XXXIII Турнир имени М. В. Ломоносова 26 сентября 2010 года

Конкурс по математическим играм. Решения. Критерии.

Выберите игру, которая Вас больше заинтересовала, и попробуйте придумать для одного из игроков (первого или второго) стратегию, гарантирующую ему победу независимо от ходов соперника. Постарайтесь не только указать, как следует ходить, но и объяснить, почему при этом неизбежен выигрыш. Ответ без пояснений не учитывается.

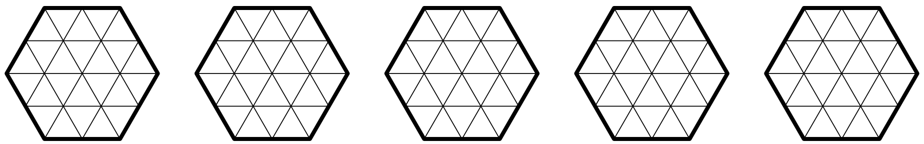
Не пытайтесь решить все задания, сохраните время и силы для других конкурсов. Хороший анализ даже только одной игры позволит считать Ваше участие в конкурсе успешным.

1. «Режем шестиугольник». Есть правильный шестиугольник со стороной N, разлинованный на равносторонние треугольники со стороной 1. Два игрока ходят по очереди. В свой ход игрок разрезает фигуру на две части по прямой линии сетки, одну часть выкидывает, а другую передаёт сопернику. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

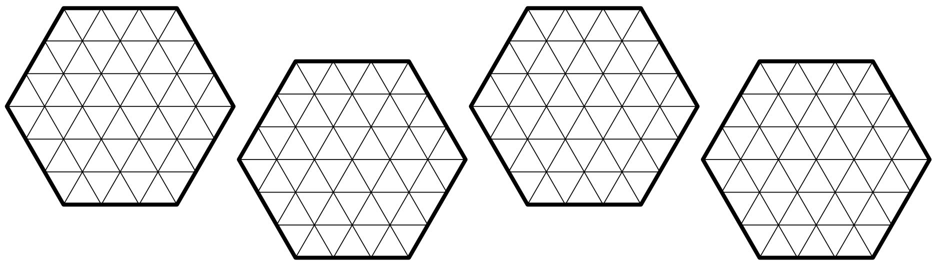
Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр?

Рассмотрите случаи:

а) $N = 2$



б) $N = 3$



в) N произвольно

(В пунктах «а» и «б» нарисовано несколько одинаковых шестиугольников. Их можно использовать для игры друг с другом или для черновика. Те части фигур, которые по условиям игры выкидываются, рекомендуется заштриховывать.)

Ответ. Во всех случаях победит второй игрок.

Решение. Рассмотрим сразу общий случай (пункт «в»). Заметим, что в любой момент у полученной фигуры углы равны либо 60°, либо 120°.

Второй игрок победит, если будет придерживаться следующей стратегии: *если у фигуры есть острый угол, отломить единичный равносторонний треугольник и отдать его сопернику, иначе разрезать фигуру по линии, симметричной предыдущей линии разреза относительно центра фигуры, имевшейся на руках у соперника непосредственно перед его ходом.*

Следуя этой стратегии, второй игрок всегда будет иметь ход, а потому не проиграет. Поскольку кто-то должен проиграть, то это и будет начинающий.

В принципе, правильность описанной стратегии достаточно очевидна. Попробуем, однако, более подробно объяснить, почему у второго игрока всегда будет ход. А именно, покажем, что

> *Перед каждым ходом начинающего у него в руках будет либо равносторонний треугольник со стороной* 1*, либо центрально-симметричный шестиугольник с углами по* 120°.

Исходный шестиугольник такими свойствами обладает. Пусть первый игрок провёл карандашом линию своего разреза. Эта линия проходит по границам треугольничков и потому параллельна одной из пар противоположных сторон. Если она пересекает пару противоположных сторон (в частности, проходит через углы), то у каждой из образующихся после разреза частей есть угол в 60° (один из двух накрест лежащих углов при этой секущей), поэтому второй игрок отдаст первому треугольничек. Если она пересекает пару непараллельных сторон, то на части, не содержащей центр симметрии, будет даже два острых угла, а на другой части острых углов не образуется, но там можно будет провести симметричный разрез и отдать сопернику фигуру без острых углов и с восстановленной симметричностью. Этот шестиугольник будет снова удовлетворять условиям, и так далее.

2. «Сколько конфет?» Дед Мороз поставил под ёлку несколько мешков с конфетами. Волк и Заяц не знают, сколько в каком мешке конфет, а Дед Мороз знает. Волк и Заяц играют в игру, делая ходы по очереди. Ход состоит в том, что игрок указывает на какие-то два мешка, а Дед Мороз вслух объявляет, сколько в этих мешках вместе конфет. После этого игрок имеет право (но не обязан) объявить, сколько конфет во всех мешках вместе. Если он угадал, то считается победителем, а если нет, то победителем признаётся соперник. Если игрок не желает угадывать количество конфет, его ход на этом завершается, а право ходить получает противник. Дважды спрашивать про одну и ту же пару мешков нельзя.

Начинает игру Заяц. Кто — Заяц или Волк — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр?

Рассмотрите случаи, когда под ёлкой:

а) 3 мешка; б) 4 мешка; в) 5 мешков; г) 6 мешков.

Ответ. В пунктах «а» и «г» победит Заяц, в пунктах «б» и «в» — Волк.

Решение. Сначала о двух условностях, связанных с этой игрой. Во-первых, понятно, что любой игрок в любой момент может победить, случайно угадав число конфет в мешках. Предполагается, однако, что игроки называют число только если уверены в его правильности, а не гадают попусту. Во-вторых, при совершенно честной игре может сложиться ситуация, когда количество конфет можно назвать раньше, чем в общем случае. Например, если, показав на два мешка, мы получаем ответ «10», то ничего о содержимом каждого мешка сказать нельзя, а если нам ответят «0», то можно. Причём эта проблема не решается даже если договориться, что в мешках достаточно много конфет: если, например, их не менее пяти в мешке, то уже ответ «10» даст «лишнюю» информацию. В реальных играх со школьниками на Турнире наши ведущие просили школьников решать задачу предполагая, что таких особых случаев не происходило, а самым дотошным велели представить себе, что количество конфет может быть отрицательным — если такое допустить, проблема снимается.

Теперь опишем решение каждого пункта задачи. Мешки, а также количество конфет в них, будем обозначать латинскими буквами. Мы будем всякий раз описывать только один из нескольких равноправных случаев, если таковые представятся.

В пункте «а» Заяц сначала указывает на мешки **A** и **B** и узнаёт $A+B$. Разумеется, общую сумму он назвать пока не может. Волк своим ходом узнаёт $B+C$. Поскольку он не в состоянии по этим данным отличить, например, ситуацию

A	B	C
3	4	5

с суммой 12 от

A	B	C
2	5	4

с суммой 11, он не станет называть общую сумму. Заяц же, спросив $A+C$, сложит и поделит пополам три известных ему суммы и получит $A+B+C$, а потому победит. Заметим, что он сможет назвать, очевидно, не только общую сумму, но и количество конфет в каждом мешке.

В пункте «б» Заяц указывает на мешки **A** и **B** и узнаёт $A+B$. Далее Волк узнаёт $C+D$ и немедленно побеждает.

Значительно сложнее пункт «в». Сначала Заяц, как и ранее, указывает на мешки **A** и **B** и узнаёт $A+B$. После этого Волк (напомним, мы описываем выигрышную стратегию именно для него) укажет на **C** и **D** и узнает $C+D$. Если теперь Заяц укажет на пару мешков с участием **E**, например, на **E** и **A**, Волк тут же спросит про **E** и **B**, узнает (как в пункте «а» сумму $A+E+B$, прибавит известную сумму $C+D$ и выиграет. Поэтому разумный Заяц назовёт два мешка из разных названных ранее пар, например **B** и **C**, а Волк на это "замкнёт цепочку", спросив про **A** и **D**. Как мы уже видели, Заяц не может своим следующим вопросом задействовать мешок **E**, поэтому он спросит про **A** и **C** (или про **B** и **D**) и теперь обоим будут известны (согласно замечанию к пункту а) количества конфет в каждом из первых четырёх мешков. Назвав теперь один из них и **E**, Волк выиграет.

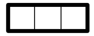
В пункте «г» Заяц, как обычно, указывает на мешки **A** и **B** и узнаёт $A+B$. Если Волк укажет на два других мешка (этот ход помог ему выиграть в предыдущем пункте), то Заяц укажет на два оставшихся и немедленно победит. Так что Волку остаётся назвать **B** и **C**. Заяц точно так же как в пункте «а» указывает на мешки **A** и **C**, и теперь обоим известно, сколько конфет в каждом из первых трёх мешков. Своим следующим ходом Волк может либо указать на один из новых мешков и один из первой тройки, либо на два новых. Но ни один ход не сулит ему победы: если он укажет, например, на **A** и **D**, Заяц, зная A, вычислит D, потом назовёт **E** и **F** и победит. Если же Волк укажет на **D** и **E**, то Заяц укажет на **A** и **F**, найдёт F и тоже победит.

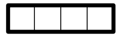
3. «Борьба за территорию». Двое играют на поле 5×5 клеток, закрашивая клетки — каждый в свой цвет. Первый игрок своим ходом красит одну клетку, второй — фигуру из нескольких клеток (повёрнутую по своему усмотрению). Повторно клетки красить нельзя. Игрок, не имеющий хода, пропускает его. Игра заканчивается, когда всё поле закрашено. Победителем считается тот, кто в итоге сумел закрасить своим цветом бо́льшую площадь, чем противник.

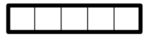
Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр?

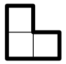
Рассмотрите случаи, когда второй игрок закрашивает:

а) полоску 1×2 клетки ();

б) полоску 1×3 клетки ();

в) полоску 1×4 клетки ();

г) полоску 1×5 клеток ();

д) уголок из трёх клеток ().

Решение. Поначалу кажется, что второй игрок имеет существенное преимущество: он одним ходом закрашивает в несколько раз больше клеток, чем противник. Однако фигуры второго игрока хоть и большие, но неповоротливые: умелой игрой начинающий быстро «портит» игровое поле, не давая сопернику ходить, после чего заполняет свободную территорию своим цветом. Только изогнутая форма фигурки второго игрока в последнем пункте («г») позволяет ему (не без труда) победить «одноклеточного» соперника.

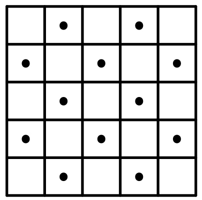


Рис. 1

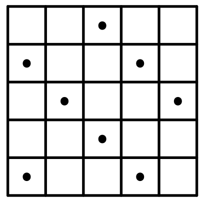


Рис. 2

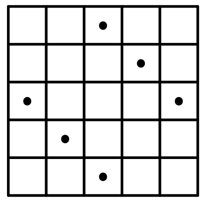


Рис. 3

Для описания стратегии первого игрока в пункте «а» поставим на некоторых полях точки (см. рис 1). Очевидно, что каждым своим ходом второй игрок закрасит одну и только одну отмеченную клетку. Если первый игрок будет красить только клетки с точкой (а именно так мы и рекомендуем ему поступать), то после того, как оба сделают по шесть ходов, второй игрок больше пойти не сможет, а потому проиграет — он закрасил только 12 клеток из 25.

Абсолютно аналогично решение и в двух следующих пунктах: соответствующие расстановки точек смотрите на рисунках 2 и 3.

Отметим, что в этих случаях «одноклеточный» игрок победит даже если предоставит право первого хода сопернику.

В пункте «г» после первого парного хода определяется, в каком направлении (вертикальном или горизонтальном) будет красить клетки второй игрок. Если, например, он закрасил столбец, то и дальше сможет красить только столбцы. Но свободных столбцов остаётся 3, из которых он сможет гарантированно закрасить только 1 — два других «испортит» начинающий. Тем самым второй игрок закрасит только 10 клеток из 25. В этом варианте игры первый игрок проиграет, если передаст сопернику право начать игру.

Приведём теперь стратегию для второго игрока в пункте «д» — это задание оказалось самым сложным во всём конкурсе.

4	5	7	6	4
6	3	2	3	5
7	2	1	2	7
5	3	2	3	6
4	6	7	5	4

Рис. 4

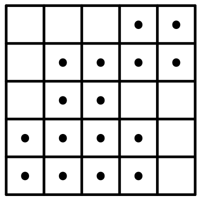


Рис. 5

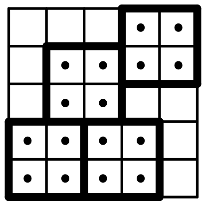


Рис. 6

Все 25 клеток игрового поля можно разбить на семь типов (рис. 4)[1]:
1) центральная,
2) соседняя с центральной по стороне,
3) соседняя с центральной по углу,
4) угловая,
5) соседняя с угловой по стороне слева,
6) соседняя с угловой по стороне справа,
7) и, наконец, средняя у края.
Любые две клетки одного типа можно совместить поворотом поля.

Поставим точки в некоторых клетках (см. рис. 5). Среди отмеченных есть клетки всех семи типов, поэтому, повернув, если нужно, игровое поле, можно считать, что начинающий закрасил клетку с точкой. Теперь разобьём клетки с точками на четыре квадрата 2×2 (см. рис. 6) и посоветуем второму игроку придерживаться такой стратегии:

- Если начинающий закрасил клетку в одном из квадратов с точками, закрась оставшиеся клетки этого квадрата;
- Если начинающий закрасил клетку в одной из двух зон, свободных от точек, закрась уголок в другой зоне.

[1] Если у двух клеток одинаковый тип, то их центры расположены на одинаковом расстоянии от центра центральной клетки. Но не наоборот: сравните клетки типов 5 и 6.

Очевидно, что второй игрок сможет, следуя этой стратегии, сделать как минимум пять ходов, а тогда он победит.

Критерии оценивания

За каждую задачу присуждается целое количество баллов от 0 до 20. Оценки по различным пунктам суммируются (при этом ставится 20 баллов, если сумма оказывается больше 20).

1. «Режем шестиугольник».
а) 3 балла за полное решение.
б) 5 баллов за полное решение.
в) 20 баллов за полное решение.
1 балл, если просто указано, как поступать с острым углом.
5 баллов за неизвестную симметрию, в т. ч. «копирование» и другие нечёткие формулировки, без явного объяснения, что делать с острыми углами в общем случае.
10 баллов за полную формулировку стратегии (с углами) со словами типа «надо копировать ходы», «повторять ходы» и т. д., без указания центральной или диагональной симметрии.
+2 балла за указание вида симметрии.
+2–6 баллов за рассуждение о том, что всегда есть ходы.
+2–6 баллов за рассуждение об отсутствии острых углов у нашей фигуры (корректность нашего хода).

2. «Сколько конфет?».
а) 5 баллов за полное решение.
минус 1 балл, если не показано, как считать ответ.
минус 2 балла, если нет объяснения или хотя бы упоминания, почему нельзя было назвать число мешков раньше (почему другой не выиграет).
б) 2 балла за полное решение.
в) 15 баллов за полное решение.
г) 15 баллов за полное решение.
В пунктах «в» и «г» за сильные ошибки в разборе одного из 3 важных случаев снималось 5 баллов за случай.

3. «Борьба за территорию».
а) 6 баллов за полное решение.
б) 7 баллов за полное решение.
в) 6 баллов за полное решение.
г) 5 баллов за полное решение.
д) 10 баллов за полное решение.
Снимается 3 балла, если есть стратегия, но нет её доказательства.
0 баллов за слова «блокировать ходы» и т. п. (подобные рассуждения не влияют на оценку).