XXVIII Турнир им. М. В. Ломоносова 25 сентября 2005 года

Конкурс по математическим играм

Уважаемые участники! Ниже приведены правила четырёх игр и задания по ним. Мы настоятельно рекомендуем не браться за несколько игр разом, а прочесть условия и выбрать ту, которая кажется более привлекательной. Проиграйте различные варианты игры, почувствуйте её и попытайтесь выполнить задания. Более-менее серьёзный анализ даже только одной игры заведомо позволит считать Вас одним из победителей конкурса. Если в выбранной Вами для решения игре Вы обнаружили какие-то закономерности, принципы, сумели разобрать не указанные в заданиях достаточно общие случаи, напишите об этом тоже.

1. «Неравные кучки»

Правила. Есть куча из нескольких камней. За ход можно разбить одну из имеющихся куч на две непустых. При этом требуется, чтобы ни в какой момент не было двух одинаковых куч. Тот, кто не сможет пойти, проигрывает.

Задания.

1) При игре в 16 камней начинающий сделал ход $5 + 11$. Покажите, как теперь второй игрок сможет победить.

2) При игре в 16 камней начинающий сделал ход $5 + 11$. Приведите пример (неудачного) хода второго игрока, после которого он проиграет.

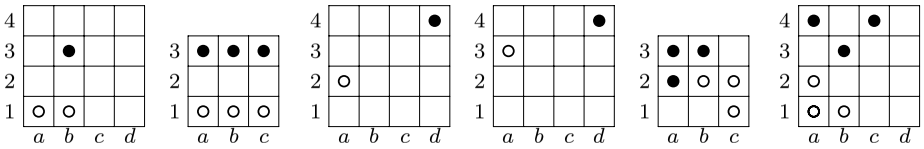
3) Кто победит при игре в 11 камней? Обоснуйте свой ответ.

4) А кто победит в игре в 22 камня? Обоснуйте свой ответ.

2. «Шашки по-новому»

Правила. Чёрные и белые шашки играют на клетчатой доске. Изначально их поровну, и они стоят в верхнем и нижнем ряду доски. Шашка за ход может перейти в любую смежную по стороне свободную клетку или побить шашку соперника, стоящую в любой из четырёх смежных по углу клеток (побившая шашка ставится на место побитой, побитая — снимается с доски). Бить не обязательно, но цель игры — побить все шашки противника.

Задания.



1) В позиции 1 белые начинают и имеют преимущество в одну шашку. Найдите выигрыш для белых. В той же позиции укажите возможный (неудачный) ход белых, который приведёт их к проигрышу.

2) Опишите возможные партии из начальной позиции 2. Кто из игроков добьётся победы?

3) В позициях 3 и 4 начинают белые. Докажите, что они проигрывают позицию 3, но побеждают в 4. Как вы думаете, когда в двухшашечных позициях будут побеждать белые, а когда чёрные?

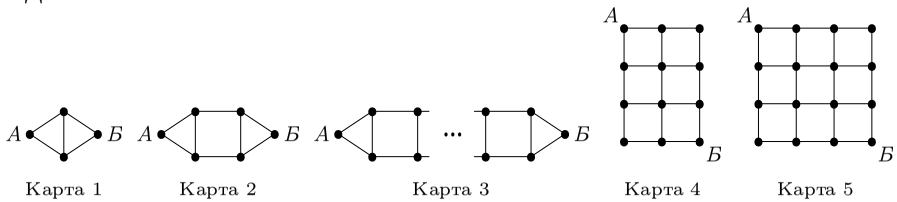
4) В позиции 5 начинают чёрные. Покажите, что при любом их ходе им не удастся избежать поражения.

5) Найдите выигрыш за белых из позиции 6.

3. «Дороги»

Правила. В стране два главных города, А и Б. Многие города соединены просёлочными дорогами (карты прилагаются). Две строительные фирмы по очереди асфальтируют по одной дороге. Та фирма, после хода которой впервые возникает возможность проехать по асфальту от А до Б, объявляется победительницей, а другая проигрывает.

Задания.



1) Какая фирма, та, которая начинает, или её соперница, победит на карте № 1?

2) Тот же вопрос про карту № 2.

3) Тот же вопрос для карты № 3 (здесь n «перемычек»)?

4) Кто победит для карты № 4?

5) Кто победит для карты № 5?

6) А кто победит для карты, обобщающей два последних случая и выглядящей как прямоугольник $m \times n$ клеточек?

4. «Бусы из скрепок»

Правила. Есть цепочка из белых и красных скрепок, общее количество которых нечётно. Игрок за один ход может отцепить себе с любого края цепочку из нескольких скрепок, но так, чтобы она была «красивой», то есть симметричной, не менялась при переворачивании. Цепочка из одной скрепки считается красивой. Если вся цепочка красивая, можно одним ходом забрать её целиком. У кого к концу игры окажется больше скрепок, тот и победил.

Задания.

1) Докажите, что какова бы ни была цепочка из более чем двух скрепок, игрок может отцепить от неё по крайней мере две скрепки за ход.

2) Кто из игроков победит при игре с цепочкой КБКББББКККБББКБКБ? (Буквами К и Б обозначены красная и белая скрепки.)

3) Кто из игроков победит при игре с цепочкой ККБКККБББКБКККБКБББКККБКБ?