XXXIII Турнир имени М. В. Ломоносова 26 сентября 2010 года

Конкурс по математике. Ответы и решения

В скобках указано, каким классам рекомендуется задача; решать задачи более старших классов также разрешается.

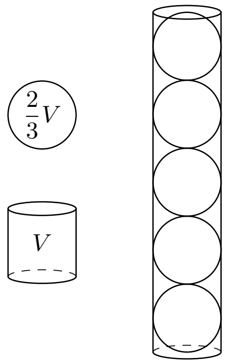
1. (6–7) Можно ли заменить буквы цифрами в ребусе

$$\mathsf{ШЕ}\cdot\mathsf{СТЬ}+1=\mathsf{СЕ}\cdot\mathsf{МЬ}$$

так, чтобы получилось верное равенство (разные буквы нужно заменять разными цифрами, одинаковые буквы — одинаковыми цифрами)?

Ответ: нет.

Решение. И число **ШЕ · СТЬ**, и число **СЕ · МЬ** оканчиваются на одну и ту же цифру — последнюю цифру числа **Е · Ь**. Поэтому левая и правая части равенства оканчиваются на разные цифры и не могут быть равны.



2. (6–7) Еще Архимед знал, что шар занимает ровно $^2/_3$ объема цилиндра, в который он вписан (шар касается стенок, дна и крышки цилиндра). В цилиндрической упаковке находятся 5 стоящих друг на друге шаров. Найдите отношение пустого места к занятому в этой упаковке.

Ответ: 1 : 2.

Решение. Разделим упаковку на 5 цилиндров, в каждый из которых вписан шар. В каждом из цилиндров отношение пустого места к занятому есть $\frac{1-{}^2/_3}{{}^2/_3}=\frac{1}{2}$. Значит, и во всей упаковке это отношение такое же, 1 : 2.

3. (6–8) Боря и Миша едут в поезде и считают столбы за окном: «один, два, ...». Боря не выговаривает букву «Р», поэтому при счете он пропускает числа, в названии которых есть буква «Р», а называет сразу следующее число без буквы «Р». Миша не выговаривает букву «Ш», поэтому пропускает числа с буквой «Ш». У Бори последний столб получил номер «сто». Какой номер этот столб получил у Миши?

Ответ: «восемьдесят один».

Решение. Боря выговаривает числа, в записи которых нет цифр 3 и 4 — среди первых ста чисел таких $(10-2)^2=64$ (и для цифры десятков, и для цифры единиц есть по 8 вариантов), т. е. на самом деле столбов было 64.

Миша же пропускает числа, в записи которых присутствует цифра 6. Поэтому, досчитав до «59», он пропустит 6 чисел — т. е. ему останется посчитать еще $64-(59-6)=11$ столбов. Отсчитывая эти 11 столбов, Миша пропустит все числа от 60 до 69, а также число 76. В результате последний столб получит у него номер $69+11+1=81$.

Комментарий. Боря, фактически, считает столбы в восьмеричной системе счисления с цифрами 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9; а Миша — в девятеричной с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9. Соответственно, чтобы решить задачу, надо перевести число «100» из восьмеричной системы в девятеричную — получится «71», а потом записать его «Мишиными цифрами» (пропуская шестерку) — получится «81».

4. (6–8) Покажите, как разрезать фигуру на рис. 1 на три равные части и сложить из этих частей правильный шестиугольник, изображенный на рис. 2. Оставлять дырки и накладывать части друг на друга нельзя.

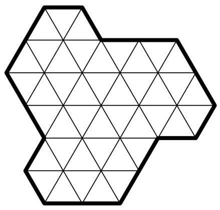


Рис. 1

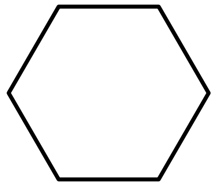
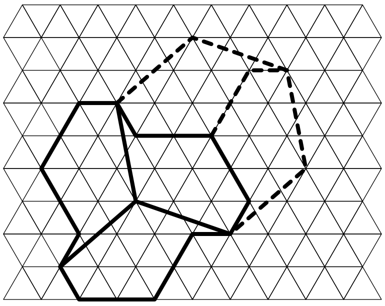
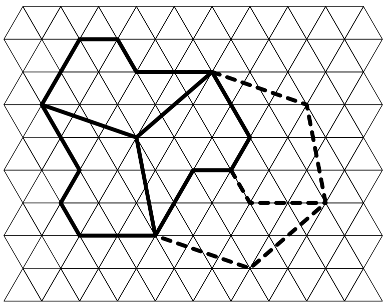


Рис. 2

Решение. Два решения приведены ниже.



Решение 1



Решение 2

Комментарий. Найти решение могут помочь следующие два соображения. Во-первых, сосчитав число треугольничков в фигуре, находим, что сторона шестиугольника больше 2, но меньше 3. Во-вторых, так как фигура обладает поворотной симметрией, естественно попытаться провести три такие отрезка из ее центра.

5. (8–11) В саду растут яблони и груши — всего 7 деревьев (деревья обоих видов присутствуют). Ближе всех к каждому дереву растет дерево того же вида и дальше всех от каждого дерева растет дерево того же вида. Приведите пример того, как могут располагаться деревья в саду.

Комментарий. Имелось в виду, что если ближайших к данному дереву (или самых дальних от данного дерева) несколько, то условие должно выполнятся для *каждого* из них.

Решение. Посадим сначала по яблоне в двух противоположных вершинах квадрата и в его центре, а также по груше в двух других вершинах квадрата. После чего заменим каждую грушу на пару близкорастущих груш — теперь условие выполняется для всех деревьев, кроме центральной яблони. Но подвинув ее немного вдоль «яблоневой» диагонали, можно добиться, чтобы условие выполнялось и для нее — см. рис. 3 (подвинуть нужно так, чтобы, с одной стороны, нижняя яблоня стала к ней ближе, чем груши, а с другой — она осталась ближайшим деревом к верхней яблоне).

Комментарий. Можно аналогичную картинку нарисовать и по клеточкам — см. рис. 4.

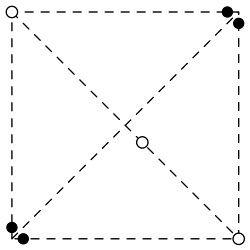


Рис. 3

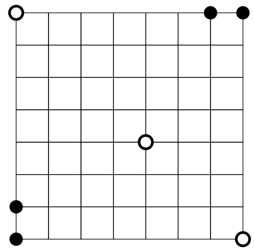
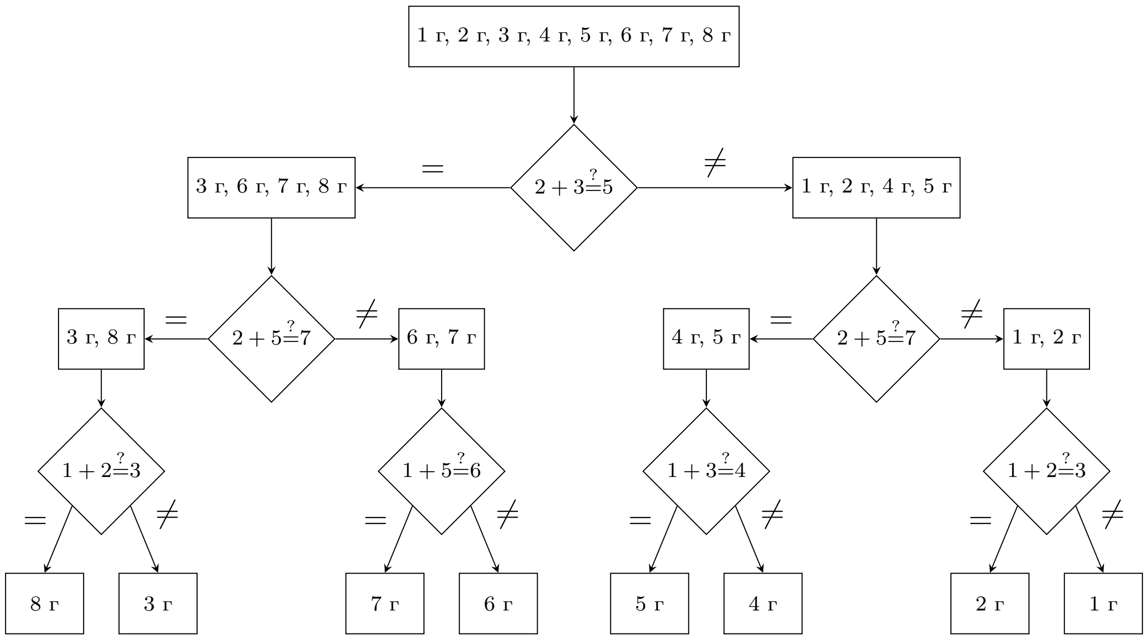


Рис. 4

6. (8–11) Было 8 грузиков массами 1, 2, …, 8 г. Один из них потерялся, а остальные выложили в ряд по возрастанию массы. Есть весы с лампочкой, при помощи которых можно проверить, имеют ли две группы грузиков одинаковую массу. Как за 3 проверки определить, какой именно грузик потерялся?

Решение. Одна из возможных последовательностей взвешиваний приведена на схеме. В прямоугольниках указаны оставшиеся к данному моменту варианты для массы потеряной гирьки, в ромбах — взвешивания. В описании взвешиваний используются номера оставшихся грузиков — от 1 до 7.



Заметим, что если потерян грузик массой n г, то гирьки с номерами, меньшими n, весят столько грамм, каков их номер, а грузики с номером n и больше весят на 1 г больше, чем их номер.

Теперь нетрудно проверить приведенную схему. Ограничимся такой проверкой для первого взвешивания. Имеется 4 случая: если потерянный грузик был тяжелее 5 г, то весы останутся в равновесии ($2+3=5$); если был потерян грузик массой 4 г или 5 г, то равновесия не будет ($2+3\neq(5+1)$); если потерян грузик массой 3 г, то равновесие снова будет $(2+(3+1)=(5+1))$; наконец, если потерян грузик массой 1 г или 2 г, то равновесия снова не будет $((2+1)+(3+1)\neq(5+1))$.

Комментарий. 1. Придумать правильную последовательность взвешиваний может помочь следующее соображение. Изначально для потерянного грузика имеется 8 вариантов, и 3 взвешивания могут иметь как раз $2^3=8$ исходов. Значит, каждое взвешивание должно сужать количество вариантов для потерянной гирьки вдвое. (В самом деле, пусть, например, один из исходов первого взвешивания возможен не в 4, а в 5 случаях. Тогда за оставшиеся 2 взвешивания нужно выбрать один грузик из 5, а эти взвешивания могут иметь только $2^2=4$ различных исхода.)

2. Существуют и "неинтерактивные" решения — в которых следующие взвешивания не зависят от результатов предыдущих, а определены заранее. Например, $2+4\stackrel{?}{=}6$, $1+2+4+7\stackrel{?}{=}3+5+6$, $1+5+6\stackrel{?}{=}2+3+7$.

7. (9–11) Существуют ли такие целые положительные x и y, что $x^4-y^4=x^3+y^3$?

Ответ: нет.

Решение 1. После деления на $x+y$ получаем $(x-y)(x^2+y^2)=x^2-xy+y^2$. Но левая часть не меньше x^2+y^2 (так как из условия видно, что $x>y$), а правая меньше.

Решение 2. Перенесем иксы в левую часть, а игреки в правую. Получаем $x^4-x^3=y^4+y^3$, т.е. $x^3(x-1)=y^3(y+1)$. Видно, что невозможен ни случай $x\leqslant y$ (тогда правая часть заведомо больше левой), ни случай $x\geqslant y+2$ (тогда левая часть заведомо больше правой). Но и в оставшемся случае, $x=y+1$, получаем, что $(y+1)^3y=y^3(y+1)$. Для положительных y последнее условие равносильно тому, что $(y+1)^2=y^2$, что тоже невозможно.

8. (9–11) На клетчатой бумаге проведена диагональ прямоугольника 1×4. Покажите, как, пользуясь только линейкой без делений, разделить этот отрезок на три равные части.

Решение 1. Построение: соединим каждую из двух других вершин прямоугольника с серединой соответствующей длинной стороны (рис. 5). Правильность построения следует из теоремы Фалеса: параллельные прямые AN, MC и BX делят на три равные части отрезок DX — а значит, и диагональ DB.

Решение 2. Построение: проведем из каждого узла стороны DC диагональ клетки (рис. 6). Правильность построения снова следует из теоремы Фалеса: параллельные прямые делят на три равные части отрезок DY.

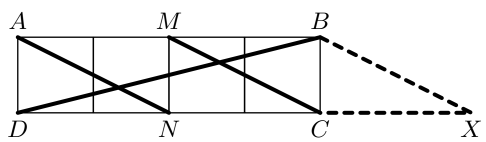


Рис. 5

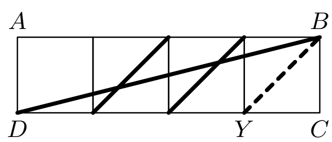


Рис. 6

Задачи для конкурса по математике предложили: 1, 3, 5 — Т. В. Караваева, 2 — Г. А. Гальперин, 4 — И. И. Осипов, 6 — А. В. Шаповалов, 7 — Б. Р. Френкин, 8 — Ф. Т. Романов.

Конкурс по математике. О критериях оценивания

По результатам проверки каждого задания ставилась одна из следующих оценок (перечислены в порядке убывания):
«$+$» — задача решена полностью;
«$\pm$» — задача решена с недочетами, не влияющими на общий ход решения;
«$^+/_2$» — см. критерии по задаче 5;
«$\mp$» — задача не решена, но имеются содержательные продвижения;
«$-$» — задача не решена;
за задачу, к решению которой участник не приступал ставился «0».

Так как по одному ответу невозможно определить, в какой степени участник решил задачу, за верный ответ без решения ставится не выше «$\mp$» («$-$» если ответ типа «да–нет»).

Комментарии по задачам

1. Утверждение «произведение двух двузначных чисел не может быть больше произведения двузначного и трехзначного чисел» неверно; за использующие его решения ставилась оценка «$-$».
2. Ответ не на вопрос задачи (например, «$^2/_3$») — от «$-$» до «$\mp$».
3. Верно найдено лишь настоящее число столбов (64) — «$\mp$».

Решение «Миша не выговаривает все числа с буквой “Ш”, до ста таких чисел 19 — значит, ответ $100 - 19 = 81$» полностью неверно (хотя и приводит к верному ответу); за него ставилась оценка «$-$» («$\mp$», если попутно найдено настоящее число столбов).
4. Отметим, что разрезания по линиям сетки не существует (см. комментарий к решению).
5. Некоторые участники сочли, что если ближайших (или самых дальних) деревьев к данному несколько, то достаточно, чтобы условие было выполнено *хотя бы для одного* из этих деревьев. За решение такого (существенно более простого) варианта задачи ставилась оценка «$^+/_2$».

Доказательства того, что приведенный пример удовлетворяет условию задачи от участников не требовалось.
7. Потеря в решении типа решения 2 ключевого случая «$x = y+1$» — не выше «$\mp$».
8. Решение этой задачи состоит из двух частей — построения и доказательства. Только верное построение — «$\mp$».

Отметим, что *одной линейкой* нельзя, вообще говоря, ни провести прямую, параллельную данной, ни построить перпендикуляр к данной прямой.