Конкурс по математическим играм. Решения. Критерии.

Выберите игру, которая Вас больше заинтересовала, и попробуйте придумать для одного из игроков (первого или второго) стратегию, гарантирующую ему победу независимо от ходов соперника. Постарайтесь не только указать, как следует ходить, но и объяснить, почему при этом неизбежен выигрыш. Ответ без пояснений не учитывается.

Не пытайтесь решить все задания, сохраните время и силы для других конкурсов. Хороший анализ даже только одной игры позволит считать Ваше участие в конкурсе успешным.

1. «Горошины». Два игрока ходят по очереди. Перед началом игры у них есть поровну горошин. Ход состоит в передаче сопернику любого числа горошин. Не разрешается передавать такое количество горошин, которое до этого уже кто-то в этой партии передавал. Ноль горошин тоже передавать нельзя. Тот, кто не может сделать очередной ход по правилам, — считается проигравшим.

Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр?

Рассмотрите случаи:

а) У каждого по две горошины;

б) У каждого по три горошины;

в) У каждого по десять горошин;

г) Общий случай: у каждого по N горошин.

Решение. Во всех случаях победит второй игрок.

В пункте «а», когда у игроков по две горошины, первый игрок либо отдаст второму две горошины (на это второй даст ему одну, и у первого не будет ходов), либо отдаст одну. В этом случае второй игрок может отдать ему две горошины, назад получит три, отдаст четыре и победит.

Подобным же образом пойдёт игра и в пункте «б». Если первый игрок отдаст три или две, назад получит одну и сразу проиграет. Если же отдаст одну, то назад получит две. Далее у первого два варианта хода, но оба плохи: отдав 4, он получит назад 3 и проиграет, а отдав 3, получит 4, будет вынужден отдать 5, получит 6 и всё равно проиграет.

Разбирать случай 10 горошин, как предлагается в пункте «в», нет смысла. Этот пункт давался для того, чтобы на большом числе горошин почувствовать общую стратегию. Изложим её — это будет решение пункта «г».

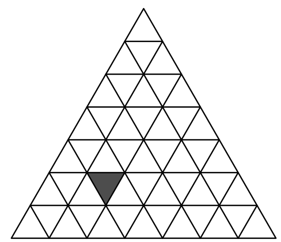
г) Первое решение. Победит второй игрок, придерживаясь правила: «всякий раз отдавай минимально возможное число горошин». Докажем, что это действительно стратегия. Достаточно показать, что у второго игрока всегда будет ход. Начинает игру у нас первый игрок, но мы схитрим и сделаем так, чтобы игру начинал второй: предположим, что второй (условно) передаёт сначала первому 0 горошин. Теперь можно видеть, что всякий раз в ответ на ход второго первый игрок вынужден будет отдать ему больше, чем сам получил. Поэтому количество горошин у второго с каждым парным ходом будет увеличиваться хотя бы на одну. Перед K-м ходом у него будет не менее $N+K$ горошин. А отдать на K-м ходу он в соответствии со своей стратегией должен не более $2K$ горошин. Это осуществимо, поскольку $N+K \geqslant 2K$ при $K \leqslant N$. А более, чем N ходов игра длиться не может.

Второе решение. Разобьём числа от 1 до $2N$ на пары

$$(1\,;2),\ (3\,;4),\ (5\,;6)$$

и так далее. Победит второй игрок, придерживаясь правила: «всякий раз, получив число из некоторой пары, отдавай другое число из той же пары». Докажем, что и это верная стратегия. Опять же, требуется показать, что у второго игрока всегда будет ход. Пусть первый передал второму число x из некоторой пары $(x\,;y)$. Ясно, что y никто пока не передавал: второй это мог делать только в ответ на ход первого x, а если бы первый ранее передал бы y, то второй тогда же передал бы x. Итак, что же может помешать второму отдать y? Только отсутствие у него нужного количества горошин. Однако, поскольку $y \geqslant x+1$, а x он только что получил, отдать y второй не сможет только в одном случае — если у него ничего до хода первого не было. Однако, за каждый парный ход у первого количество горошин может уменьшиться максимум на одну, а было у него N, так что 0 у него может быть только после N парных ходов, то есть после окончания игры. Во время же игры такой ситуации сложиться не может. Значит, второй всегда ответит первому и в конце концов победит.

2. «Красим треугольник». Двое играют на треугольной доске (см. рис.), закрашивая по очереди на ней треугольные клеточки. Одна клетка (начальная) уже закрашена перед началом игры.



Первым ходом закрашивается клеточка, граничащая (по стороне) с начальной, а каждым следующим ходом — клетка, граничащая с только что закрашенной. Повторно клетки красить нельзя. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр?

Рассмотрите случаи:

а) Начальная клетка — угловая, поле любого размера;

б) Поле и начальная клетка как на рисунке к этому заданию;

в) Общий случай: поле любого размера, и начальная клетка в нём произвольная.

г) <u>Дополнительное задание.</u> Можно подумать, что начальная клетка определяет исход партии независимо от действий игроков. Нарисуйте, однако, на каком-нибудь поле примеры таких двух партий с одной и той же начальной клеткой, чтобы в первой побеждал начинающий, а во второй —

его партнёр. Для удобства нумеруйте клетки: начальная — 0, первым ходом красится клетка 1, вторым — 2 и т. д.

(Специально для удобства решающих это задание на обороте условия напечатана треугольная сеточка, на которой можно рисовать и раскрашивать треугольники).

Решение.

В пункте «а» побеждает второй игрок. После хода первого игрока (единственно возможного), ему следует закрасить клетку, примыкающую к стороне. Ход первого вынужден, второй снова красит клетку у стороны и в конце концов побеждает, крася угловую клетку.

Нетрудно понять, что в пункте «б», наоборот, победит первый игрок. Не приводя специально решения пункта «б», разберём общий случай.

в) То, кто будет победителем зависит от начальной клетки. Раскрасим клетки как на рисунке 1, в шахматном порядке, так, чтобы клетки вида $\triangle$ были белыми, а клетки вида ∇ — чёрными.

Покажем, что если начальная клетка чёрная, начинающий побеждает. Разделим поле на «слои» (см. рис. 2). Начинающий должен всегда закрашивать клетку, оставаясь в текущем слое. При этом соперник либо тоже будет оставаться в этом слое (и тогда они вскоре доберутся до угла слоя), либо уйдёт во внешний слой. (Из угла он в любом случае уходит во внешний слой.) В конце концов первый игрок закрасит угловую клетку поля и победит.

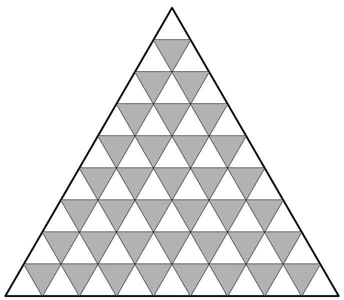


Рис. 1. Шахматная раскраска поля.

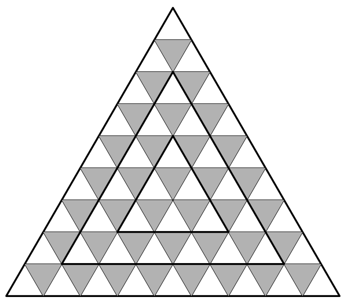


Рис. 2. «Слои» на игровом поле.

Решение дополнительного задания показано на рисунках 3 и 4. Поле и начальная клетка взяты как в пункте «б». Согласно теории, победить должен первый игрок, что и проиллюстрировано рисунком 3. Последний, седьмой ход в угол делает первый игрок. Но если бы первый игрок играл «как попало», он мог бы и проиграть: на правом рисунке после 10-го хода второго первый терпит поражение.

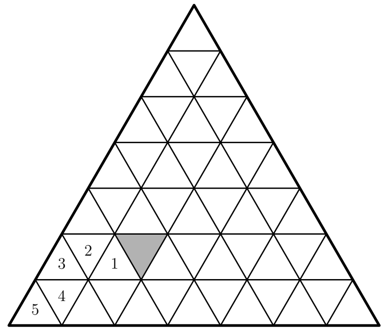


Рис. 3. Начинающий побеждает.

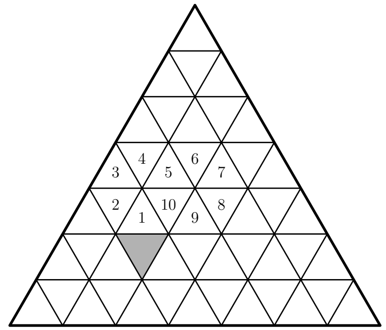


Рис. 4. Начинающий проигрывает.

3. «Линейные шашки». Игровое поле представляет собой полоску $1 \times N$. В начале игры на нескольких крайних левых полях стоит по одной белой шашке, на стольких же крайних правых полях — по одной чёрной шашке. Белые и Чёрные ходят по очереди, начинают Белые. Ход заключается в передвижении одной из своих шашек в направлении противника (Белые ходят направо, Чёрные — налево). Можно делать простой ход или бить шашки соперника. При простом ходе разрешается перемещать шашку на <u>любое</u> число клеток, но нельзя перепрыгивать ни через свои шашки, ни через чужие. Бьют шашки соперника по тем же правилам, что и в обычных шашках:

- Шашка бьёт шашку соперника, стоящую на соседнем поле, если следующее за ним поле свободно. При этом своя шашка перемещается на это свободное поле, а побитая шашка соперника снимается с доски.
- Бить обязательно: если есть возможность бить, делать вместо этого простой ход какой-либо шашкой нельзя.
- Если шашка, побившая шашку соперника, может сразу побить следующую его шашку, она должна продолжать бить тем же ходом.

Кто — Белые или Чёрные — победят в этой игре вне зависимости от игры партнёра? Рассмотрите случаи:

а) У игроков по одной шашке, поле длиной $N > 2$ клеток;
б) У игроков по две шашки, поле длиной $N > 4$ клеток;
в) У игроков по три шашки, поле длиной $N > 6$ клеток;
г) <u>Дополнительное задание.</u> Можно подумать, что численное преимущество решает исход игры. Придумайте и нарисуйте, однако, позицию, где

у Белых меньше шашек, чем у Чёрных, и тем не менее, Белые начинают (с простого хода) и выигрывают.

Решение. В этой игре Белые, бесспорно, имеют преимущество, хотя иногда они и проигрывают. Клетки поля мы для удобства иногда будем нумеровать слева направо: $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ (N-1),\ N$.

В пункте «а» при $N=3$ Белые проиграют (этот тривиальный случай многие «прозевали»), а в остальных случаях — победят, передвинув шашку с клетки 1 на клетку $(N-2)$. Эта атака — поставить свою шашку за одну клетку до шашки противника — будет часто в дальнейшем применяться Белыми.

В пункте «б» Белые тоже, казалось бы, должны идти с клетки 2 на $(N-3)$. Однако, такой ход возможен только если $N-3>2$, то есть $N>5$. В этом случае у Чёрных только один ход, следует размен, и возникает положение (рис. 5). Теперь Белые ходят с 1 на $(N-4)$ (это возможно, так как $N-4>1$ при $N>5$) и выигрывают.

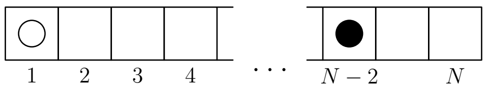


Рис. 5. Белые начинают и выигрывают.

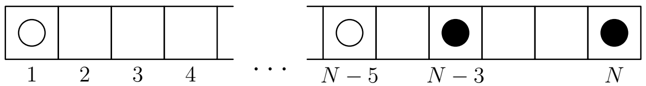


Рис. 6. Ход Чёрных.

Случай же $N=5$ разбирается отдельно. Все ходы там вынужденные, и побеждают тоже Белые.

В пункте «в» Белые тоже побеждают, атакуя стандартным образом, но это возможно только при $N>8$. Вот как пойдёт игра: Белые: $3\longrightarrow(N-4)$, размен и далее Белые повторяют атаку: $2\longrightarrow(N-5)$. Оба эти хода возможны: при $N>8$ заведомо будет и $N-4>3$, и $N-5>2$. После второго хода Белых возникнет ситуация как на рис 2. Теперь двигать левую чёрную шашку Чёрным невыгодно, а второй шашкой они смогут сделать максимум 2 хода, тогда как Белые $(N-7)$ ходов. Поскольку $N-7\geqslant 2$ при $N>8$, у Чёрных раньше кончатся ходы, и им придётся отдавать свою шашку на съедение, что быстро приведёт их к проигрышу.

Случаи $N=7$ и $N=8$ требуют отдельного разбора. При $N=7$ ход у Белых один, далее серия вынужденных разменов, и возникает позиция (рис. 7), где Белые легко побеждают.

При $N=8$ у Белых теоретически два возможных первых хода. Поддаться первым ходом $(3\longrightarrow 5)$ оказывается невыгодным: после серии вынужденных ходов имеем положение (рис. 8), где ход Чёрных, так что они легко выигрывают, пойдя $7\longrightarrow 5$. Атаковать тоже не удаётся: после первого хода $3\longrightarrow 4$ и разменов получается позиция (рис. 9). Ходить $2\longrightarrow 4$ глупо, после же $2\longrightarrow 3$ следует $8\longrightarrow 7$, Белые ходят $1\longrightarrow 2$, Чёрные $7\longrightarrow 6$, после чего Белые вынуждены пойти на клетку 4 и проиграть. Итак, при $N=8$ победят Чёрные.

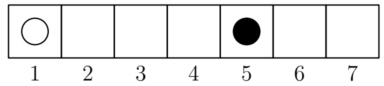


Рис. 7. Белые побеждают.

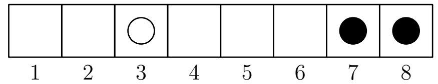


Рис. 8. Чёрные начинают и выигрывают.

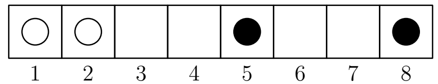


Рис. 9. Белые проигрывают.

Возможное (видимо, простейшее) решение дополнительного задания представлено на рисунке 10. Пусть у Чёрных две шашки, у белых — только одна. Ходя на клетку влево, Белые вынуждают Чёрных сдать обе свои шашки следующим ходом.

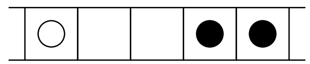


Рис. 10. Белые начинают и выигрывают.

Критерии оценивания

За каждую задачу присуждается целое количество баллов от 0 до 20. Оценки по различным пунктам суммируются (при этом ставится 20 баллов, если сумма оказывается больше 20).

В переборных решениях, в которых не разобраны все случаи, следует ставить долю оценки, примерно соответствующую доле верно разобранных случаев. Голый ответ не даёт баллов, кроме явно указанных позиций. Примеры партий не дают баллов.

В исключительных случаях за задачу ставится 10 баллов (половина стоимости), если по ней написано неполное математически содержательное решение, однако ввиду невнятности и неясности изложения применение более детальных критериев оценки оказывается крайне затруднительным.

1. «Горошины».

а) 2 балла. За пример партии 1 балл, если понятно, что это рассмотренный случай, который автор считает выгодным для начинающего (ибо случаев всего там два).

б) 5 баллов.

в) Не оценивается. Жюри считает невероятной ситуацию сколь-нибудь полного решения его без решения г).

г) 20 баллов. При этом внутри пункта ставится:

• 3 балла за формулировку стратегии «Второй победит, если будет отдавать минимально возможное число горошин».
• 4 балла за формулировку парной стратегии: «Объединим числа в пары: 1–2, 3–4 и т. д. Второй победит, если будет отдавать второе число из той же пары».
• 1 балл за некий намёк на парность, вроде «Второй победит, если будет отдавать соседнее (на 1 большее, на 1 меньшее) число по сравнению с тем, что ему только что дали».
• 1 балл за соображение «Второй победит, потому что ходов чётное число, и его ход будет последним».

2. «Треугольники».

а) 4 балла. За раскрашенную полоску без комментариев — 2 балла.

б) 4 балла. За рисунок без слов о симметрии — 1 балл.

в) 16 баллов. При полном решении этого пункта пункты а) и б) не учитываются (более точно: участник, не решивший г), не может получить более 16 баллов). В этот пункт входят:
• 3 балла за ответ (то есть раскраска и верный ответ. При этом иногда вместо раскраски авторы апеллируют к расположению клеток — дельтообразно и наблаобразно, — это тоже правильно).
• 2 балла за невнятные мысли типа «идём к стороне, идём к краю».
• 1 балл за голую идею раскраски.

г) 7 баллов.

3. «Шашки».

Если понятно, что автор считает, что игра ведётся не на полоске, а на доске большей ширины — 0 баллов. Если понятно, что автор считает, что шашка ходит на одну клетку (на это указывают обычно рассуждения о чётности и нечётности N) — 0 баллов.

а) 2 балла (1 балл снимается за неучтение случая $N = 3$).

б) $1 + 3 = 6$ баллов (1 балл за $N = 5$, 3 балла за $N > 5$). Если вместо $N > 5$ разобран конкретный случай — 1 балл, если в рисунке или есть рассуждение «и так далее» — считать верным, полные 3 балла.[1]

в) $2 + 2 + 4 = 8$ баллов. 2 балла за $N = 7$, 2 балла за $N = 8$, 4 балла за $N > 8$. При верных голых ответах для $N = 7$, $N = 8$ — 1 балл за оба. Если вместо $N > 8$ разобран конкретный случай — 1 балл, если в рисунке или рассуждение есть «и так далее» — считать верным. Если в общем случае нет соображения «у второго после первой серии разменов будет меньше нейтральных ходов, и ему придётся поддаться и проиграть», не более 2 баллов. Если общий случай описан только как «делаем первый ход такой-то и побеждаем» — 1 балл за него.

г) 4 балла.

[1] Условная запись «$1 + 3 = 6$» означает, что полное решение оценивается выше, чем сумма баллов за составляющие его отдельные случаи.