : 1.

Список литературы

[1] А.Д. Блинков, А.А. Бучин, П.В. Чулков, И.В. Ширстова. Вторая межшкольная математическая регата. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №49, 1999.

[2] А.Д. Блинков, А.З. Гурвиц. Интеллектуальный марафон в Северном округе г. Москвы. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №15, 1995.

[3] А.Д. Блинков, К.П. Кочетков, А.В. Семенов. Школьные математические регаты. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №14, 2000.

[4] А. Блинков, В. Спиров. Математическая регата. Журнал «Квант», №3, 2000.

[5] А.Д. Блинков, П. В. Чулков. Турниры Архимеда. — М.: ИЛКиРЛ, 1997.

[6] А.А. Бучин, И.В. Ширстова. Организация соревнований по математике (из опыта работы). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», 10, 1997.

[7] П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир. Задачи с параметрами. — Киев, РИА «Текст», МП«ОКО», 1992.

[8] П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир. Экзамен по математике и его подводные рифы. — Москва — Харьков, «Илекса» — «Гимназия», 1998.

[9] Задачи для внеклассной работы V–VI классах: Пособие для учителей / Сост. В.Ю. Сафонова. Под ред. Д.Б. Фукса, А.Л. Гайвронского. — М.:МИРОС, 1993.

[10] Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике. — СПб.: ГДТЮ, СПГУ, 1999.

[11] Б.М. Ивлев и др. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа для 10–11 классов средней школы. — М.: Просвещение, 1990.

[12] А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи. — М.: МЦНМО, 1997.

[**13**] Д.В. Клименченко. Задачи по математике для любознательных: Кн. для учащихся 5–6 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1992.

[**14**] Ю.М. Колягин и др. Сборник задач по алгебре для 6–8 классов. — М.: Просвещение, 1975.

[**15**] Л.М. Лоповок. Факультативные задания по геометрии для 7–11 классов. — Киев.: 1990.

[**16**] Материалы Санкт-Петербургской олимпиады выпускников 1996–1997 гг.

[**17**] А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач. — Киев.: Агрофирма «Александрия», 1993.

[**18**] Олимпиады. М.: МЦНМО, МИПКРО, 1999.

[**19**] В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М.: Наука, Физматлит, 1995.

[**20**] В.В. Прасолов, И.Ф. Шарыгин. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, Физматлит, 1989.

[**21**] Сборник материалов четвертого костромского городского турнира математических боев (6–7 класс). — Кострома: РЦ НИТ «Эврика-М», 1998.

[**22**] Сборник материалов пятого турнира «Математика 6–8» журнала «Квант». — Кострома: РЦ НИТ «Эврика-М», 1999.

[**23**] Д. В. Фомин. Санкт-Петербургские математические олимпиады. — СПб.: «Политехника», 1994.

[**24**] И.Ф. Шарыгин, Л.Н. Ерганжиева. Наглядная геометрия. / Учебное пособие для учащихся V–VI классов. — М.: МИРОС, 1992.

[**25**] Шесть фестивалей (материалы Российских фестивалей юных математиков). — Краснодар.: ГИНМЦ, 1996.

Календарь математических регат на 2000/2001 учебный год

Классы	Сроки	Место проведения	Срок подачи заявок	Координаторы
7	10 марта (суббота)	школа №218 МКО (Северный округ)	до 25 февраля	А.Д.Блинков А.З.Гурвиц
8	12 мая (суббота)	гимназия №1514 (Юго-западный округ)	до 25 апреля	А.Д.Блинков А.Ф.Пенкин
9	25 ноября (суббота)	школа №7 (Юго-западный округ)	до 11 ноября	А.Д.Блинков А.В.Алферов
10	21 апреля (суббота)	лицей №1511 МКО (Южный округ)	до 7 апреля	А.Д.Блинков А.В.Иванищук
11	16 декабря (суббота)	лицей №1511 МКО (Южный округ)	до 2 декабря	А.Д.Блинков И.В.Ширстова

Список координаторов

Алферов Александр Викторович, школа №7.
Телефоны: 131-81-10 (р), 131-18-15 (д).

Блинков Александр Давидович, школа №218.
Телефоны: 976-03-20 (р), 900-39-73 (д). Email: blinkov@sl.ru

Гурвиц Александр Захариевич, школа №244.
Телефоны: 482-21-71 (р), 408-21-03 (д).

Иванищук Александр Владимирович, лицей №1511.
Телефоны: 324-29-21 (р), 311-50-10 (д).

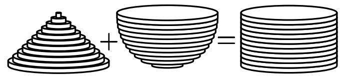
Пенкин Андрей Федорович, гимназия №1514.
Телефоны: 138-01-01 (р), 138-32-59 (д).

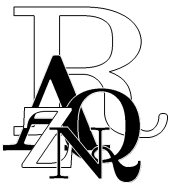
Ширстова Ирина Вениаминовна, лицей №1511.
Телефоны: 324-29-21 (р), 374-24-11 (д).

Библиотека «Математическое просвещение»

Вып. 1. *В. М. Тихомиров.* Великие математики прошлого и их великие теоремы.

В брошюре доказываются замечательные теоремы великих математиков прошлого — Архимеда (теорема об объёме шара), Ферма (теорема о представлении простых чисел в виде суммы двух квадратов натуральных чисел), Эйлера (равенство $e^{\pi i} = -1$), Лагранжа (теорема о представлении любого натурального числа в виде суммы четырёх квадратов целых чисел) и Гаусса (теорема о построении циркулем и линейкой правильного семнадцатиугольника).



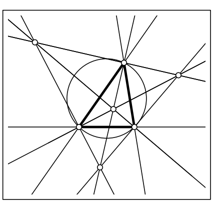


Вып. 2. *А. А. Болибрух.* Проблемы Гильберта (100 лет спустя).

Знаменитые проблемы, сформулированные Давидом Гильбертом на Парижском международном математическом конгрессе 1900-го года, оказали определяющее влияние на развитие математики XX столетия. Одна из целей этой брошюры — показать, что многие известные и достаточно сложные математические проблемы возникают вполне естественным образом, так что даже старшеклассник может понять причины появления этих проблем и их формулировки.

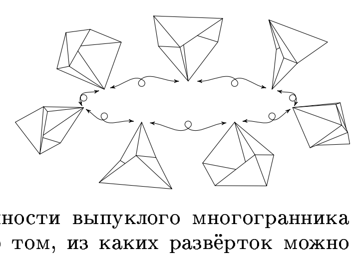
Вып. 3. *Д. В. Аносов.* Взгляд на математику и нечто из неё.

В брошюре рассказано о зарождении математики и её дедуктивном построении. Рассмотрены два примера — теорема Пифагора и задача описания всех пифагоровых троек.



Вып. 4. *В. В. Прасолов.* Точки Брокара и изогональное сопряжение.

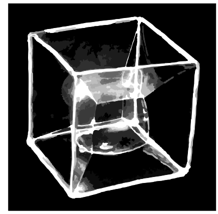
Изогональное сопряжение относительно треугольника $A_1A_2A_3$ сопоставляет точке X такую точку Y, что прямая YA_i симметрична прямой XA_i относительно биссектрисы угла A_i ($i = 1, 2, 3$). Это преобразование обладает многими интересными свойствами. В частности, оно переводит друг в друга две замечательные точки треугольника — точки Брокара.



Вып. 5. *Н. П. Долбилин.* Жемчужины теории многогранников.

В брошюре, в частности, рассказывается об основных теоремах теории выпуклых многогранников. Это — теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с заданными гранями и теорема Александрова о том, из каких развёрток можно склеить выпуклый многогранник.

Вып. 6. *А. Б. Сосинский.* Мыльные плёнки и случайные блуждания.

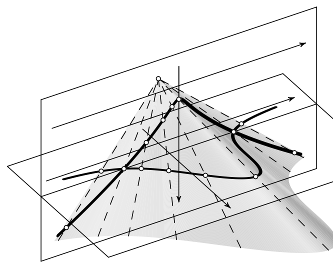


Взаимное влияние математики и её приложений проиллюстрировано на примере задачи о мыльной плёнке, затягивающей проволочный контур. Приближённое решение этой задачи можно получить оригинальным способом, который, на первый взгляд, никак не связан с её постановкой, а именно методом моделирования случайных блужданий.

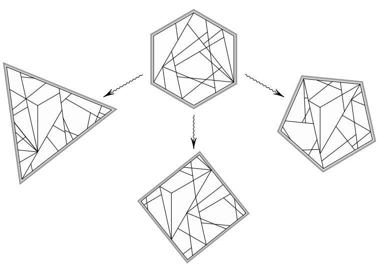
Вып. 7. *И. М. Парамонова.* Симметрия в математике.

В брошюре рассказывается о том, что понимается под симметрией в современной математике и как идеи, связанные с симметрией, помогают решать самые разные задачи. В частности, объясняется, что такое группа преобразований и её инварианты.

Вып. 8. *В. В. Острик, М. А. Цфасман.* Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые.



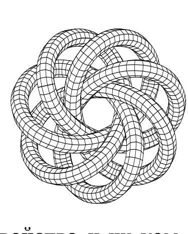
Многие естественные вопросы из теории чисел красиво решаются геометрическими методами, точнее говоря, методами алгебраической геометрии — области математики, изучающей кривые, поверхности и т. д., задаваемые системами полиномиальных уравнений. В книжке это показано на примере нескольких красивых задач теории чисел, связанных с теоремой Пифагора.



Вып. 9. *Б. П. Гейдман.* Площади многоугольников.

Брошюра посвящена вычислению площадей прямоугольника, треугольника, параллелограмма, трапеции и других многоугольников. Рассмотрены решения 20 задач, сгруппированных вокруг следующих вопросов: равновеликость и равносоставленность многоугольников; медиана делит треугольник на два треугольника равной площади; разрезание треугольника и выпуклого четырёхугольника на две равновеликие части.

Приведены 16 задач (с ответами и указаниями) для самостоятельного решения.



Вып. 10. *А. Б. Сосинский.* Узлы и косы.

Красивые и наглядные понятия узла и косы сейчас в центре внимания современной математики и физики. В брошюре обсуждаются их простейшие геометрические и алгебраические свойства и их компьютерная обработка.