XXXI Турнир им. М. В. Ломоносова 28 сентября 2008 года

Конкурс по математическим играм. Черновик решений. Версия 25.11.2008.

Выберите игру, которая Вас больше заинтересовала, и попробуйте придумать для одного из игроков (первого или второго) стратегию, гарантирующую ему победу независимо от ходов соперника. Постарайтесь не только указать, как следует ходить, но и объяснить, почему при этом неизбежен выигрыш. Ответ без пояснений не учитывается.

Не пытайтесь решить все задания, сохраните время и силы для других конкурсов. Хороший анализ даже только одной игры позволит считать Ваше участие в конкурсе успешным.

1. «Конфеты». Малыш и Фрекен Бок играют в игру. На столе лежит несколько конфет. Первым ходом Малыш делит конфеты на три непустых кучки, потом Фрекен Бок две кучки отдаёт Карлсону, а третью снова делит на три непустых, потом Малыш также две отдаёт Карлсону, третью делит и так далее. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто победит при верной игре, если на столе:

а) 7 конфет?
б) 9 конфет?
в) 12 конфет?
г) 14 конфет?
д) произвольное число конфет?

Решение. На примерах, приводимых в пунктах а) – г) участникам предлагалось попробовать поиграть, перебрать варианты ходов и нащупать закономерности игры. Мы же представим себе, что этот предварительный этап пройден и приведём решение сразу для пункта д).

Ответ: если количество конфет на столе равно $6k+1$ или $6k+2$ для $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, то победит Фрекен Бок, иначе — Малыш.

Это решение нетрудно получить, пользуясь так называемым «методом выигрышных и проигрышных позиций» или «анализом игры с конца». В самом деле, пусть игра началась с какого-то большого числа конфет. Чем она закончилась? Тем, что у игрока нет хода. Это бывает, когда конфет ему досталось 1 или 2. Эти позиции проигрышные для того, кому они достались — обозначим их буквой «П» («проигрышная»).

Позиция 3 — выигрышная. Имея три конфеты, игрок делит их на три «кучки» по конфете, и соперник, оставив одну из них, не сможет её поделить.

Это же можно сделать и при 4, 5 и 6 конфетах. Разумеется, делить на кучки надо с умом, так, деля 6 конфет на $1+1+4$, мы позволим сопернику оставить кучку в 4 конфеты и поделить её; разложив же $6 = 2+2+2$, мы его этой возможности лишим. Значит, помечаем позиции 3, 4, 5 и 6 буквой «В» («выигрышная»). Теперь рассмотрим 7 конфет. При любом делении найдётся кучка из по крайней мере трёх конфет, которую соперник оставит себе для деления, а значит победит. Стало быть, 7 — проигрышная позиция.

И постепенно расставляем буквы «В» (выигрышная) и «П» (проигрышная) против позиций, заполняя табличку:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
П	П	В	В	В	В	П	П	В	В	В	В	П	...

Сама по себе табличка достаточно красноречиво убеждает в верности ответа, но мы приведём теперь и строгое его доказательство методом математической индукции. Индукция ведётся по k — параметру, который мы использовали для записи ответа.

База ($k = 0$) нами разобрана.

Пусть теперь (шаг индукции) для всех $k < m$ ответ доказан. Рассмотрим $k = m$. Числа $6m+1$ и $6m+2$ невозможно разбить на три слагаемых, дающих при делении на 6 остатки 1 или 2. Это проверяется перебором всех возможных троек остатков:

$$1+1+1=3$$
$$1+1+2=4$$
$$1+2+2=5$$
$$2+2+2=6$$

Значит, как бы ходящий не разбил $6m+1$ или $6m+2$ на три кучки, соперник оставит из них для дальнейшего деления кучку, дающую остаток, больший 2, при делении на 6. Тем самым, $6m+1$ и $6m+2$ — проигрышные позиции.

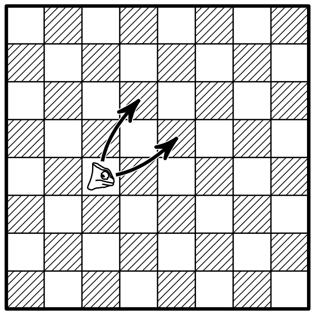
Напротив, числа $6m+3$, $6m+4$, $6m+5$ и $6m+6$ можно разбить на «плохие» для соперника кучки:

$$6m+3 = (6m+1)+1+1$$
$$6m+4 = (6m+1)+1+2$$
$$6m+5 = (6m+1)+2+2$$
$$6m+3 = (6m+2)+2+2$$

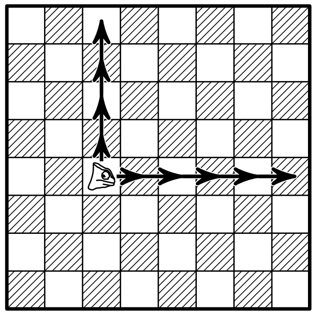
То есть, это позиции выигрышные. Доказательство завершено.

Критерии проверки. За решение пункта «а» давалось 2 балла, за решение каждого следующего пункта (вплоть до «г») — на 1 балл больше предыдущего. Решение пункта «д» оценивалось 20-ю баллами, если решающий не забывал указать верные ответы предыдущих пунктов (если ответы не были указаны, то тогда 18 баллов). Кроме этого укажем, что за «голые» ответы в пунктах «а»–«г» не ставилось ничего, а в пункте «д» 1 балл; за указание проигрышных позиций без стратегии в «д» ставилось 2 балла, а при наличии ответа — 3 балла. Не более 1 балла ставилось в пунктах «а»–«г» за неполный перебор, ошибки в переборе, ссылку на неверно разобранный предыдущий пункт.

2. «Хамелеон». В нижнем левом углу клетчатой доски стоит фигура «хамелеон». Она может превращаться в шахматного коня, и тогда ходит как конь, но только вправо и вверх (два варианта хода, см. рисунок), а может превращаться в ладью, и тогда ходит как ладья, и тоже вправо или вверх.



«Хамелеон-конь»



«Хамелеон-ладья»

Игроки ходят хамелеоном по очереди, причём каждый, сделав ход, объявляет, кем становится теперь хамелеон — ладьёй или конём (при этом, пока не окончилась игра, объявлять фигуру требуется так, чтобы у соперника была возможность пойти). Побеждает тот, кто ставит хамелеона в правый верхний угол доски. Кто — начинающий или его соперник — победит при правильной игре, если:

а) доска размером 6×6, хамелеон изначально ладья;

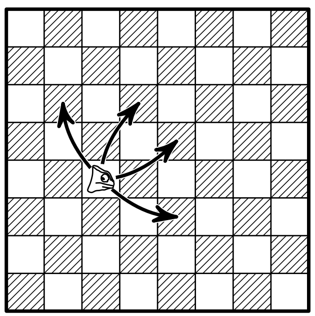
б) доска размером $n \times n$, хамелеон изначально ладья;

в) доска размером 8×8, хамелеон изначально конь;

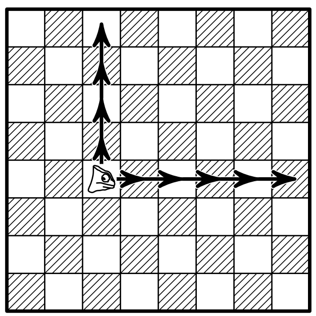
г) доска размером $n \times n$, хамелеон изначально конь?

д)* Рассмотрите общую задачу: кто победит на доске $m \times n$, если хамелеон изначально конь, и кто, если ладья?

е) Немного изменим правила, дав коню бóльшую свободу. Пусть теперь хамелеон-конь может делать четыре хода (см. рисунок).



«Хамелеон-конь»



«Хамелеон-ладья»

Кто тогда победит на доске $n \times n$, если хамелеон изначально конь, и кто, если ладья?

Решение. Пункты «а» и «в» (как и в предыдущей задаче, собственно) давались для того, чтобы участники, которым трудно сразу же рассуждать для больших n, попробовали почувствовать стратегию на небольшом поле. Мы приведём решение сразу пунктов «б» и «г».

В пункте «б» при достаточно большом n побеждает первый игрок. Он ставит ладью на самое левое поле второй горизонтали сверху и объявляет её конём. У соперника в этом случае только один ход (на третье слева поле верхней горизонтали), более того, у него после этого хода нет выбора — он обязан объявлять коня ладьёй. Как только это происходит, первый игрок побеждает. Описанная стратегия «работает» при $n > 3$. Меньшие значения n нетрудно разобрать непосредственно, там побеждает второй игрок: случай $n = 1$, пожалуй, можно считать некорректным, при $n = 2$ ходы игроков предопределены, при $n = 3$ у первого игрока по сути есть два различных хода, после которых объявлять хамелеона конём для него либо невозможно, либо глупо, а если он оставит его ладьёю, то второй игрок либо сразу победит, либо поставит ладью в центральную клетку, после чего ситуация сведётся к случаю $n = 2$.

Эта, стратегия, заметим, в целом решает и ту часть пункта «д», которая относится к случаю, когда хамелеон вначале ладья. При $\min(m, n) > 3$ она применяется так же, в случае $\min(m, n) = 1$ первый побеждает сразу, а при $\min(m, n) = 2$ или при $\min(m, n) = 3$ первый игрок сводит поле к 2×2 или 3×3, где и побеждает, так как он теперь как бы второй. Итак, новых исключений неквадратные поля не добавили.

В пункте «г» при достаточно большом n побеждает второй игрок. Его стратегия заключается в том, что на любой ход первого игрока он: если хамелеон стал ладьёй, выигрывает согласно разобранной части пункта «д»; если хамелеон остался конём, возвращает его на большую диагональ, идущую из нижнего левого угла доски, и сохраняет его конём. При этом поле $n \times n$ редуцируется до поля $(n - 3) \times (n - 3)$. Так можно делать до тех пор, пока $n \geqslant 4$. В конце нужно правильно разыграть эндшпиль: когда после очередной редукции $n \longrightarrow (n - 3)$ мы придём к $n = 2$ или $n = 3$, нужно не оставлять хамелеона конём, а сделать его ладьёй, поскольку, как мы уже видели в решении пункта «б», это приведёт второго игрока к выигрышу.

От пункта «д» нам осталось разобрать случай, когда в начале игры на произвольном поле хамелеон является конём. Это можно сделать методом выигрышных и проигрышных позиций, о которых мы уже говорили в задаче № 1. Рассмотрим «бесконечную влево-вниз» доску и будем ставить в клетке с координатами $(m\,;\,n)$ букву «В», если, начиная с этой клетки конём, мы побеждаем, и букву «П» в противном случае. Клетки $1 \times n$, $n \times 1$ и 2×2 пометим буквой «Н» — начинать игру конём в этих клетках нельзя по правилам.

...	8	7	6	5	4	3	2	1	
Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	1
П	П	П	П	П	П	В	Н	Н	2
В	В	В	В	П	В	П	В	Н	3
В	В	В	В	В	П	В	П	Н	4
П	П	П	В	П	В	П	П	Н	5
В	П	В	П	В	В	В	П	Н	6
В	В	П	В	П	В	В	П	Н	7
В	П	В	П	П	В	В	П	Н	8
П	В	В	В	П	В	В	П	Н	...

Постепенно заполняя таблицу, увидим, что начинающий проиграет на полях размером $(3k-1)\times(3k+p)$ (k — любое натуральное число, p — любое натуральное большее единицы), полях размером $(3k)\times(3k+2)$ и квадратных полях $n\times n$ при $n>2$. На всех остальных полях начинающий конём победит.

Анализ выигрышных и проигрышных полей помогает разобраться и с пунктом «е». Ограничимся в этом пункте только сообщением ответа. Хамелеон-ладья даёт победу начинающему на всех полях, кроме 1×1 и 2×2, а хамелеон-конь — на всех белых полях (считаем, что доска шахматно раскрашена и угловая клетка чёрная), кроме 1×2, где хамелеон не может начинать игру как конь.

Критерии проверки. За пункт «а» давался 1 балл, за «б» — 3 балла (один снимался, если не разбирались случаи малых n), за «в» — 3 балла, за «г» — 5 баллов (один балл снимался, как и в «б»), прозевавшим малые n), за «д» и «е» — по 4 балла (2 «за ладью» и 2 «за коня»). В последних двух пунктах считалось достаточным нарисовать таблички или внятно описать их. «Голые» ответы не оценивались.

3. «Раскраска». Есть клетчатое поле. Два игрока делают ходы по очереди. Ход состоит в том, что игрок закрашивает несколько клеток, которые вместе образуют один прямоугольник. Перекрашивать клетки нельзя. Проигрывает тот, кто красит последнюю клетку. Кто победит при верной игре, если размеры поля:

а) $1\times n$ клеток;
б) $2\times n$ клеток, $n>1$;
в) $3\times n$ клеток, $n>2$;
г) $4\times n$ клеток, $n>3$?

Решение. В пункте «а» на поле 1×1 победит второй игрок, иначе же первый, который сразу же закрасит всё поле, кроме одной клетки. В пункте «б» на поле 2×2 победит второй игрок (это легко проверяется), а во всех прочих случаях первый — он своим ходом может оставить второму игроку квадрат со стороной в 2 клетки.

В случаях «в» и «г» победит первый игрок. Опишем выигрышную стратегию для начинающего игру для общего случая $m\times n$ клеток, $n>m-1$. (Идея этого решения принадлежит девятикласснице из Москвы Ольге Буровой.) Первый ход начинающего состоит в закрашивании почти всего поля — незакрашенными остаются лишь две полоски размером $m\times 1$ по его краям. Дальнейшая игра идёт на этих двух независимых полосках. Начинает второй. Первый придерживается такого правила: на любой ход второго на одной из полосок отвечает таким же (симметричным) ходом на второй. Но: как только при ходе второго игрока его полоска (та, где он только что пошёл) превратилась в набор из k отдельных, не граничащих по сторонам друг с другом клеток (возможно, $k=0$), первый на второй полоске делает такой ход (назовём его «решающий»), чтобы их (изолированных клеток) там осталось на одну больше или на одну меньше, чем оставил на своей полоске второй игрок. Теперь все клетки изолированы друг от друга, их общее число является суммой двух последовательных чисел и потому нечётно, а тогда игроки будут красить их по очереди, начиная со второго игрока, которому и останется последняя проигрышная клетка.

Покажем теперь, что решающий ход действительно можно осуществить. Пусть второй игрок закрасил прямоугольник $l\times 1$ клеток, после чего на его полоске остались изолированные незакрашенные клетки. Если закрашенный им прямоугольник граничил с одной или двумя незакрашенными клетками, первый при своём ходе может закрасить прямоугольник $(l+1)\times 1$, включающий тот, что закрашен соперником, и одну из этих клеток. Если же по обоим коротким сторонам от закрашенного вторым игроком прямоугольника $l\times 1$ были закрашенные клетки, то первый может закрасить его часть $(l-1)\times 1$, оставив лишнюю клетку с краю. Такой ход, казалось бы, невозможен при $l=1$, но это бы означало, что уже перед ходом второго игрока были бы только одиночные клетки, а мы уговорились, что они впервые появились только после его хода.

Критерии проверки. За пункт «а» давалось 2 балла, за каждый следующий на 2 балла больше предыдущего. «Голые» ответы не оценивались. По баллу в первых двух пунктах снималось за неразобранные случаи-исключения 1×1 и 2×2.