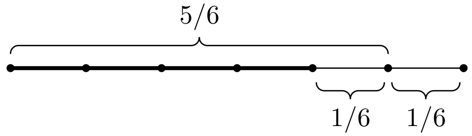
XXXII Турнир им. М. В. Ломоносова 27 сентября 2009 года

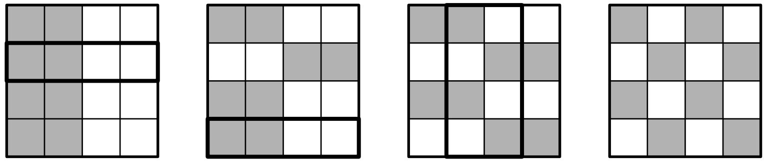
Конкурс по математике. Ответы и решения. Критерии.

1. Пусть Таня съела x печений. Тогда Ваня съел $5x$ печений, из которых $5x - x = 4x$ печений он съел до прихода Тани. Так как всего печений было $5x + x = 6x$, до Таниного прихода Ваня съел $\dfrac{4x}{6x} = \dfrac{2}{3}$ всего печенья.



Ответ. 2/3.

2. Одно из решений приведено ниже.

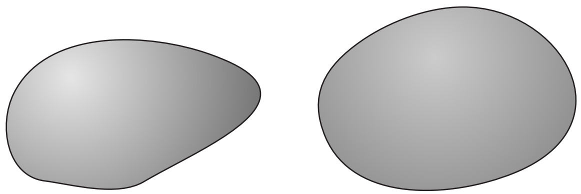


3. За один неудачный день капитал Пети уменьшается на столько же, на сколько он увеличивается за два удачных. Поскольку в итоге капитал Пети такой же, как вначале, удачных дней было в два раза больше, чем неудачных.

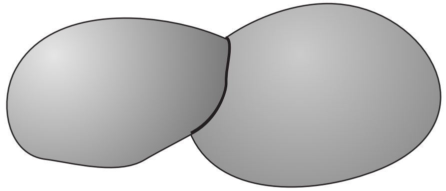
В удачный день капитал Васи умножается на 1,1, а в неудачный на 0,8. От перемены мест сомножителей произведение не меняется. Поэтому результат для Васи получается такой же, как если бы за каждыми двумя удачными днями шёл один неудачный. В этом случае за первые три дня капитал Васи умножится на $1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}968 < 1$, т. е. уменьшится. За следующие три дня он опять уменьшится, и т. д. Поэтому и в итоге капитал Васи уменьшится.

Ответ. Капитал Васи уменьшился.

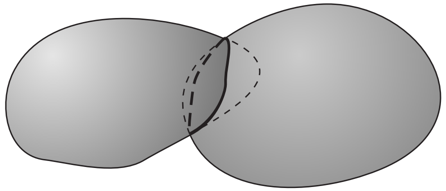
4. Посмотрим на поверхности картофелин как на абстрактные геометрические фигуры.



Подвинем их так, чтобы они пересеклись.



Возьмём маркер и нарисуем возникшую на пересечении замкнутую кривую на каждой из картофелин.

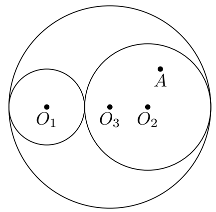


Это и есть пути, по которым можно проложить проволочки.

Замечание. Пересечение поверхностей может оказаться устроенным достаточно сложно — состоять из нескольких частей (если поверхность одной картофелины пересекают несколько «наростов» другой картофелины), иметь разветвления, быть завязанным в узел, иметь бесконечную длину и т. п. (Речь здесь, конечно, идёт уже об абстрактных геометрических поверхностях, а не о поверхностях обычных картофелин.)

Вообще, слова «картофелина» и «колечко» объясняют математическое содержание задачи наглядно, но не вполне строго. Поэтому и саму задачу (и её решение) следует рассматривать как наглядную демонстрацию интересного математического факта, а не как строгую теорему.

5. Заметим, что два меньших шара, если их поставить рядом, поместятся внутрь большого. Значит, их суммарный объем меньше.



Ответ. Перевесит правая чаша весов.

Комментарий. Хотя на картинке и видно, что два маленьких шара не вылезают за границы большого, докажем это. Пусть, например, точка A лежит внутри шара с радиусом 5. Проверим, что она попадает внутрь большого шара, т. е. что $AO_3 \leqslant 8$. Но действительно, по неравенству треугольника

$$AO_3 \leqslant AO_2 + O_2O_3 \leqslant R_1 + (R_3 - R_1) = R_3.$$

Имеется у задачи и алгебраическое решение, основанное на том, что $(R_1 + R_2)^3 > R_1^3 + R_2^3$ (см. тж. следующую задачу).

6. Так как при растяжении в R раз площади меняются в R^2, а объёмы в R^3 раз, площадь круга радиуса R равна V_2R^2, а площадь шара V_3R^3, где V_2 и V_3 — некоторые константы (площадь единичного круга и объём единичного шара, соответственно; на самом деле $V_2 = \pi$, а $V_3 = \frac{4}{3}\pi$, но для решения задачи это не важно).

Обозначим радиусы монет через R_1, R_2 и R_3. Вначале весы были в равновесии, поэтому $V_2R_1^2 + V_2R_2^2 = V_2R_3^2$, т. е.

$$R_1^2 + R_2^2 = R_3^2.$$

Аналогично, чтобы определить, что произошло с весами, после того как монеты заменили шарами, нужно сравнить $R_1^3 + R_2^3$ с R_3^3. Но по сравнению с равенством выше правая часть умножилась на больший радиус R_3, а два слагаемых в левой части — на меньшие радиусы R_1 и R_2:

$$R_1^3 + R_2^3 = R_1^2 \cdot R_1 + R_2^2 \cdot R_2 < R_1^2 \cdot R_3 + R_2^2 \cdot R_3 = (R_1^2 + R_2^2) \cdot R_3 = R_3^3.$$

Значит, правая чаша перевесит.

Ответ. Перевесит правая чаша весов.

7. Достаточно получить ответ на вопрос «сколько всего монет в кошельках с нечётными номерами?»

Действительно, если ответ на него «$1600 + n$» ($n > 0$), то монеты перекладывали из кошелька с чётным номером, справа от которого было ровно n кошельков с нечетными номерами — т. е. из $(2n + 1)$-го справа кошелька. Если же ответ на него «$1600 - n$» ($n > 0$), то монеты перекладывали из кошелька с нечётным номером, справа от которого было ровно n кошельков с чётными номерами — т. е. из $2n$-го справа кошелька.

Ответ. За один вопрос.

8. Пусть m — корень, равный сумме коэффициентов, n — корень, равный их произведению, a — старший коэффициент. Если коэффициенты целые, то их сумма и произведение m, n тоже целые.

Согласно настоящей теореме Виета, коэффициент при x равен $-a(m+n)$, а свободный член amn. Таким образом, уравнение имеет вид

$$ax^2 - a(m + n)x + amn = 0.$$

Поэтому фактически Вася утверждает, что

$$m = a - a(m + n) + amn,$$
$$n = -a^3(m + n)mn.$$

Перепишем первое равенство в виде

$$m = a(1 - m)(1 - n).$$

Видим, что m делится на $(1 - m)$. Прибавив $(1 - m)$ к m, получаем, что 1 также делится на $(1 - m)$, откуда m равно 0 или 2. Если $m = 0$, то ввиду второго равенства $n = 0$, а тогда из первого равенства $a = m = 0$, что невозможно для старшего коэффициента трёхчлена.

Остаётся случай $m = 2$. Если сократить во втором равенстве на n, то получим, что 1 делится на 2. Значит, сокращать на n нельзя, т. е. $n = 0$. Тогда из первого равенства находим a, а затем по теореме Виета находим остальные коэффициенты. Полученный трёхчлен $-2x^2 + 4x$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $-2x^2 + 4x$.

Критерии оценивания

По результатам проверки каждого задания ставилась одна из следующих оценок (перечислены в порядке убывания):

$$+ \qquad \pm \qquad +/2 \qquad \mp \qquad - \qquad 0$$

Общий смысл этих оценок следующий:
«+» — задача решена полностью,
«±» — задача решена с недочетами, не влияющими на общий ход решения,
«+/2» — см. критерии к задаче 7,
«∓» — задача не решена, но имеются содержательные продвижения,
«−» — задача не решена;
за задачу, к решению которой участник не приступал, ставится «0».

Так как по одному ответу невозможно определить, в какой степени участник решил задачу, за верный ответ без решения ставится не выше «∓» («−» если ответ типа «да–нет»); потеря случаев в переборе или рассмотрение только (содержательного) частного случая — не выше «∓».

Уточняющие критерии по задачам (оценки типичных случаев).

1. Решение, с объяснением в виде картинки — «+» или «±» в зависимости от внятности; только частный случай (например, «пусть всего было 30 печений») — «∓»; ответ без решения (возможно, с проверкой того, что он подходит) — «∓»; ответ не на тот вопрос — «−».

2. Не указано, какие прямоугольники перекрашивались (или указано с ошибкой), но есть правильная последовательность раскрасок — «±»; имеются невозможные переходы — «−».

3. Частный случай (например, «два удачных, один неудачный») без объяснения того, что удачных дней всегда в два раза больше, а все сводится к умножению, поэтому порядок, в котором идут дни, не важен, *или* соображения о том, что проценты отнимаются от большей суммы, а прибавляются к меньшей (без полного решения) — «∓», то же с ошибками в арифметике — «−»; только ответ — «−».

4. Разобран только случай круглых картофелин / объяснение того, как найти колечки, равные только по длине / «рассмотрим очень маленькие колечки» — «−».

5. Доказательства того, что два шара вкладываются в третий, не требуется, достаточно (внятной) картинки. Правильное решение с неверным коэффициентом в формуле объёма шара *или* рассмотрены кубы вместо шаров — «$\pm$», неверная степень R в формуле объёма — «$-$»; вычислительное решение с ошибкой в вычислениях — «$-$»; только ответ — «$-$».

6. Правильное решение с неверным коэффициентом в формуле объёма шара — «$\pm$», неверная степень R в формуле объёма — не выше «$\mp$»; рассмотрен только частный случай (например, случай одинаковых радиусов) — «$\mp$»; частный случай с арифметическими ошибками / неверными коэффициентами — «$-$»; только ответ — «$-$».

7. Верное решение без полного объяснения, как восстановить номер облегчённого кошелька по полученному ответу — «$\pm$»; бинарный (или тернарный) поиск кошелька — «$-$»; только ответ — «$-$».

Комментарий. Жюри имело в виду, что вопросы можно задавать только про конкретно указанные кошельки (например, «сколько монет в первом, втором и седьмом кошельках»). Но некоторые участники решили, что допустимы и вопросы вроде «сколько монет в кошельках правее облегчённого?». За такие решения ставилась оценка «$+/2$» (если в результате удавалось узнать кошелек за один вопрос —иначе «$-$»); при подведении итогов оценка «$+/2$» по этой задаче учитывалась также, как оценка «$+$».

8. Ответ без верного обоснования — «$\mp$»; потеря одного из случаев в переборе — «$\mp$».

Критерии награждения

Задачи, предназначавшиеся более младшим классам, чем тот, в котором учится участник турнира, проверяются, но не учитываются при подведении итогов.

Оценка «e» (балл многоборья) ставилась при наличии хотя бы одной оценки не хуже «$+/2$».

Оценка «v» (грамота за успешное выступление в конкурсе по математике) ставилась:
— в 6-11 классах, если есть не меньше 2 оценок не хуже «$+/2$» каждая.
— в 5 классе и младше, если есть хотя бы 1 оценка не хуже «$+/2$».

В случае, если поставлена оценка «v», оценка «e» не ставится.

Задачи для конкурса по математике предложили: 2 — Т. В. Караваева, 3, 8 — Б. Р. Френкин, 4, 6 — Г. А. Гальперин, 7 — А. В. Шаповалов.