IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 8 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Существует ли выпуклый четырехугольник без параллельных сторон, который можно разрезать на четыре равных треугольника?

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC и $\angle A = 50^\circ$. Точки K и L на катете BC таковы, что $\angle KAC = \angle LAB = 10^\circ$.
Найдите CK/LB.

3. В выпуклом четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями равны два противолежащих угла. Докажите, что в него можно вписать окружность.

4. Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A', B', прямые AA' и BB' пересекаются в точке C_1. Докажите, что $\angle C_1CA = \angle C_0CB$.

5. Даны два треугольника ABC, $A'B'C'$. Обозначим через α угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины A. Аналогично определим углы β, γ, α', β', γ'. Известно, что $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Обязательно ли треугольники подобны?

IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 8 класс. Второй день

31 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

6. Рассматриваются треугольники, все вершины которых являются вершинами данного правильного 2008-угольника. Каких среди них больше: остроугольных или тупоугольных?

7. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и углом α при вершине. На отрезке AC во внешнюю сторону построена дуга с градусной мерой β. Две прямые, проходящие через вершину B, делят как отрезок, так и дугу AC на три равные части. Найдите α/β.

8. На доске был нарисован выпуклый четырёхугольник. Боря отметил центры четырёх окружностей, каждая из которых касается одной стороны четырёхугольника и продолжений двух соседних с ней. После чего Алёша стёр четырёхугольник. Сможет ли Боря определить, чему равнялся периметр четырёхугольника?

IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 9 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Выпуклый многоугольник можно разрезать на 2008 равных четырехугольников. Обязательно ли у него есть центр или ось симметрии?

2. На плоскости дан четырёхугольник $ABCD$. Для произвольной точки P на плоскости обозначим через K, L, M, N ее проекции на прямые AB, BC, CD, DA, соответственно. Найдите ГМТ P таких, что $KM \perp LN$.

3. Докажите неравенство
$$\frac{1}{\sqrt{2\sin A}} + \frac{1}{\sqrt{2\sin B}} + \frac{1}{\sqrt{2\sin C}} \leqslant \sqrt{\frac{p}{r}},$$
где p — полупериметр, а r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

4. Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A_c, B_c, прямые AA_c и BB_c пересекаются в точке C_1. Аналогично определим точки A_1, B_1. Докажите, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

5. Можно ли оклеить поверхность правильного тетраэдра одинаковыми правильными шестиугольниками в один слой?

IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 9 класс. Второй день

31 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

6. Постройте неравнобедренный треугольник, если даны основания высоты и биссектрисы, проведенных к одной стороне, а также точка пересечения медиан.

7. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R. Через ортоцентр H этого треугольника провели другую окружность того же радиуса, пересекающую описанную окружность в точках X и Y. Точка Z выбрана так, что $CXZY$ — параллелограмм. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, B, Z.

8. На окружности ω, описанной около треугольника ABC, взяты две точки P и Q. Серединный перпендикуляр l к отрезку PQ пересекает прямые BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Пусть A'', B'', C'' — вторые точки пересечения l с окружностями, описанными около треугольников $A'PQ$, $B'PQ$, $C'PQ$ соответственно. Докажите, что прямые AA'', BB'', CC'' пересекаются в одной точке.

IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 10 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Вписанно-описанный n-угольник разрезан прямой линией на два вписанно-описанных многоугольника с разным количеством сторон. При каких n это возможно?

2. Пусть $A_1B_1C_1$ — треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно центра окружности, вписанной в его серединный треугольник. Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.

3. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в двух точках X и Y, а третья окружность ω касается внутренним образом окружностей ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. Отрезок XY пересекает окружность ω в двух точках M и N. Лучи PM и PN пересекают ω_1 в точках A и D, а лучи QM и QN пересекают ω_2 в точках B и C соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

4. На прямой l даны три точки C_0, C_1, C_2. Найдите геометрическое место центров окружностей вписанных в треугольники ABC, у которых сторона AB лежит на прямой l, а основания медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из вершины C, совпадают с C_0, C_1, C_2.

5. Сечение правильной четырехугольной пирамиды является правильным пятиугольником. Найдите отношение его стороны к стороне основания пирамиды.

IV олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 10 класс. Второй день

31 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

6. В треугольнике ABC выполняется равенство $AC \cdot BC = 8Rr$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Докажите, что $\angle C < 60°$.

7. Медианы AA' и BB' треугольника ABC являются хордами двух окружностей. Дуги этих окружностей, направленные в сторону вершины C, имеют одинаковую градусную меру. Докажите, что общая хорда этих окружностей проходит через вершину C.

8. Конечное множество точек на плоскости таково, что из любых трёх его точек найдутся две, расстояние между которыми не превосходит 1. Докажите, что это множество можно разбить на три части, диаметр каждой из которых не превосходит 1.