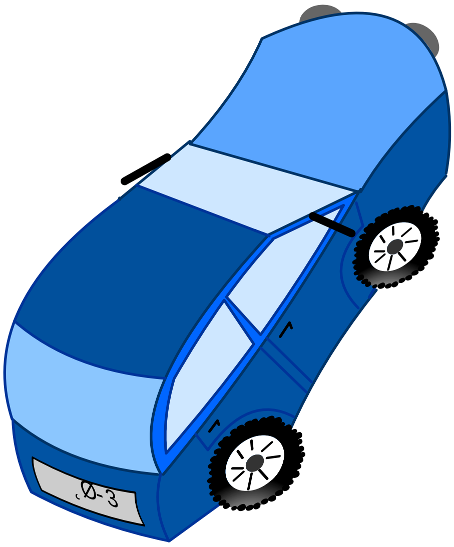
III олимпиада по геометрии памяти И.Ф.Шарыгина, 2007 год.
Финал.
8 класс

1. (С.Маркелов) Определите, с какой стороны расположен руль у изображенного на рисунке автомобиля.



Решение. В зеркалах заднего вида водитель должен видеть дорогу сзади автомобиля. Для этого зеркало со стороны водителя должно располагаться почти перпендикулярно оси автомобиля, а с противоположной стороны — под углом, примерно равным 45°. Следовательно, у автомобиля на рисунке руль справа.

2. (Б.Френкин) Восстановите прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) по вершинам A, C и точке на биссектрисе угла B.

Первое решение. Так как треугольник ABC прямоугольный, вершина B лежит на прямой, проходящей через C и перпендикулярной AC. Кроме того, при симметрии относительно биссектрисы угла B точка A переходит в лежащую на этой же прямой точку A', такую что $BA' = BA$. Для любой лежащей на биссектрисе точки L имеем $LA = LA'$, а поскольку $BA > BC$, точки A' и L лежат по разные стороны от прямой AC (рис.8.2.1). Таким образом, получаем следующее построение.

Проведем через C прямую l, перпендикулярную AC.

Проведем окружность с центром L и радиусом LA и найдем точку A' ее пересечения с l, лежащую с L по разные стороны от AC.

Проведем серединный перпендикуляр к отрезку AA' и найдем точку B его пересечения с l.

Задача имеет решение тогда и только тогда, когда $AL > CL$ и $\angle ACL < 90°$.

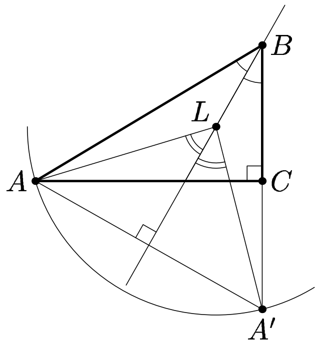


Рис. 8.2.1.

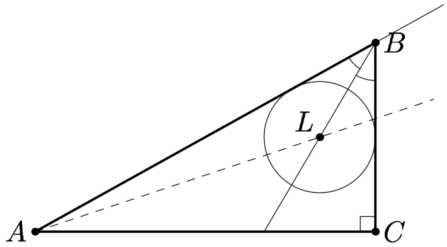


Рис. 8.2.2.

Второе решение. Мы знаем прямую BC — это перпендикуляр к AC, проведенный через C. Построим окружность с центром в точке L, касающуюся BC. Так как BL — биссектриса, то эта окружность касается также и AB. Тогда точка B — это точка пересечения BC и луча из точки A, касающегося нашей окружности. При этом точка пересечения AL и BC лежит на отрезке BC (рис 8.2.2). Такой касательный луч только один (или вовсе нет его).

Построение проходит, когда L и A лежат по одну сторону от BC, а диаметр окружности меньше AC, то есть как раз когда $AL > CL$ и $\angle ACL < 90°$.

Замечание. Если точке L разрешить лежать на *продолжении* биссектрисы (или хотя бы на луче биссектрисы, а не на отрезке!), то решений будет чаще всего два, соответствующие двум касательным.

Третье решение. Аналогично строим прямую BC. Пусть K — точка пересечения AL и BC. Тогда BL — биссектриса в треугольнике ABK, и B лежит на окружности Аполлония для отрезка AK и точки L внутри него. При этом опять надо из двух точек пересечения брать дальнюю от C.

3. (Б.Френкин) Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре подобных треугольника. Докажите, что его можно разрезать на два равных треугольника.

   Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Если, например, угол AOB тупой, то он больше любого из углов треугольника BOC, т. е. треугольники AOB и BOC не могут быть подобны. Следовательно, диагонали четырехугольника перпендикулярны.

   Из подобия прямоугольных треугольников AOB и BOC следует, что угол OAB равен либо углу OCB, либо углу OBC. В первом случае диагональ BD является серединным перпендикуляром к AC, т. е. осью симметрии четырехугольника и, значит, разрезает его на два равных треугольника. Во втором случае угол B прямой.

   Рассуждая аналогично, получаем, что если ни одна из диагоналей не является осью симметрии четырехугольника, то все его углы прямые, а так как диагонали перпендикулярны, то четырехугольник — квадрат. Но диагональ квадрата является его осью симметрии — противоречие.

4. (А.Заславский) Найдите геометрическое место точек пересечения высот треугольников, у которых даны середина одной стороны и основания высот, опущенных на две другие.

Решение. Пусть C_0 — середина стороны AB треугольника ABC, A_1, B_1 — основания высот, опущенных на стороны BC, AC. Так как треугольники ABA_1, ABB_1 — прямоугольные, их медианы A_1C_0, B_1C_0 равны половине гипотенузы AB. Следовательно, если для данных точек $C_0A_1 \neq C_0B_1$, то искомое ГМТ — пустое множество. Это же верно и в случае, когда C_0 — середина A_1B_1, ибо $A_1B_1 = AB\cos C < AB$.

Если же $A_1B_1C_0$ — равнобедренный треугольник, то точки A, B лежат на окружности ω с центром C_0 и радиусом $C_0A_1 = C_0B_1$, причем являются концами диаметра этой окружности. Если треугольник ABC остроугольный, то его ортоцентр H является пересечением хорд AA_1 и BB_1 этой окружности (рис.8.4). Тогда угол A_1HB_1 равен полусумме дуг A_1B_1 и AB, т. е. $90^\circ + \frac{\angle A_1C_0B_1}{2}$. Следовательно, точка H лежит на дуге окружности с концами A_1, B_1, вмещающей этот угол. Аналогично, если треугольник ABC тупоугольный, то H лежит на дополнительной дуге этой же окружности. Если же AB — катет прямоугольного треугольника, то его ортоцентр совпадает с вершиной прямого угла, т. е. с одной из точек A_1, B_1, и значит, также лежит на этой окружности.

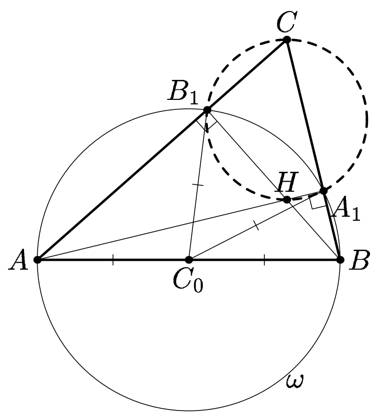


Рис. 8.4.

С другой стороны, если мы возьмем точку H на нашей окружности, то прямые A_1H и B_1H пересекают окружность ω в диаметрально противоположных точках. Тогда это — точки A и B, а C есть пересечение AB_1 и AA_1; таким образом, треугольник ABC существует для любой точки H нашей окружности. Следовательно, искомым ГМТ будет вся окружность.

5. (С.Берлов) Медианы AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке M, причем $\angle AMB = 120^\circ$. Докажите, что углы $AB'M$ и $BA'M$ не могут быть оба острыми или оба тупыми.

   Решение. Если $AA' = BB'$, то $A'M = AA'/3 = BB'/3 = BM/2$. Отсюда и из того, что $\angle A'MB = 60^\circ$, получаем, что $\angle BA'M = 90^\circ$. Аналогично $\angle AB'M = 90^\circ$.

   Пусть теперь $AA' > BB'$, X — проекция B на AA', Y — проекция A на BB' (рис.8.5). Тогда $MX = MB/2 < MA'$, $MY = MA/2 > MB'$ и, следовательно, $\angle BA'M < 90^\circ < \angle AB'M$.

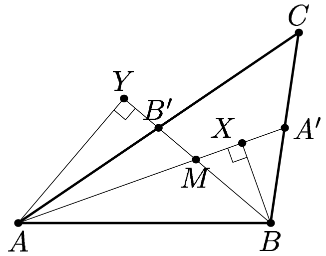


Рис. 8.5.

6. (Б.Френкин) Назовем два неравных треугольника *похожими*, если можно обозначить их ABC и $A'B'C'$, так чтобы выполнялись равенства $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle B = \angle B'$. Существуют ли три попарно похожих треугольника?

Решение. Да, существуют. Например, пусть XYZ — правильный треугольник, P — точка на дуге XY описанной около него окружности, отличная от середины дуги (рис.8.6). Тогда треугольники XPY, YPZ, ZPX попарно не равны. При этом в треугольниках XPZ и YPZ сторона PZ общая, $XZ = YZ$ и $\angle XPZ = \angle YPZ = 60°$. В треугольниках XPZ и XPY сторона XP общая, $XZ = XY$ и $\angle PZX = \angle PYX$. Аналогично находятся равные элементы в треугольниках PXY и PYZ.

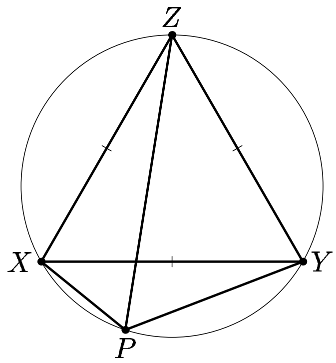


Рис. 8.6.

9 класс

1. (Б.Френкин) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Докажите, что радиус этой окружности меньше суммы радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD.

Первое решение. Пусть ℓ — касательная к окружности, вписанной в треугольник ABC, параллельная AC; ℓ_1, ℓ_2 — касательные к вписанной окружности четырехугольника, параллельные ℓ. Рассмотрим гомотетию с центром B, переводящую окружность, вписанную в треугольник ABC, во вписанную окружность четырехугольника. Она переводит прямые ℓ и AC в ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Поскольку AC лежит ближе к B, чем ℓ_2, то ℓ лежит ближе к B, чем ℓ_1, т. е. вписанная в четырехугольник окружность не пересекает прямой ℓ. Аналогично она не пересекает параллельной AC прямой, касающейся окружности, вписанной в треугольник ACD, и значит, лежит внутри полосы, образованной этими двумя прямыми. Но ширина этой полосы равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники.

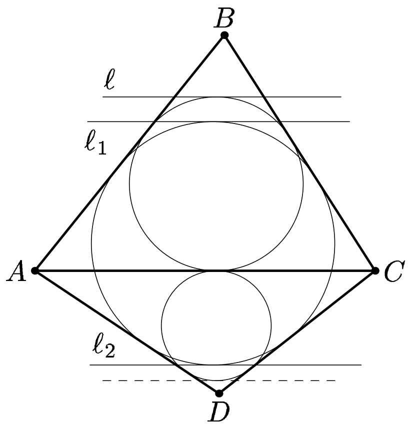


Рис. 9.1.

Второе решение. Пусть r, r_1, r_2 — радиусы вписанных окружностей четырехугольника $ABCD$ и треугольников ABC, ACD соответственно; p, p_1, p_2 — их полупериметры. Тогда $p > p_1$, $p > p_2$ и

$$pr = S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = p_1r_1 + p_2r_2 < p(r_1 + r_2).$$

Третье решение. Пусть диагонали пересекаются в точке O. Проведем касательную ℓ_1 ко вписанной в $ABCD$ окружности ω, параллельную AC и отделяющую B от AC. Такая, очевидно, есть. Тогда из гомотетии, переводящей ω в окружность, вписанную в ABC, имеем, что коэффициент гомотетии r_2/r больше, чем отношение расстояний от D до O и до B, то есть больше DO/BD. Из аналогичных соображений $r_1/r > BO/BD$. Складывая, получаем требуемое.

2. (А.Хачатурян) На основании AD и боковой стороне AB равнобедренной трапеции $ABCD$ взяты точки E, F соответственно так, что $CDEF$ — также равнобедренная трапеция. Докажите, что $AE \cdot ED = AF \cdot FB$.

Первое решение. Из условия задачи следует, что $\angle DCF = \angle CDA = \angle DAB = \angle FEA$ (рис.9.2). Следовательно, $\angle BCF = \angle AFE$ и

$$\frac{BF}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle CBF} = \frac{\sin\angle AFE}{\sin\angle FEA} = \frac{AE}{AF},$$

что равносильно утверждению задачи

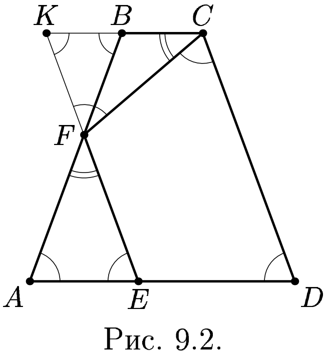


Рис. 9.2.

Второе решение. Пусть прямая EF пересекает BC в точке K. Тогда $\angle FKC = \angle FEA = \angle CDA = \angle BAD = \angle KFC$, поэтому равнобедренные треугольники CFK и FAE подобны, и $CF/AF = FK/AE = FB/AE$. Отсюда $DE \cdot AE = CF \cdot AE = FB \cdot AF$, что и требовалось.

3. (А.Заславский) В шестиугольнике $ABCDEF$ $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$ и $\angle A = \angle C = \angle E$. Докажите, что главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

   Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ACF. Тогда O лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам AC, CE, EA, которые совпадают с биссектрисами углов B, D, F шестиугольника. Кроме того, из симметрии имеем $\angle BAO = \angle BCO$, $\angle DCO = \angle DEO$, $\angle FAO = \angle FEO$. Так как попарные суммы этих углов по условию равны, то равны и они сами, то есть AO, CO, EO — тоже биссектрисы углов шестиугольника (рис.9.3) и O — центр вписанной в него окружности. Значит, по теореме Брианшона главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

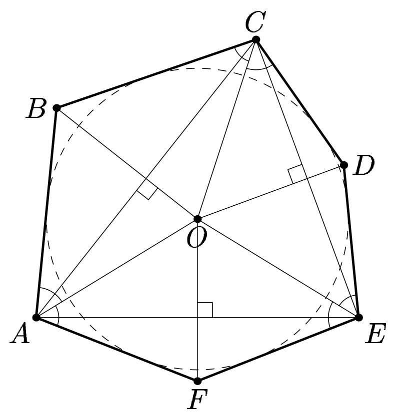


Рис. 9.3.

4. (С.Тахаев) Дан треугольник ABC. Точка P лежит на окружности ABH, где H — ортоцентр треугольника. Прямые AP, BP пересекают противоположные стороны треугольника в точках A', B'. Найдите ГМТ середин отрезков $A'B'$.

   Первое решение. Пусть AA_1, BB_1 — высоты в треугольнике ABC. Тогда $\angle A'AA_1 = \angle PAH = \angle PBH = \angle B'BB_1$. Следовательно, треугольники $A'AA_1$ и $B'BB_1$ подобны и отношение $A'A_1/B'B_1$ не зависит от точки P. Значит, когда точка A' движется по прямой BC с постоянной скоростью, точка B' движется по прямой AC также с постоянной скоростью и середина отрезка $A'B'$ тоже движется по прямой. Взяв в качестве P точки пересечения окружности с AC и BC, отличные от вершин треугольника, убеждаемся, что эта прямая совпадает с A_1B_1 (рис. 9.4).

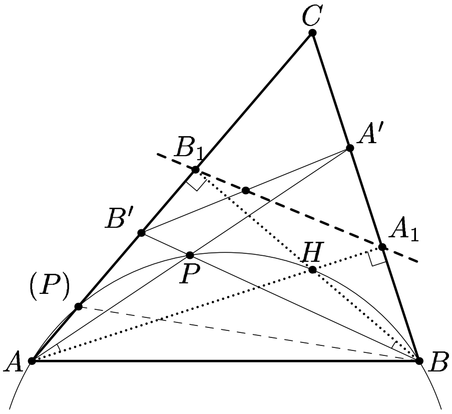


Рис. 9.4.

Второе решение. Опять заметим, что треугольники AA_1A' и BB_1B' подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{AA_1}{BB_1} = \dfrac{AC}{BC}$. Таким образом, $\dfrac{A_1A'}{B_1B'} = \dfrac{AC}{BC}$, а значит, отношение расстояний от A' и B' до A_1B_1 равно

$$\frac{A_1A'\sin CA_1B_1}{B_1B'\sin CB_1A_1} = \frac{AC}{BC}\frac{\sin CAB}{\sin CBA} = 1,$$

то есть середина $A'B'$ лежит на A_1B_1.

Наоборот, для каждой точки на прямой A_1B_1 можно построить хорду $A'B'$ угла BAC, которая делится этой точкой пополам. Тогда $\dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{AC}{BC}$, и все рассуждения проходят в обратную сторону.

5. (А.Заславский) Постройте треугольник, если даны центр вписанной в него окружности, середина одной из сторон и основание опущенной на эту сторону высоты.

   Первое решение. Пусть C_0 — середина стороны AB треугольника ABC, C_1, C_2 — основания проведенных к этой стороне высоты и биссектрисы, C_3, C_4 — точки ее касания с вписанной и вневписанной окружностями. Тогда $C_0C_3 = C_0C_4$. Перпендикуляры к AB, проведенные из точек C_1, C_3, C_4, пересекают биссектрису угла C в вершине и центрах I, I' вписанной и вневписанной окружностей. Так как точки C и C_2 являются центрами гомотетии этих окружностей, $CI/C_2I = CI'/C_2I'$. Значит, $C_1C_3/C_2C_3 = C_1C_4/C_2C_4$, т. е. $C_0C_3^2 = C_0C_1 \cdot C_0C_2$.

   Пусть теперь даны точки I, C_0, C_1. Тогда найдем точки C_3 как проекцию I на C_0C_1 и C_2, пользуясь полученным выше соотношением. Теперь точка C находится как пересечение C_2I и перпендикуляра к C_0C_1, проведенного через C_1. Далее, точка C' пересечения CI и перпендикуляра к C_0C_1, проведенного через C_0, лежит на описанной окружности треугольника (рис.9.5.1). Центр этой окружности является пересечением $C'C_0$ и серединного перпендикуляра к CC'; поэтому, проведя эту окружность и найдя точки ее пересечения с C_0C_1, мы построим искомый треугольник.

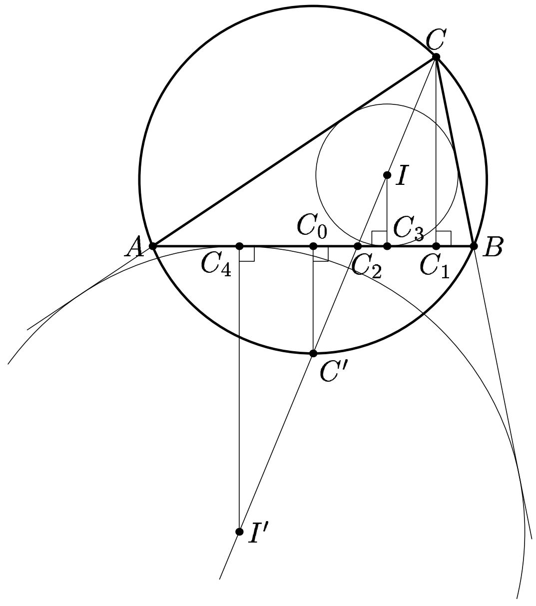


Рис. 9.5.1.

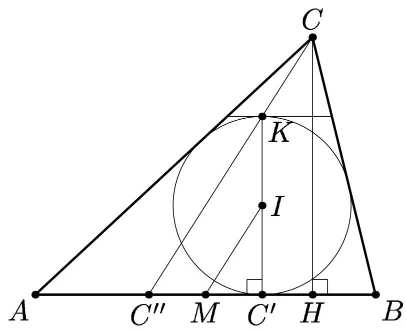


Рис. 9.5.2.

Второе решение. Пусть M, H — основания медианы и высоты из вершины C треугольника ABC, I — центр вписанной окружности, C' и C'' — точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной AB, K — точка на вписанной окружности, диаметрально противоположная C'. Из гомотетии, переводящей вписанную окружность во вневписанную, получаем, что C, K, C'' лежат на одной прямой. Далее, $MC' = MC''$, поэтому IM — средняя линия в треугольнике $KC'C''$ и $IM \parallel C''C$.

Теперь последовательно восстанавливаем прямую $AB = MH$; вписанную окружность и точку C'; точки C'' и K как симметричные C' относительно M и I; вершину C как пересечение перпендикуляра к AB в точке H и прямой $C''K$; точки A и B, как пересечения касательных ко вписанной окружности из точки C (рис.9.5.2).

6. (Т.Караваева, А.Заславский) Куб с ребром $2n+1$ разрезают на кубики с ребром 1 и бруски размера $2 \times 2 \times 1$. Какое наименьшее количество единичных кубиков может при этом получиться?

   Ответ: $2n+1$.

   Решение. Разрежем куб плоскостями, параллельными какой-нибудь грани, на слои $(2n+1) \times (2n+1) \times 1$. Так как любой полукирпич $2 \times 2 \times 1$ пересекает каждый слой по четному числу единичных кубиков, в каждом слое должен содержаться хотя бы один кубик, т. е. общее число кубиков не меньше, чем $2n+1$. Покажем по индукции, что разрезание с $2n+1$ единичным кубиком существует. Предположим, что куб с ребром $2n-1$ разрезать требуемым образом можно. Рассмотрим оболочку, которая получается, если из куба с ребром $2n+1$ удалить все внутренние кубики. Если удалить из этой оболочки два кубика, стоящие в противоположных углах, то оставшуюся часть можно разбить на 6 квадратов $2n \times 2n \times 1$, каждый из которых содержит один из оставшихся угловых кубиков. Следовательно, оболочку можно разрезать на полукирпичи и два единичных кубика, а внутренность куба по предположению индукции — на полукирпичи и $2n-1$ кубик.

10 класс

1. (Б.Френкин) В остроугольном треугольнике отметили отличные от вершин точки пересечения описанной окружности с высотами, проведенными из двух вершин, и биссектрисой, проведенной из третьей вершины, после чего сам треугольник стерли. Восстановите его.

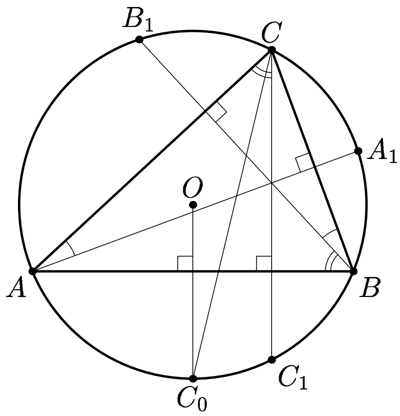


Рис. 10.1.

Решение. Пусть биссектриса угла C пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке C_0, а высоты, проведенные из вершин A, B — в точках A_1, B_1. Так как $\angle A_1AC = \angle B_1BC = 90^\circ - \angle C$, точка C является серединой дуги A_1B_1, не содержащей C_0. Далее, прямая OC_0 является серединным перпендикуляром к AB, и значит, параллельна высоте, проведенной из C. Проведя эту высоту, найдем вторую точку C_1 ее пересечения с окружностью и затем найдем точки A, B, как середины дуг B_1C_1 и A_1C_1 (рис.10.1).

2. (В.Протасов) Точки A', B', C' — основания высот остроугольного треугольника ABC. Окружность с центром B и радиусом BB' пересекает прямую $A'C'$ в точках K и L (точки K и A лежат по одну сторону от BB'). Докажите, что точка пересечения прямых AK и CL лежит на прямой BO, где O — центр окружности, описанной около ABC.

Первое решение. Так как ортоцентр треугольника ABC является центром вписанной окружности треугольника $A'B'C'$, точка, симметричная B' относительно AB, лежит на прямой $A'C'$, т. е. совпадает с K. Аналогично B' и L симметричны относительно BC. Отсюда следует, что $\angle AKC' = \angle AB'C' = \angle CB'A' = \angle CL'A'$, т. е. точка пересечения AK и CL лежит на серединном перпендикуляре к отрезку KL. Так как $BK = BB' = BL$, этот серединный перпендикуляр совпадает с биссектрисой угла KBL, которая в силу равенства $\angle OBA = \angle B'BC = 90^\circ - \angle C$ проходит через O (рис.10.2.1).

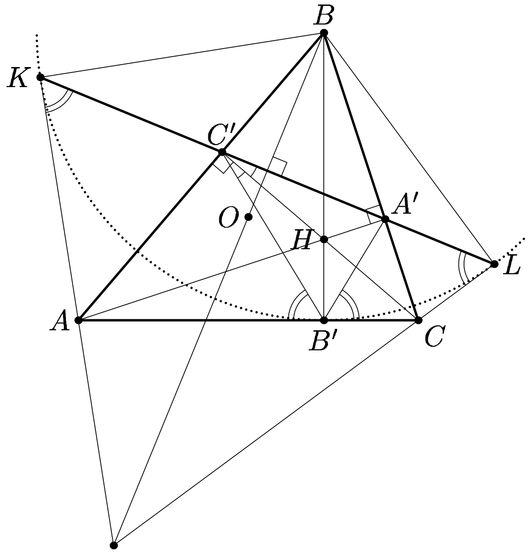


Рис. 10.2.1.

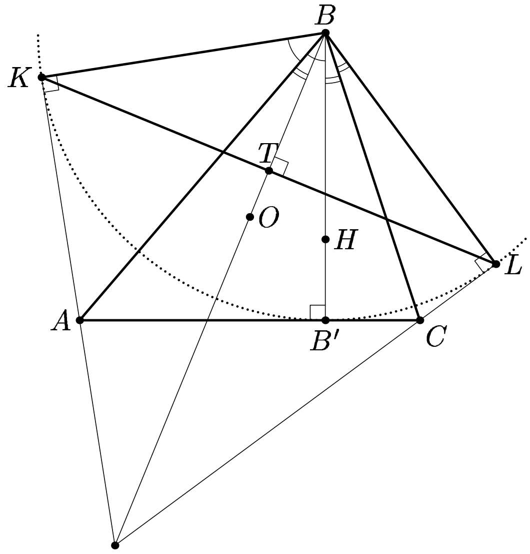


Рис. 10.2.2.

Второе решение. Пусть BT — высота в $\triangle BA'C'$. Как известно, O лежит на BT. Из подобия $BA'C'$ и BCA имеем $BT/BK = BT/BB' = BA'/BC = \cos ABC$, поэтому $\angle KBT = \angle LBT = \angle ABC$. Тогда $\angle KBA = \angle KBT - \angle ABT = \angle ABC - \angle CBB' = \angle ABB'$. Тогда точки K и B' симметричны относительно AB, поэтому AK (и аналогично CL) — касательные к нашей окружности в точках K и L. Они пересекаются на биссектрисе $\angle KBL$, т. е. на $BT = BO$ (рис.10.2.2).

3. (А.Заславский) Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q. C — произвольная точка одной из окружностей, отличная от P и Q; A, B — вторые точки пересечения прямых CP, CQ с другой окружностью. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников ABC.

   Первое решение. Пусть C_1 — точка, диаметрально противоположная C, C_2 — точка, симметричная C_1 относительно центра O второй окружности. Тогда, так как $C_1P \perp AC$, а проекцией O на AC является середина отрезка PA, $C_2A \perp AC$. Аналогично, $C_2B \perp AB$. Значит, центром описанной около ABC окружности будет середина отрезка CC_2. При этом CC_2 параллелен отрезку между центрами окружностей и вдвое его длиннее. Следовательно, искомым ГМТ будет окружность, полученная из той, на которой лежит точка C, переносом на вектор, определяемый центрами данных окружностей, без точек, соответствующих P и Q (рис.10.3).

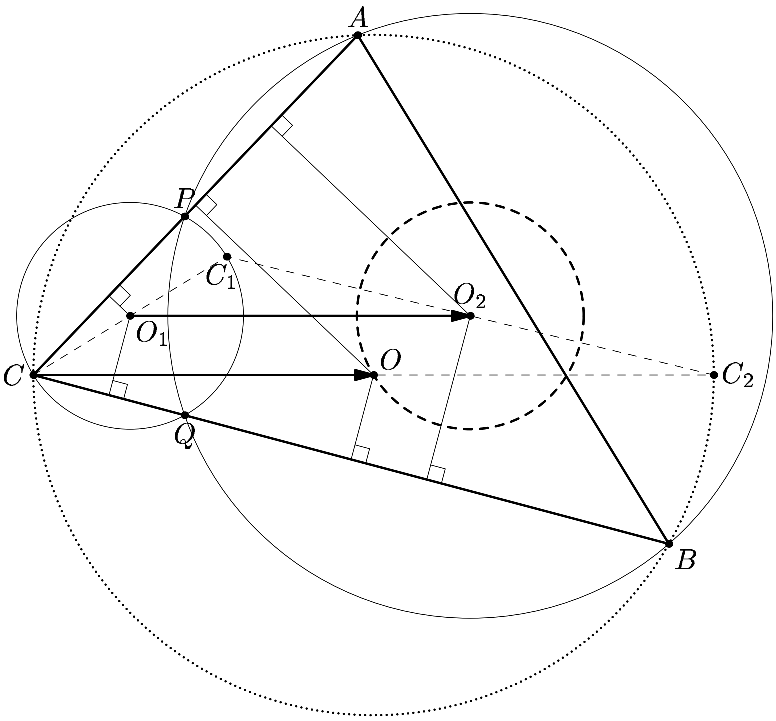


Рис. 10.3.

Второе решение. Пусть O_1 и O_2 — центры исходных окружностей, а O — центр окружности ABC. Тогда проекции O_1 и O_2 на AC — середины отрезков CP и PA, поэтому проекция $\overrightarrow{O_1O_2}$ равна $\overrightarrow{CA}/2$. Аналогично, его проекция на CB есть $\overrightarrow{CA}/2$. Значит, проекции $\overrightarrow{O_1O_2}$ и $\overrightarrow{CO}$ на эти прямые совпадают, а значит, $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{CO}$. Тогда для каждой точки C точка O получается переносом на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$, а значит, искомое ГМТ — окружность, полученная переносом первой окружности на этот вектор, кроме точек, соответствующих P и Q.

4. (А.Заславский) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Точки C', D' симметричны ортоцентрам треугольников ABD и ABC относительно O. Докажите, что если прямые BD и BD' симметричны относительно биссектрисы угла B, то прямые AC и AC' симметричны относительно биссектрисы угла A.

   Первое решение. Покажем, что произведения расстояний от O до противоположных сторон четырехугольника равны. Действительно, если X, Y — проекции D' на BC и AB, а X', Y' — основания высот треугольника ABC, опущенных на эти же стороны, то отношение расстояний от O до AD и CD равно

$$\frac{\cos\angle ABD}{\cos\angle CBD} = \frac{\cos\angle CBD'}{\cos\angle ABD'} = \frac{BX}{BY} = \frac{CX'}{AY'} = \frac{\cos\angle BCA}{\cos\angle BAC},$$

   т. е. отношению расстояний от O до AB и BC. Покажем, что по трем вершинам четырехугольника, обладающего этим свойством, четвертая определяется однозначно, т. е. оно равносильно как условию задачи, так и ее заключению.

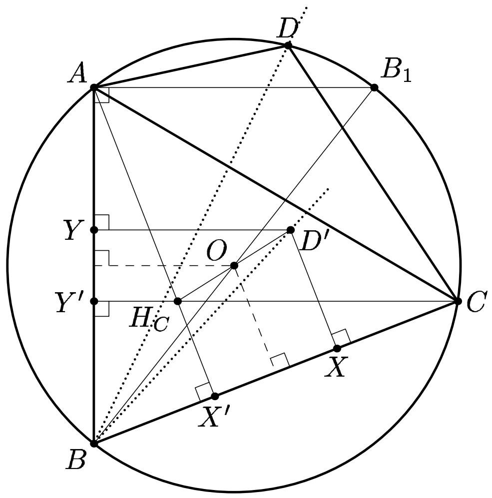


Рис. 10.4.1

Итак, пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, в котором произведения расстояний от центра описанной окружности до противоположных сторон равны. Рассмотрим четырехугольник AB_1CD_1, где B_1, D_1 — точки, диаметрально противоположные B, D. Очевидно, что, например, AB_1 равно удвоенному расстоянию от центра окружности до AB, т. е. наше свойство равносильно тому, что четырехугольник AB_1CD_1 — гармонический. Но в гармоническом четырехугольнике три вершины однозначно определяют четвертую.

Второе решение. Отметим на нашей окружности ω точки C'' и D'' такие, что BD и BD'' симметричны относительно биссектрисы угла B, а AC и AC'' симметричны относительно биссектрисы угла A. Тогда имеем $\smile AD'' = \smile DC = \smile C''B$, то есть C'' и D'' симметричны относительно серединного перпендикуляра d к отрезку AB. Заметим, что точки B, D' и D'' лежат на одной прямой.

Выясним, как строятся точки C' и D'. Пусть отрезок $A'B'$ симметричен отрезку AB относительно O, а ℓ — прямая, параллельная AB и проходящая через точку O — центр ω. Тогда вторая точка пересечения высоты CH_C треугольника ABC с ω получается из C симметрией относительно ℓ, а ортоцентр H_C из этой точки — симметрией относительно AB; наконец, D' получается из H_C симметрией относительно O. Композиция этих трех преобразований — симметрия относительно середины K отрезка $A'B'$ (см. рис.10.4.2). Итак, точки C' и D' лежат на окружности ω', симметричной ω относительно K.

Суммируем полученные результаты. Нам нужно доказать, что точки A, C', C'' лежат на одной прямой, то есть — что прямые BD' и AC' симметричны относительно d. Покажем для этого, что точка C' при отражении относительно d попадает на прямую BD', а точнее — во вторую точкой пересечения BD' и ω' (обозначим эту точку через D'_0). Это эквивалентно тому, что D и D'_0 симметричны относительно $A'B'$.

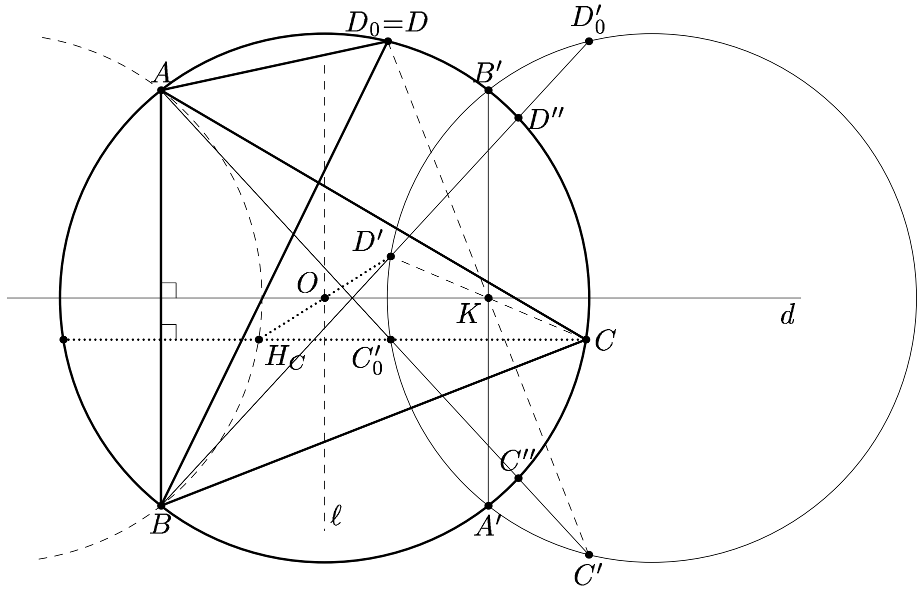


Рис. 10.4.2

Итак, пусть D_0 — точка, симметричная D'_0 относительно $A'B'$. Тогда

$$\smile AD'' = 2\angle ABD'' = 2\angle(B'A', D'D'') = \smile A'D' + \smile B'D'_0 = \smile B'C' + \smile D_0B',$$

последнее равенство — в силу симметрий. Итак, $\smile AD'' = \smile D_0C$, что и означает $D = D_0$.

5. (А.Заславский) Каждое ребро выпуклого многогранника параллельно перенесли на некоторый вектор так, что ребра образовали каркас нового выпуклого многогранника. Обязательно ли он равен исходному?

Первое решение. Нет. Рассмотрим, например, правильный икосаэдр. Пять его граней, имеющие общую вершину, являются боковыми гранями правильной пятиугольной пирамиды. Центры этих граней образуют правильный пятиугольник, стороны которого параллельны сторонам основания пирамиды. Поэтому ребра икосаэдра параллельны ребрам додекаэдра, образованного центрами его граней. Следовательно, параллельно перенеся ребра икосаэдра, можно получить додекаэдр.

Второе решение. Рассмотрим призму $ABCA'B'C'$ с разносторонним треугольником ABC в основании. Пусть B_1 — середина BB', а точки A_1 и C_1 расположены на ребрах AA' и CC' так, что $AA_1 = C'C_1$ (рис.10.5).

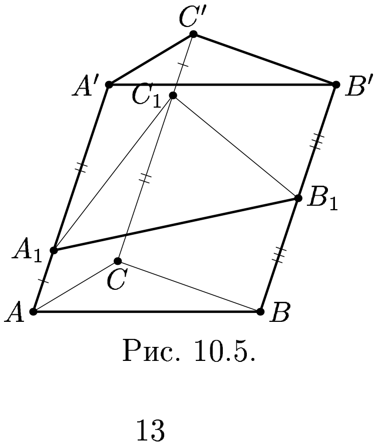


Рис. 10.5.

Тогда в многогранниках $ABCA_1B_1C_1$ и $A'B'C'A_1B_1C_1$ ребра удовлетворяют условию. Легко подобрать параметры так, чтобы все ребра в каждом из них были различными, а двугранный угол при AB — непрямым. Тогда эти многогранники не могут быть равными, так как двугранные углы при одинаковых ребрах AB и $A'B'$ дополнительны и потому различны.

6. (В.Протасов) Даны две концентрические окружности. Каждая из окружностей b_1 и b_2 касается внешним образом одной окружности и внутренним — другой, а каждая из окружностей c_1 и c_2 касается внутренним образом обеих окружностей. Докажите, что 8 точек, в которых окружности b_1, b_2 пересекают c_1, c_2, лежат на двух окружностях, отличных от b_1, b_2, c_1, c_2. (Некоторые из этих окружностей могут вырождиться в прямые.)

Первое решение. Обозначим концентрические окружности через ω и ω', их центр — O, точки касания ω с b_1, b_2, c_1, c_2 — через B_1, B_2, C_1, C_2, точки касания ω' с ними же — через B'_1, B'_2, C'_1, C'_2. Все углы и дуги предполагаем ориентированными, углы mod 180°, дуги mod 360°.

Рассмотрим пару b_i, c_k. Рассмотрим точку B''_i, диаметрально противоположную B_i на ω. Тогда $B_iC_k \perp B''_iC_k \parallel B'_iC'_k$ (последнее — т. к. $C_kC'_k$ и $B_iB'_i$ проходят через O). Пусть прямые $B'_iC'_k$ и B_iC_k пересекаются в точке X_{ik}. Тогда $\angle B'_iX_{ik}B_i = \angle C'_kX_{ik}C_k = 90°$, т. е. это одна из точек пересечения b_i и c_k. Другую точку их пересечения мы обозначим через Y_{ik}. Заметим, что дуги B_iC_k, B_iX_{ik} и $X_{ik}C_k$ окружностей ω, b_i и c_i имеют одинаковую градусную меру, ибо они гомотетичны. Поэтому $\angle B_iY_{ik}X_{ik} = \angle X_{ik}Y_{ik}C_k = \frac{1}{2} \smile B_iC_k$ (рис. 10.6.1).

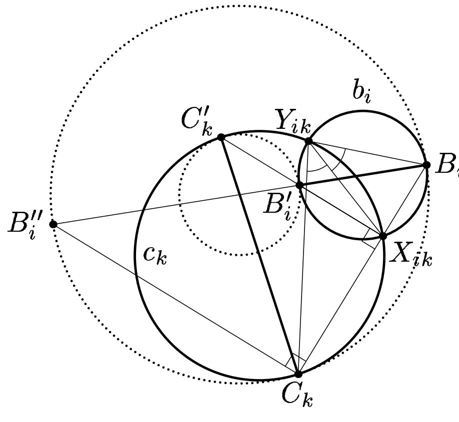


Рис.10.6.1

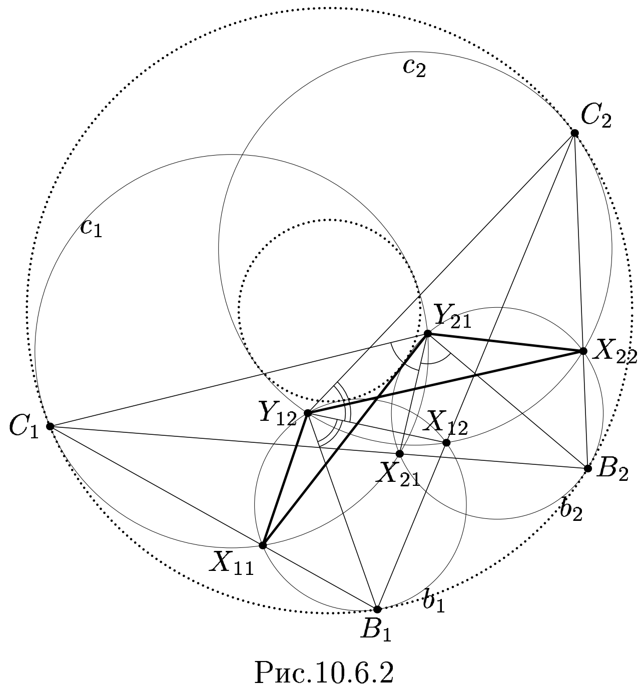


Рис.10.6.2

Покажем, что точки X_{11}, X_{22}, Y_{12} и Y_{21} лежат на одной окружности. Имеем (напомним — mod 180°; см. рис. 10.6.2)

$$\angle X_{11}Y_{12}X_{22} = \angle X_{11}Y_{12}B_1 + \angle B_1Y_{12}C_2 + \angle C_2Y_{12}X_{22} = \frac{\smile C_1B_1 + 2 \smile B_1C_2 + \smile C_2B_2}{2}.$$

Аналогично,

$$\angle X_{22}Y_{21}X_{11} = \frac{\smile C_2B_2 + 2 \smile B_2C_1 + \smile C_1B_1}{2},$$

и

$$\angle X_{11}Y_{12}X_{22} + \angle X_{22}Y_{21}X_{11} = \smile C_1B_1 + \smile B_1C_2 + \smile C_2B_2 + \smile B_2C_1 = 0,$$

что и требовалось.

Замечание. Приведем другой (может быть, более естественный) способ выяснить ту же информацию про точки X_{ik} и Y_{ik}. Здесь в одном месте намеренно пропущена деталь, которая впоследствии восстанавливается.

Пусть X и Y — точки пересечения b_i и c_k. Тогда обозначим через Y^b и Y^c проекции точки Y на ω из точек B_i и C_k, соответственно. Эти точки являются образами Y при гомотетиях, переводящих соответственно b_i и c_k в ω. Обозначим радиусы ω и ω' через R и r. Радиусы b_j и c_k равны $\frac{R-r}{2}$ и $\frac{R+r}{2}$, поэтому имеем

$$\frac{YY^c}{YC_k} = \frac{Y^cC_k}{YC_k} - 1 = \frac{R}{(R+r)/2} - 1 = \left(\frac{R}{(R-r)/2} - 1\right)^{-1} = \left(\frac{B_kY^b}{YB_k} - 1\right)^{-1} = \frac{YB_k}{YY^b},$$

то есть, вроде бы, $Y^bC_k \parallel Y^cB_j$. Тогда $\angle B_iYC_k = \smile B_iC_k$. но такая точка на окружности b_i (отличная от B_i) одна, что странно, ибо рассуждения проходят и для точки X (рис.10.6.3).

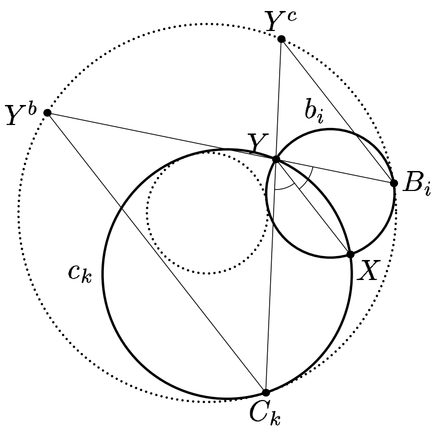


Рис.10.6.3

На самом деле, мы пользовались тем, что точка Y *не лежит на прямой* B_iC_k (иначе все рассматриваемые точки лежат на этой прямой, и из равенства отношений нельзя вывести параллельность). Значит, одна из точек пересечения лежит на этой прямой. Для окружностей b_i и c_k, обозначим через X_{ik} их точку пересечения, не лежащую на прямой B_iC_k, а через Y_{ik} — лежащую. Далее решение может быть продолжено как и выше.

Второе решение. Сформулируем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Теорема Птолемея. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность тогда и только тогда, когда выполнено равенство $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Теорема Кези. Пусть даны четыре окружности. Окружность, касающаяся их всех, существует тогда и только тогда, когда отрезки общих касательных к окружностям удовлетворяют равенству, аналогичному теореме Птолемея. При этом для каждой пары окружностей надо брать отрезок общей внешней касательной, если искомая окружность касается их одинаковым (внешним или внутренним) образом, и отрезок общей внутренней касательной в противном случае.

Теорема Кези является обобщением теоремы Птолемея и легко из нее выводится.

Следствие. Пусть на сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки X, Y, такие что $XY \parallel AB$. Тогда существует окружность, проходящая через X, Y и касающаяся одинаковым образом вневписанных окружностей треугольника, вписанных в углы A и B.

Доказательство. Применим теорему Кези к двум вневписанным окружностям и двум вырожденным окружностям X и Y.

Лемма. Пусть даны две окружности, лежащие одна вне другой. Произвольная окружность, касающаяся их одинаковым образом, пересекает одну из их общих внутренних касательных в точках A и A', а другую — в точках B и B'. Тогда среди прямых AB, AB', $A'B$, $A'B'$ найдутся две, параллельные общим внешним касательным к данным окружностям.

Действительно, зафиксируем точку A на одной из внутренних касательных. Через нее можно провести две окружности, касающиеся данных одинаковым образом. По следствию из теоремы Кези, каждая из этих окружностей проходит через одну из точек пересечения второй внутренней касательной с прямыми, проходящими через A и параллельными внешним касательным (см. рис. 10.6.4). Значит, одна из таких точек совпадает, например, с точкой B, т. е. прямая AB параллельна одной из общих внешних касательных. Тогда, поскольку четырехугольник $ABB'A'$ — вписанный, то прямая $A'B'$ параллельна второй внешней касательной.

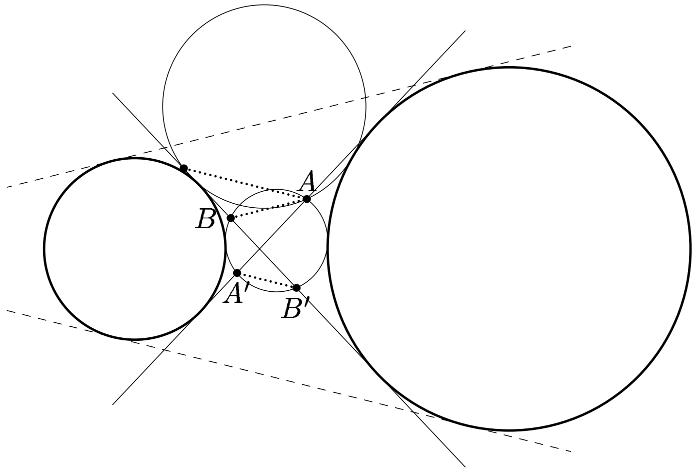


Рис. 10.6.4

Вернемся теперь к решению исходной задачи. Очевидно, что окружности c_1 и c_2 пересекаются. Инверсия с центром в одной из точек их пересечения переводит эти окружности в прямые l_1, l_2, а исходные концентрические окружности в две окружности, для которых l_1, l_2 являются общими внутренними касательными. Окружности

b_1, b_2 перейдут в две окружности, касающиеся этих окружностей одинаковым образом. Пусть одна из них пересекает l_1 в точках A_1, A_1', а l_2 — в точках A_2, A_2'. Аналогично вторая окружность пересекает эти прямые в точках B_1, B_1', B_2, B_2'. Тогда по лемме получаем, что, например, $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ и, значит, точки A_1, A_2, B_1', B_2' лежат на одной окружности. Аналогично доказывается, что остальные четыре точки лежат на одной окружности. Сделав теперь обратную инверсию, получим утверждение задачи.

Третье решение. Будем использовать два вспомогательных факта. Первый состоит в том, что геометрическое место точек, отношение степеней которых относительно двух данных окружностей равно заданному числу, является окружностью или прямой. Это можно доказать, например, методом координат. Напомним, что степенью точки M относительно окружности называется число $d^2 - r^2$, где r – радиус окружности и d – расстояние от ее центра до точки M. Второй вспомогательный факт сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. Две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 пересекаются в точках A и B. Пусть P — четвертая вершина параллелограмма O_2AO_1P. Тогда для любой окружности с центром P, пересекающей обе окружности (первую — в точках M_1, N_1, вторую — в точках M_2, N_2, рис.10.6.5) прямые M_1M_2 и N_1N_2 проходят через точку A и $\frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

Доказательство. Треугольники PO_1M_1 и M_2O_2P равны по трем сторонам, откуда $\angle M_1O_1P = \angle M_2O_2P$. Кроме того, $\angle PO_1B = \angle PO_2B$, поскольку O_2O_1PB — равнобедренная трапеция. Складывая эти равенства, получаем $\angle M_1O_1B = \angle M_2O_2B$, поэтому $\smile BM_1 = \smile BM_2$. Следовательно, $\angle M_1AB = \angle M_2AB$, и прямая M_1M_2 проходит через точку A. С прямой N_1N_2 — аналогично. Далее, хорды M_1N_1 и M_2N_2 стягивают на двух окружностях одинаковые углы, следовательно $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Поскольку четырехугольник $M_1M_2N_1N_2$ вписанный, треугольники M_1AN_1 и N_2AM_2 подобны с коэффициентом $\frac{M_1N_1}{M_2N_2}$, поэтому $\frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

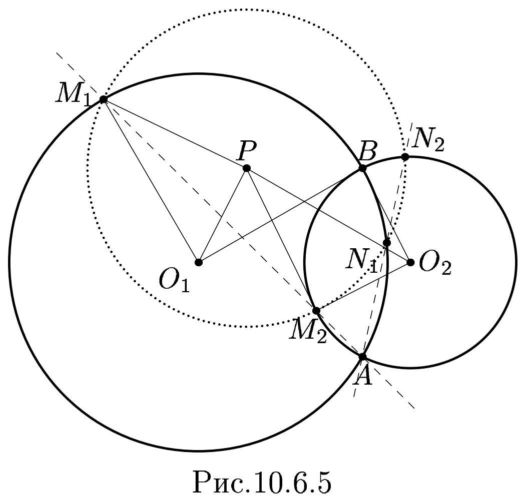


Рис.10.6.5

Теперь начинаем решение задачи. Пусть P – общий центр данных окружностей, будем называть их большей и меньшей окружностью, окружности β_0, β_1 радиуса R касаются данных внутренним образом, а окружности γ_0, γ_1 радиуса r касаются большей окружности внутренним образом, а меньшей — внешним. Точки пересечения

β_i и γ_k обозначим A^0_{ik} и A^1_{ik} (первая точка находится дальше второй от центра P). Проведем произвольную окружность с центром P, она пересекает каждую из окружностей β_i и γ_k в двух точках $b^s_i, s = 0, 1$ (соответственно c^s_k). При обходе окружности β_i в положительном направлении, начиная с точки ее касания с большей окружностью, сначала идет b^0_i, потом b^1_i. С точками c^s_k аналогично (рис.10.6.6). Все верхние индексы берутся по модулю 2, например $A^2_{10} = A^0_{10}, c^3_1 = c^1_1$.

Покажем, что 4 точки A^{i+k}_{ik} ($i, k \in \{0, 1\}$) лежат на одной окружности. Пусть O_1, O_2 — центры окружностей β_0 и γ_0 соответственно. Тогда $O_2A^0_{00}O_1P$ — параллелограмм, длины его сторон — r и R. По лемме 1 прямые $b^0_0c^0_0$ и $b^1_0c^1_0$ пересекаются в точке A^0_{00}. Обозначим через $\mathbf{b}$ окружность, касающуюся β_0 и β_1 в точках b^0_0 и b^1_1 соответственно, а через $\mathbf{c}$ — окружность, касающуюся γ_0 и γ_1 в точках c^1_0 и c^0_1 соответственно. Предполагаем, что $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не вырождаются в прямые. Пусть x — радиус окружности $\mathbf{b}$, взятый со знаком плюс, если эта окружность касается β_0 внешним образом, и со знаком минус, если внутренним. Аналогично, y — радиус окружности $\mathbf{c}$, взятый со знаком. Пусть также B — вторая точка пересечения прямой $b^0_0A^0_{00}$ с окружностью $\mathbf{b}$, а C – вторая точка пересечения прямой $c^1_0A^0_{00}$ с окружностью $\mathbf{c}$. В силу подобия окружностей имеем $b^0_0B = \frac{x}{R}b^0_0A^0_{00}$, следовательно, степень точки A^0_{00} относительно $\mathbf{b}$ равна $A^0_{00}b^0_0 \cdot A^0_{00}B = \big(1 + \frac{x}{R}\big)\big(A^0_{00}b^0_0\big)^2$. Аналогично, степень точки A^0_{00} относительно $\mathbf{c}$ равна $\big(1 + \frac{y}{r}\big)\big(A^0_{00}c^1_0\big)^2$. Согласно лемме 1 имеем $A^0_{00}b^0_0/A^0_{00}c^1_0 = R/r$. Следовательно, отношение степеней точки A^0_{00} относительно окружностей $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ равно $\frac{(R+x)R}{(r+y)r}$. Проведя то же рассуждение с точками $A^0_{11}, A^1_{10}, A^1_{01}$, получаем, что у каждой из них отношение степеней относительно $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ равно $\frac{(R+x)R}{(r+y)r}$. Следовательно, эти 4 точки лежат на одной окружности.

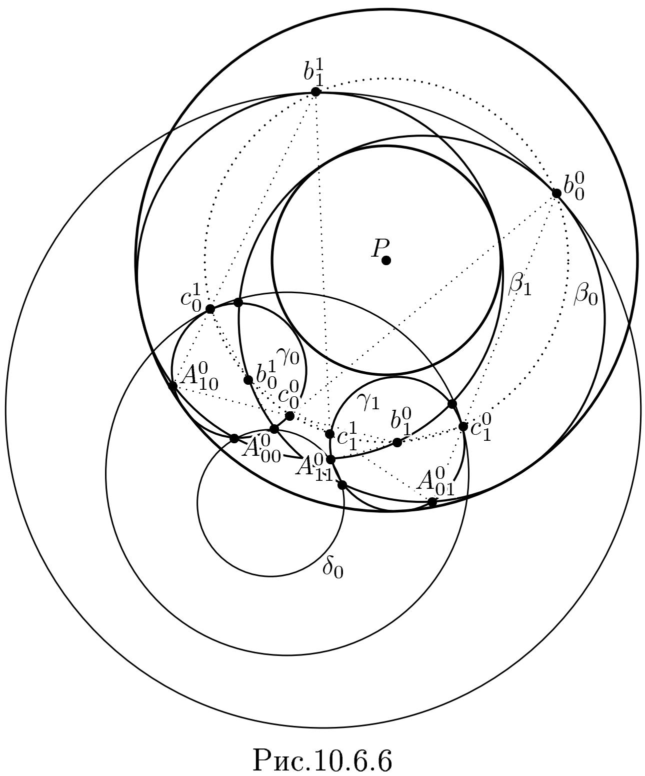


Рис.10.6.6