Конкурс по физике. Ответы и решения. Версия 18.10.2008.

В скобках после номера задачи указаны классы, которым эта задача рекомендуется. Ученикам *7 класса и младше* достаточно решить **одну** «свою» задачу, ученикам *8–10 классов* — **две** «своих» задачи, ученикам *11 класса* — **три** «своих» задачи. Также можно решать задачи старших классов, а задачи класса младше своего оцениваются невысоко.

1. (6–8) Перед спортивным соревнованием проводилась жеребьёвка, определяющая порядок игр между участниками. В стеклянной чаше лежало несколько одинаковых непрозрачных пластмассовых шаров, один из которых публично извлекается представителем спортивной команды. Каждый шар свинчивается из двух половинок, внутри пустой и там лежит записка. Выяснилось, что жеребьёвка проведена нечестно: один из шаров был помечен. На следующий день внимательно изучили видеозапись жеребьёвки и сами шары, но не обнаружили ничего подозрительного. Как именно мог быть отмечен шар (чтобы никаких следов потом не осталось)?

Решение. Один из вариантов: перед жеребьёвкой «нужный» шар подержать в холодильнике. Холодный шар легко найти рукой и «выбрать» во время жеребьёвки.

Условие задачи достаточно надёжно «закрывает» все прочие варианты.

Так, если какой-то шар сделать более шершавым, чем остальные (или нанести ещё какие-нибудь механические или цветовые отметки на поверхность) — это бы выяснилось при последующим изучении шаров.

Расположить шары в чаше определённым образом, в принципе, можно. С другой стороны, перед тем, как тянуть жребий, их наверняка перемешали.

Положить внутрь что-нибудь громыхающее тоже нельзя: в условии ясно сказано, что шар внутри пустой, и кроме записки там ничего нет (а если бы и было — это было бы заметно на видеосъёмке и вызвало бы подозрения).

В принципе допустимый вариант: в одном из шаров зажать записку за края между свинчивающимися половинками (чтобы она не «болталась» внутри), а в остальные шары записки просто положить. И в процессе жерьбьёвки все шары невзначай потрясти, и выбрать тот шар, в котором ничего не болтается.

Можно один из шаров завинтить не до конца. Тогда тот, кто тянет жребий, должен незаметно пробовать «дозавинчивать» каждый шар, и «случайно» вытянуть тот, который «дозавинтится».

Можно на «нужный» шар натянуть сеточку из очень тонкой нити, которая чувствуется на ощупь, но не видна на видеосъёмке. При развинчивании шара сеточка порвётся, и никаких следов на этом шаре не останется.

Возможно, участники Турнира придумают и ещё какие-нибудь варианты...

Комментарий. Фокусами, похожими на тот, что мы разобрали, занимаются вовсе не только фокусники и обманщики. Физики также очень часто сталкиваются с «загадками», когда два объекта вроде бы абсолютно

ничем не отличаются, но ведут себя по-разному. «Загадки» эти бывают самыми разными — от простых приборов, где что-то незаметно замкнуло в электрической цепи (или в механическое приспособление попала «вредная» песчинка, или где-то образовалась маленькая дырочка, через которую что-нибудь утекает), до фундаментальных свойств элементарных частиц. Задача физиков во всех этих случаях — догадаться и/или придумать эксперименты, позволяющие «загадку» разгадать. В нашем случае видеосъёмки процедуры жеребьёвки и последующего изучения лотерейных шаров оказалось недостаточно.

2. (6–8) Расстояние от дома до школы со скоростью 6 км/ч можно пройти на 1 минуту быстрее, чем со скоростью 5 км/ч. Найдите это расстояние.

Ответ. 0,5 км.

Решение. Эта задача простая, но адресована младшим школьникам, только начинающим изучать физику, поэтому приведём подробную запись решения.

Пусть x — расстояние от дома до школы. Составим уравнение в соответствии с условием задачи:

$$\frac{x}{5\text{ км/ч}} = \frac{x}{6\text{ км/ч}} + 1\text{ мин}$$

Решим это уравнение. Один час — это 60 минут, поэтому

$$\frac{x}{5\text{ км/ч}} = \frac{x}{6\text{ км/ч}} + \frac{1}{60}\text{ ч}$$

Умножим уравнение (левую и правую часть) на 1 км/ч, получим

$$\frac{x}{5} = \frac{x}{6} + \frac{1}{60}\text{ км}$$

Приведём все дроби к общему знаменателю 60:

$$\frac{12x}{60} = \frac{10x}{60} + \frac{1}{60}\text{ км}$$

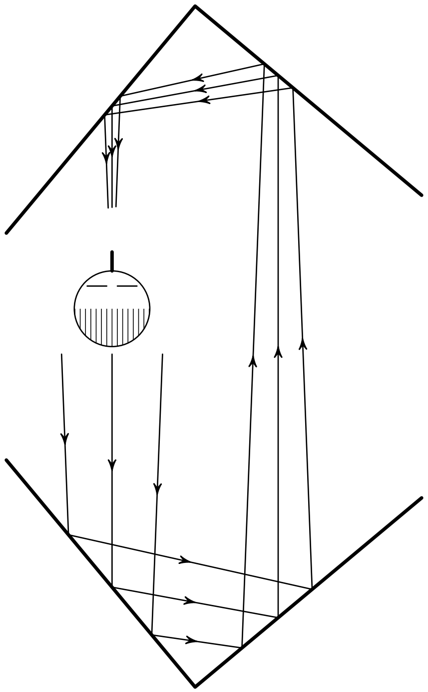
$$12x = 10x + 1\text{ км}$$

$$2x = 1\text{ км}$$

$$x = 0{,}5\text{ км}$$

3. (7–10) Света не любит ходить в парикмахерскую и делает себе причёски сама. Она хочет так расположить плоские зеркала, чтобы, сидя на стуле, видеть свой собственный затылок прямо перед собой на расстоянии 1 метр. Изображение не должно быть перевёрнутым, повёрнутым, растянутым, изображение правой части затылка должно быть справа, левой — слева. Придумайте необходимую схему зеркал.

Решение. Годится любой удовлетворяющий условию вариант — их очень много. Например, такой (причёска и лицо девушки показаны условно):



Здесь мы воспользовались известным фактом: «уголок» из зеркал (два зеркала, расположенные перпендикулярно друг другу) «разворачивает» падающий световой луч на 180°. Одним зеркальным «уголком» мы развернули лучи света, идущие от затылка девушки, на 180°, и направили их мимо головы этой девушки. А затем другим таким же «уголком» опять развернули пучок световых лучей на 180° и направили эти лучи прямо в глаза девушке, причём с нужного направления, благодаря чему она и увидит изображения своего затылка. При этом изображение окажется неперевёрнутым: по картинке видно, что луч от правой части затылка приходит с правой стороны, а от левой части — с левой.

4. (8–10) В таблице приводятся характеристики трёх металлов: меди, алюминия и натрия. Из какого металла дешевле всего делать электрические провода (если в качестве затрат учитывать только указанную стоимость металла, использованного для изготовления проводов)?

металл	плотность ρ, кг/м^3	стоимость, C, руб/кг	удельное электрическое сопротивление $\rho_{эл}$, Ом · м
алюминий	2700	71	$27{,}1 \cdot 10^{-9}$
медь	8940	203	$17{,}8 \cdot 10^{-9}$
натрий	968	120	$43{,}0 \cdot 10^{-9}$

Ответ. При учёте исключительно стоимости металла оказывается, что электрические провода дешевле всего делать из натрия. Однако такие провода практически не используются ввиду того, что другие параметры металлического натрия (кроме стоимости) являются неудачными для изготовления проводов.

Решение. Определим объём V металла плотностью ρ, необходимый для изготовления провода длиной L и сопротивлением R.

$$R = \rho_{эл}\frac{L}{S} = \rho_{эл}\frac{L^2}{SL} = \rho_{эл}\frac{L^2}{V}$$

$$V = \rho_{эл}\frac{L^2}{R}$$

Масса этого металла

$$m = \rho V = \rho\rho_{эл}\frac{L^2}{R}$$

Стоимость Σ этого металла

$$\Sigma = Cm = C\rho V = C\rho\rho_{эл}\frac{L^2}{R}$$

(здесь использованы обозначения: C — цена единицы массы металла, $\rho_{эл}$ — удельное электрическое сопротивление).

Сомножитель $\dfrac{L^2}{R}$ одинаков для провода из любого материала. Поэтому нужно подобрать такой материал, для которого минимально произведение $C\rho\rho_{эл}$.

металл	плотность ρ, кг/м^3	стоимость, C, руб/кг	удельное электрическое сопротивление $\rho_{эл}$, Ом · м	$C\rho\rho_{эл}$, руб/$\frac{м^2}{Ом}$
алюминий	2700	71	$27{,}1 \cdot 10^{-9}$	$5{,}1950700 \cdot 10^{-3}$
медь	8940	203	$17{,}8 \cdot 10^{-9}$	$3{,}2303796 \cdot 10^{-2}$
натрий	968	120	$43{,}0 \cdot 10^{-9}$	$4{,}9948800 \cdot 10^{-3}$

Видно, что «экономическая эффективность» меди в качестве материала для изготовления проводов примерно в 6 раз хуже, чем алюминия. Но из-за мягкости и хрупкости алюминия его невозможно использовать, например, в качестве материала для проводов контактной сети электротранспорта. А для проводов сети уличного освещения или бытовой стационарной электросети алюминиевые провода вполне годятся.

Натрий, несмотря на то, что он немного «дешевле» алюминия, использовать для изготовления проводов крайне затруднительно — этот металл окисляется на воздухе, бурно реагирует с водой и очень непрочен.

Примечание. Цены на металлы в рублях приведены на конец лета 2008 года и получены путём усреднения найденных в интернете параметров предложений о покупке и продаже таких металлов. Для анализа были отобраны только экономически оправданные данные (например, цены на химически-чистые металлы существенно выше, но для изготовления проводов такая чистота не требуется).

5. (8–11) Несколько футболистов бегут по полю прямолинейно со скоростью 10 км/ч в разных направлениях. Известно, что каждый встретился с каждым. Докажите, что все они встретились в одном месте поля.

Решение. Перейдём в систему отсчёта, связанную с одним любым из футболистов (в которой он неподвижен). В этой системе отсчёта все футболисты будут двигаться равномерно и прямолинейно, и их пути пересекутся в месте расположения неподвижного футболиста. Футболисты, движущиеся по разным направлениям, могут встретится только в точке пересечения этих направлений, то есть в месте расположения неподвижного футболиста. По условию задачи это происходит одновременно.

6. (8–11) Пенопластовый цилиндр длиной $L = 1$ м с прикреплённым на одном из его концов грузом плавает в озере, сохраняя вертикальное положение. Чтобы медленно «утопить» цилиндр, давя на него вертикальной силой, нужно совершить минимальную работу $A_1 = 2$ Дж. Чтобы медленно вытащить цилиндр из воды, вытягивая его вертикальной силой, нужно совершить минимальную работу $A_2 = 16$ Дж. Какова масса цилиндра с грузом? Считать $g = 10$ м/с^2.

Ответ. $\approx 1{,}53$ кг.

Решение. Пусть сечение стержня S, его длина равна L, а глубина погружения его нижнего конца в положении равновесия равна l. Тогда масса стержня вместе с грузом равна произведению объёма его погруженной части на плотность воды ρ:

$$M = \rho S l.$$

Когда цилиндр утапливается, он перемещается вниз на расстояние $x_1 = L - l$, а также «выдавливает» из под себя объём воды $V_2 = x_1 S$. Центр масс этой воды ранее находился на глубине $x_2 = l + (x_1/2)$, а после погружения цилиндра можно условно считать, что эта вода «растеклась» по поверхности озера. Таким образом, при погружении цилиндра совершается работа

$$A_2 = \rho V_2 g x_2 - M g x_1 = \rho x_1 S g x_2 - \rho S l g x_1 = \rho g x_1 S (x_2 - l) =$$

$$= \rho g x_1 S \left(l + \frac{x_1}{2} - l\right) = \rho g x_1 S \frac{x_1}{2} = \frac{\rho g x_1^2 S}{2} = \frac{\rho g S (L-l)^2}{2}.$$

Когда стержень вытаскивается из воды, то совершается работа, равная

$$A_1 = Mgl - \frac{Mgl}{2} = \frac{Mgl}{2} = \frac{\rho S l g l}{2} = \frac{\rho g S l^2}{2},$$

так как весь стержень поднимается на высоту, равную глубине его погружения l, а в образовавшуюся «ямку» стекает вода. Отсюда

$$S l^2 = \frac{2A_1}{\rho g}.$$

Из составленных соотношений можно найти величину S.

$$\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} = \sqrt{\frac{\rho g S l^2}{2}} + \sqrt{\frac{\rho g S (L-l)^2}{2}} = \sqrt{\frac{\rho g S}{2}} \left(\sqrt{l^2} + \sqrt{(L-l)^2}\right)$$

$$\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} = \sqrt{\frac{\rho g S}{2}} \cdot L, \qquad \text{откуда} \qquad \sqrt{S} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}\right)}{\sqrt{\rho g} L}$$

Находим массу стержня

$$M = \rho S l = \rho \sqrt{S} \sqrt{S l^2} = \rho \cdot \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}\right)}{\sqrt{\rho g} L} \cdot \sqrt{\frac{2A_1}{\rho g}} =$$

$$= \frac{2}{gL} \sqrt{A_1} \left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}\right) = \frac{2}{gL} \left(A_1 + \sqrt{A_1 A_2}\right)$$

Подставляем численные значения

$$M = \frac{2}{10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 1\ \text{м}} \left(2\ \text{Дж} + \sqrt{2\ \text{Дж} \cdot 16\ \text{Дж}}\right) = \frac{2}{10} \left(2 + 4\sqrt{2}\right) \text{кг} \approx 1{,}53\ \text{кг}.$$

7. (9–11) Если по маленькому воздушному шарику со всей силы стукнуть рукой, он пролетает с большой скоростью примерно полтора–три метра, а затем резко тормозит. Почему?

Решение. Во время удара мы деформируем оболочку шарика, одновременно резко сдвигая её. В результате возникает устойчивый воздушный вихрь, движущийся в направлении удара по шарику. Шарик захватывается вихрем, какое-то время в этом вихре летит, а потом из вихря «вываливается» (возможно, из-за того, что вихрь к этому моменту ослабевает).

Рассуждения о силе трения между шариком и окружающим воздухом в данном случае не могут считаться корректными, так как шарик в процессе движения «захватывает с собой» прилегающий слой воздуха. Масса этого слоя сравнима с массой самого шарика (в том числе может быть и больше), кинетические энергии шарика и прилегающего слоя воздуха также сравнимы друг с другом. Поэтому в данном случае фактически приходится рассматривать движение вихревой воздушной структуры, частью которой шарик является.

Комментарий. Эксперимент лучше всего получается, если воздушный шарик небольшой, с тонкой оболочкой и надут туго, но не до предела.

Для демонстрации в аудитории шарик можно пинать не только в бок, но и вверх (чтобы было лучше видно).

8. (9–11) Кастрюля с водой на газовой плите прогревается до температуры примерно 80–90 °С, после чего температура стабилизируется и довести воду до кипения не удаётся. Эта же кастрюля без воды на этой же плите достаточно быстро целиком (вместе с крышкой) прогревается больше чем до 100 °С (это легко выясняется с помощью брызг воды, вскипающих на её поверхности). То есть равновесная температура тела в форме кастрюли, при которой рассеиваемая тепловая мощность равна получаемой от газового пламени, явно больше 100 °С. Так почему же вода в этой кастрюле не закипает? Дайте любое разумное объяснение, соответствующее приведённому краткому описанию физической ситуации.

Решение. Скорее всего в зависимости от того, полная кастрюля или пустая, меняется выделяемая тепловая мощность пламени конфорки. Точнее, мощность, поглощаемая кастрюлей из этого пламени. Вероятно, температура дна кастрюли является «граничным условием» для пламени. И режим горения существенно зависит от того, какая именно у этого дна температура — то ли оно сразу прогрелось (пустая кастрюля), то ли нет.

Мощность может зависеть от полноты сгорания, от температуры наиболее горячей части пламени и расположения этой части относительно дна кастрюли (чем горячее и ближе к дну, тем больше передаваемая кастрюле тепловая мощность).

Потери на испарение воды очень быстро растут с ростом температуры. Если бы кастрюля была закрыта герметично, как например так называемая «скороварка», то она скорее всего прогрелась бы до температуры выше 100 градусов, в точности так же как и пустая кастрюля. Из условия задачи не вполне ясно, была ли кастрюля с водой закрыта крышкой. Но для решения эта информация не существенна. Конечно, если крышка есть, то испарение будет немного менее интенсивным, и вода прогреется до немного большей температуры. Но если крышка не герметична, то пар всё равно будет улетучиваться, «унося» с собой часть теплоты, затраченную на его образование.

Отметим также, что давление в бытовом газопроводе очень ненамного выше атмосферного. Поэтому изменение режима горения и связанное с ним незначительное изменение давления в зоне горения может существенно повлиять на расход газа из конфорки. А с уменьшением количества сгораемого в единицу времени газа, естественно, уменьшается и мощность.

Примечание. Для произвольной газовой плиты и произвольной кастрюли наливание в кастрюлю воды совершенно не обязательно снизит тепловую мощность, передаваемую кастрюле, до уровня, который не позволяет воду кипятить. Мощность может даже, наоборот, увеличиться (никаких физических причин, препятствующих этому, нет). Только на все случаи, кроме описанного в условии задачи, люди обычно не обращают внимания.

9. (10–11) Рассматриваются электрические схемы, состоящие только из резисторов. Один резистор переменный (R_x), остальные фиксированные. К двум контактам схемы подключён источник постоянного напряжения (оно не зависит от сопротивления схемы).

Возможна ли такая схема, в которой при монотонном изменении сопротивления резистора R_x смена направления тока на противоположное через какой-то постоянный резистор R_0 происходит более одного раза?

Ответ. Нет, такая схема невозможна.

Решение. Любой «чёрный ящик», внутри которого находятся идеальные батарейки (одна или несколько, или даже ни одной!) и любым образом соединённые идеальные резисторы, из которого выведены два провода, можно представить в виде эквивалентной батарейки с некоторой ЭДС E и некоторым внутренним сопротивлением r. Измерить эти параметры можно так. 1. Подключаем к этим выводам идеальный вольтметр — получаем величину и знак ЭДС. 2. Подключаем к этим выводам идеальный амперметр — получаем ток короткого замыкания i эквивалентной батарейки. Отсюда находится её внутреннее сопротивление $r = E/I$. Какой бы мы ни подключили к означенным выводам резистор с сопротивлением R не равным нулю, ток через него будет равен $I = E/(R + r)$.

В данном случае можно рассматривать «чёрный ящик» с тремя выводами: один это, например, отрицательный вывод батарейки (3), а два других — это точки подключения переменного резистора — (1) и (2). Для удобства пару точек (1) и (3) можно формально считать выводами одной «виртуальной» неидеальной батарейки, а пару точек (2) и (3) — выводами другой «виртуальной» неидеальной батарейки.

Пусть эти батарейки имеют ЭДС E_1 и E_2 и внутренние сопротивления r_1 и r_2 соответственно.

Потенциалы точек подключения концов сопротивления R_x равны:

$$\varphi_1 = E_1 - \frac{(E_1 - E_2)r_1}{r_1 + r_2 + R_x} = \frac{E_1(r_2 + R_x) + E_2 r_1}{r_1 + r_2 + R_x}; \quad \varphi_2 = \frac{E_2(r_1 + R_x) + E_1 r_2}{r_1 + r_2 + R_x}.$$

В силу линейности схемы, содержащей только постоянные резисторы и две «эквивалентные батарейки», ток через любой резистор R_k может быть представлен в виде линейной комбинации

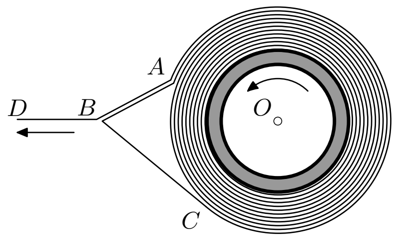
$$I_k = \alpha_k \varphi_1 + \beta_k \varphi_2 =$$

$$= \frac{\alpha_k \left(E_1(r_2 + R_x) + E_2 r_1\right) + \beta_k \left(E_2(r_1 + R_x) + E_1 r_2\right)}{r_1 + r_2 + R_x} = \frac{A_k + R_x B_k}{r_1 + r_2 + R_x}.$$

В числителе полученного выражения находится линейная функция от величины переменного резистора R_x. Такая функция может обратиться в 0 при изменении R_x от 0 до бесконечности максимум один раз. Знаменатель всегда положителен. Следовательно, знак тока через какой-либо постоянный резистор если и изменяется при росте переменного резистора R_x от нуля до бесконечности, то только один раз.

10. (10–11) Рулон липкой ленты «скотч» может свободно вращаться вокруг центра. Лента считается тонкой, гибкой и нерастяжимой. Работа, необходимая для отклеивания от рулона куска ленты, пропорциональна длине этого куска. Обратно лента приклеивается без дополнительных усилий.

Ленту тянут за конец и сматывают с рулона. Причём ленту предварительно специально расположили так, что от поверхности рулона отклеиваются сразу два слоя (точка A), затем в точке B эти слои разделяются: внешний слой — это сматываемый конец ленты, а внутренний слой затем приклеивается обратно к рулону в точке C.



Для разматывания ленты с рулона к отрезку ленты BD необходимо приложить силу F. Найдите разницу сил натяжения отрезков ленты AB и BC в этом случае.

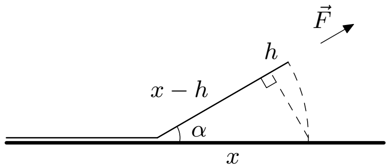
Ответ. $F_{AB} - F_{BC} = F/2$.

Решение. 1. По условию, работа, необходимая для отклеивания от рулона куска ленты пропорциональна длине этого куска. Введём для коэффициента пропорциональности обозначение F_0, то есть

$$\text{Работа} = F_0 \cdot \text{Длина}.$$

Тогда $F = 2F_0$, так как при «вытягивании» отрезка DB на длину x происходит отклеивание липкого слоя ленты длины x в точке A и, кроме того, отклеивание липкого слоя такой же длины x в точке B (при «перемещении» на x совершается работа $2F_0 \cdot x$).

2. Теперь выясним, с какой силой нужно «отлеплять» скотч от плоской поверхности, если тянуть «хвост» в направлении под углом α. Пусть мы отлепили от поверхности кусок ленты длиной x.



Тогда, как легко сообразить (см. рисунок), перемещение *в выбранном нами направлении* ($\vec{F}$) будет равно $h(x) = x(1 - \cos\alpha)$. Соответственно, сила, которую нужно прикладывать в выбранном направлении, чтобы отклеить ленту, равна

$$F(\alpha) = \frac{A}{h(\alpha)} = \frac{A}{x(1-\cos\alpha)} = \frac{1}{1-\cos\alpha} \cdot \frac{A}{x} = \frac{F_0}{1-\cos\alpha}$$

Эту же формулу можно использовать и для неплоской поверхности, считая маленький участок этой поверхности плоским. В этом случае угол α определяется касательной к поверхности в месте отклеивания липкого слоя.

3. Пусть F_{AB} и F_{BC} — силы натяжения участков ленты AB и BC соответственно (под F_{AB} подразумевается суммарная сила натяжения двух слоёв ленты, составляющих этот участок).

Пусть α — острый угол между отрезком AB и поверхностью (касательной к поверхности) рулона в точке A.

4. Поскольку рулон ленты вращается без ускорения, сумма моментов сил относительно центра рулона, создаваемых отрезками ленты AB и BC, должна быть равна 0, то есть

$$RF_{BC} = RF_{AB}\cos\alpha$$

$$F_{BC} = F_{AB}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{F_{BC}}{F_{AB}}$$

В соответствии с п. 2

$$F_{AB} = F_0\frac{1}{1-\cos\alpha}$$

Отсюда

$$F_{AB} = F_0\frac{1}{1-\dfrac{F_{BC}}{F_{AB}}} = F_0\frac{F_{AB}}{F_{AB}-F_{BC}}$$

$$F_{AB} - F_{BC} = F_0 = F/2$$

Заметим, что в рассмотренной нами задаче всегда $\alpha < 90°$. При этом условии мы получили и далее использовали формулу $h(x) = x(1-\cos\alpha)$. Если же $\alpha > 90°$, то, как легко сообразить, сделав соответствующий рисунок, $h(x) = x(1+\cos\alpha)$.

Примечание. Описанную в задаче конструкцию нетрудно изготовить самостоятельно. Единственная «хитрость»: если скотч отклеить и затем приклеить на место не очень аккуратно, то он держится плохо и может просто «отвалиться», а не вести себя так, как описано в условии задачи.

Обойти эту трудность можно так.

1. Смотайте с рулона скотча относительно длинный «хвост».

2. Положите на поверхность рулона что-нибудь круглое (палец, ручку, толстый фломастер) и примотайте «хвостом» так, чтобы сверху предмета оказалось 2 слоя скотча.

3. Оттягивая получившуюся петлю, передвиньте её против направления намотки ленты на 2 оборота, одновременно отлепляя «хвост» так, чтобы петля всегда состояла из двух слоёв. В результате окажется, что «хвост», намотанный вручную, полностью смотан, и все имеющиеся соединения слоёв сделаны аккуратно — они образовались на натянутой петле.

4. Аккуратно вытащите из петли вспомогательный предмет, наденьте рулон скотча на палец (ручку, или ещё что-нибудь круглое и гладкое) и тяните за «хвост». Скотч должен вести себя так, как описано в условии задачи.