Конкурс по математике

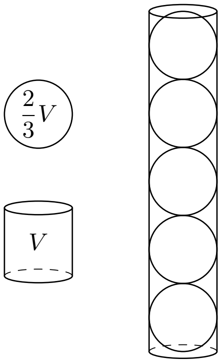
Задания

В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (причём не обязательно решать абсолютно все задачи своего класса); решать задачи более старших классов также разрешается.

1. (6–7) Можно ли заменить буквы цифрами в ребусе

$$\textbf{ШЕ}\cdot\textbf{СТЬ}+1=\textbf{СЕ}\cdot\textbf{МЬ}$$

так, чтобы получилось верное равенство (разные буквы нужно заменять разными цифрами, одинаковые буквы — одинаковыми цифрами)?



2. (6–7) Ещё Архимед знал, что шар занимает ровно 2/3 объёма цилиндра, в который он вписан (шар касается стенок, дна и крышки цилиндра). В цилиндрической упаковке находятся 5 стоящих друг на друге шаров. Найдите отношение пустого места к занятому в этой упаковке.

3. (6–8) Боря и Миша едут в поезде и считают столбы за окном: «один, два, ...». Боря не выговаривает букву «Р», поэтому при счёте он пропускает числа, в названии которых есть буква «Р», а называет сразу следующее число без буквы «Р». Миша не выговаривает букву «Ш», поэтому пропускает числа с буквой «Ш». У Бори последний столб получил номер «сто». Какой номер этот столб получил у Миши?

4. (6–8) Покажите, как разрезать (*не обязательно* по линиям сетки) фигуру на рис. 1 на три равные части и сложить из этих частей правильный шестиугольник, изображённый на рис. 2. Оставлять дырки и накладывать части друг на друга нельзя.

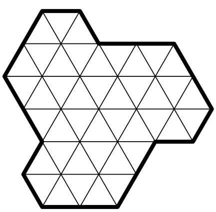


Рис. 1

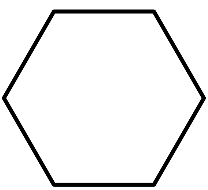


Рис. 2

5. (8–11) В саду растут яблони и груши — всего 7 деревьев (деревья обоих видов присутствуют). Ближе всех к каждому дереву растёт дерево того же вида и дальше всех от каждого дерева растёт дерево того же вида. Приведите пример того, как могут располагаться деревья в саду.

6. (8–11) Было 8 грузиков массами 1, 2, …, 8 г. Один из них потерялся, а остальные выложили в ряд по возрастанию массы. Есть весы с лампочкой, при помощи которых можно проверить, имеют ли две группы грузиков одинаковую массу. Как за 3 проверки определить, какой именно грузик потерялся?

7. (9–11) Существуют ли такие целые положительные x и y, что

$$x^4 - y^4 = x^3 + y^3 \quad ?$$

8. (9–11) На клетчатой бумаге проведена диагональ прямоугольника 1×4. Покажите, как, пользуясь только линейкой без делений, разделить этот отрезок на три равные части.

Решения к заданиям конкурса по математике

1. И число **ШЕ · СТЬ**, и число **СЕ · МЬ** оканчиваются на одну и ту же цифру — последнюю цифру числа **Е · Ь**. Поэтому левая и правая части равенства оканчиваются на разные цифры и не могут быть равны.

Ответ. Нет.

2. Разделим упаковку на 5 цилиндров, в каждый из которых вписан шар. В каждом из цилиндров отношение пустого места к занятому есть

$$\frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Значит, и во всей упаковке это отношение такое же, 1 : 2.

Ответ. 1 : 2.

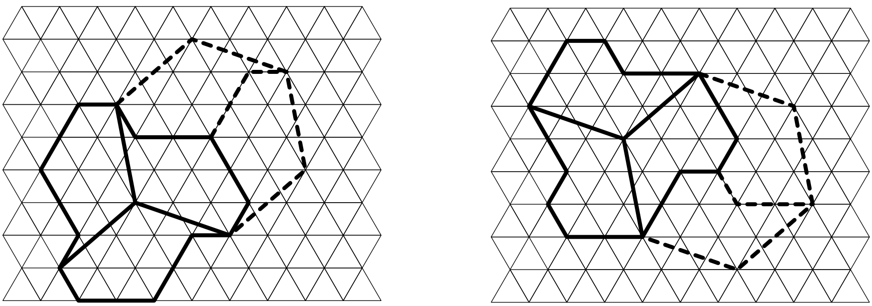
3. Боря выговаривает числа, в записи которых нет цифр 3 и 4 — среди первых ста чисел таких $(10-2)^2 = 64$ (и для цифры десятков, и для цифры единиц есть по 8 вариантов), т. е. на самом деле столбов было 64.

Миша же пропускает числа, в записи которых присутствует цифра 6. Поэтому, досчитав до «59», он пропустит 6 чисел — т. е. ему останется посчитать ещё $64-(59-6)=11$ столбов. Отсчитывая эти 11 столбов, Миша пропустит все числа от 60 до 69, а также число 76. В результате последний столб получит у него номер $69+11+1=81$.

Ответ. «Восемьдесят один».

Комментарий. Боря, фактически, считает столбы в восьмеричной системе счисления с цифрами 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9; а Миша — в девятеричной с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9. Соответственно, чтобы решить задачу, надо перевести число «100» из восьмеричной системы в девятеричную — получится «71», а потом записать его «Мишиными цифрами» (пропуская шестерку) — получится «81».

4. Два решения приведены ниже.



Комментарий. Найти решение могут помочь следующие два соображения. Во-первых, сосчитав число треугольничков в фигуре, находим, что сторона шестиугольника больше 2, но меньше 3. Во-вторых, так как фигура обладает поворотной симметрией, естественно попытаться провести три такие отрезка из её центра.

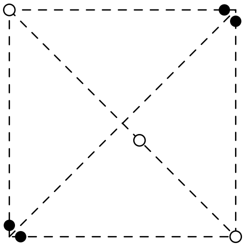
5. Имелось в виду, что если ближайших к данному дереву (или самых дальних от данного дерева) несколько, то условие должно выполняться для *каждого* из них.[1]

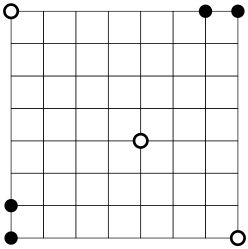
Посадим сначала по яблоне в двух противоположных вершинах квадрата и в его центре, а также по груше в двух других вершинах квадрата. После чего заменим каждую грушу на пару близкорастущих груш — теперь условие выполняется для всех деревьев, кроме центральной яблони. Но подвинув её немного вдоль «яблоневой» диагонали, можно добиться, чтобы условие выполнялось и для нее — см.

[1] Возможность неверного понимания условия ввиду не совсем удачной формулировки учтена при подведении итогов.

рисунок (подвинуть нужно так, чтобы, с одной стороны, нижняя яблоня стала к ней ближе, чем груши, а с другой — она осталась ближайшим деревом к верхней яблоне).

Можно аналогичную картинку нарисовать и по клеточкам.





6. Одна из возможных последовательностей взвешиваний приведена на схеме (см. стр. 5). В прямоугольниках указаны оставшиеся к данному моменту варианты для массы потерянной гирьки, в ромбах — взвешивания. В описании взвешиваний используются номера оставшихся грузиков — от 1 до 7.

Заметим, что если потерян грузик массой n г, то гирьки с номерами, меньшими n, весят столько грамм, каков их номер, а грузики с номером n и больше весят на 1 г больше, чем их номер.

Теперь нетрудно проверить приведённую схему. Ограничимся такой проверкой для первого взвешивания. Имеется 4 случая:

если потерянный грузик был тяжелее 5 г, то весы останутся в равновесии: $2+3=5$;

если был потерян грузик массой 4 г или 5 г, то равновесия не будет: $2+3\neq(5+1)$;

если потерян грузик массой 3 г, то равновесие снова будет: $2+(3+1)=(5+1)$;

наконец, если потерян грузик массой 1 г или 2 г, то равновесия снова не будет: $(2+1)+(3+1)\neq(5+1)$.

Комментарий 1. Придумать правильную последовательность взвешиваний может помочь следующее соображение. Изначально для потерянного грузика имеется 8 вариантов, и 3 взвешивания могут иметь как раз $2^3=8$ исходов. Значит, каждое взвешивание должно сужать количество вариантов вдвое. (В самом деле, пусть, например, один из исходов первого взвешивания возможен не в 4, а в 5 случаях. Тогда за оставшиеся 2 взвешивания нужно выбрать один грузик из 5, а эти взвешивания могут иметь только $2^2=4$ различных исхода.)

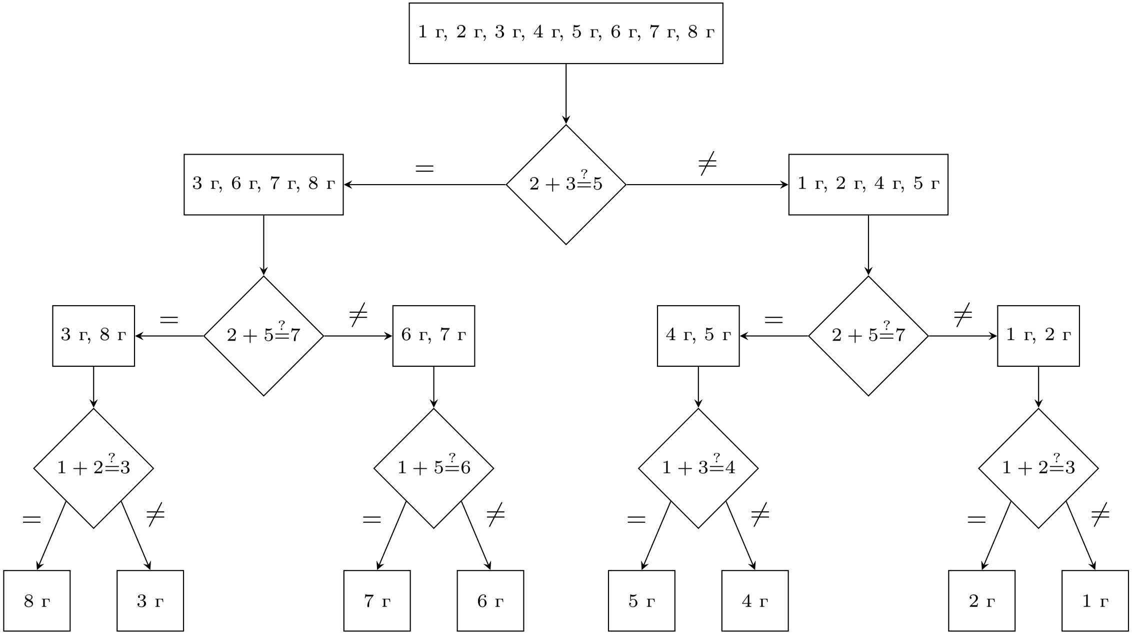


Схема взвешиваний к решению задачи № 6 по математике.

Комментарий 2. Существуют и «неинтерактивные» решения — в которых следующие взвешивания не зависят от результатов предыдущих, а определены заранее. Достаточно, например, в приведённом решении заменить последнее взвешивание на « $1 + 2 + 7 \stackrel{?}{=} 4 + 6$ ».

7. После деления уравнения $x^4 - y^4 = x^3 + y^3$ на $(x + y)$ получаем

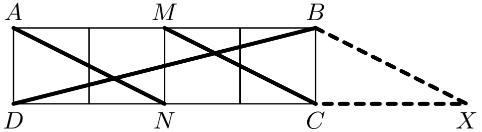
$$(x - y)(x^2 + y^2) = x^2 - xy + y^2 \ .$$

Но левая часть не меньше $x^2 + y^2$ (так как из условия видно, что $x > y$), а правая меньше.

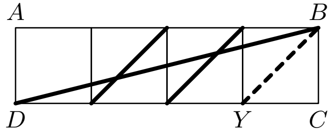
Другое решение. Перенесём иксы в левую часть, а игреки в правую. Получаем $x^4 - x^3 = y^4 + y^3$, т. е. $x^3(x - 1) = y^3(y + 1)$. Видно, что невозможен ни случай $x \leqslant y$ (тогда правая часть заведомо больше левой), ни случай $x \geqslant y + 2$ (тогда левая часть заведомо больше правой). Но и в оставшемся случае, $x = y + 1$, получаем, что $(y + 1)^3 y = y^3(y + 1)$. Для $y > 0$ последнее условие равносильно тому, что $(y + 1)^2 = y^2$, что тоже невозможно.

Ответ. Нет.

8. Построение: соединим каждую из двух других вершин прямоугольника с серединой соответствующей длинной стороны. Правильность построения следует из теоремы Фалеса: параллельные прямые AN, MC и BX делят на три равные части отрезок DX — а значит, и диагональ DB.



Другое решение. Построение: проведём из каждого узла стороны DC диагональ клетки. Правильность построения снова следует из теоремы Фалеса: параллельные прямые делят на три равные части отрезок DY.



Задачи для конкурса по математике предложили: № 1, № 3, № 5 — Т. В. Караваева, № 2 — Г. А. Гальперин, № 4 — И. И. Осипов, № 6 — А. В. Шаповалов, № 7 — Б. Р. Френкин, № 8 — Ф. Т. Романов.

Критерии проверки и награждения

По результатам проверки каждого задания ставилась одна из следующих оценок (перечислены в порядке убывания):
«$+$» — задача решена полностью;
«$\pm$» — задача решена с недочётами, не влияющими на общий ход решения;
«$+/2$» — см. критерии по задаче 5;
«$\mp$» — задача не решена, но имеются содержательные продвижения;
«$-$» — задача не решена;
за задачу, к решению которой участник не приступал, ставился «0».

Так как по одному ответу невозможно определить, в какой степени участник решил задачу, за верный ответ без решения ставится не выше «$\mp$» («$-$» если ответ типа «да–нет»).

Комментарии по задачам (критериям оценок)

1. Утверждение «произведение двух двузначных чисел не может быть больше произведения двузначного и трёхзначного чисел» неверно; за использующие его решения ставилась оценка «$-$».
2. Ответ не на вопрос задачи (например, «2/3») — от «$-$» до «$\mp$».
3. Верно найдено лишь настоящее число столбов (64) — «$\mp$».

Решение «Миша не выговаривает все числа с буквой «Ш», до ста таких чисел 19 — значит, ответ $100 - 19 = 81$» полностью неверно (хотя и приводит к верному ответу); за него ставилась оценка «$-$» («$\mp$», если попутно найдено настоящее число столбов).
4. Отметим, что разрезания по линиям сетки не существует (см. комментарий к решению).
5. Некоторые участники сочли, что если ближайших (или самых дальних) деревьев к данному несколько, то достаточно, чтобы условие было выполнено *хотя бы для одного* из этих деревьев. За решение такого (существенно более простого) варианта задачи ставилась оценка «$+/2$».

Доказательства того, что приведённый пример удовлетворяет условию задачи, от участников не требовалось.
7. Потеря в решении типа решения 2 ключевого случая «$x = y + 1$» — не выше «$\mp$».
8. Решение этой задачи состоит из двух частей — построения и доказательства. Только верное построение — «$\mp$».

Отметим, что *одной линейкой* нельзя, вообще говоря, ни провести прямую, параллельную данной, ни построить перпендикуляр к данной прямой.

Критерии награждения

При награждении учитывались только задачи своего и более старших классов. Задачи, предназначенные для более младших классов (чем тот, в котором учится участник турнира), проверялись и оценивались, но не учитывались при награждении.

При подведении итогов решёнными считаются задачи, за которые выставлены оценки «+» и «±». Также было принято решение считать решённой задачу № 5 в случае, если за неё выставлена оценка «+/2».

Оценка «e» (балл многоборья) ставилась в следующих случаях:
— в 10 классе и младше решено не менее 1 задачи;
— в 11 классе решено не менее 2 задач.

Оценка «v» (грамота за успешное выступление на конкурсе по математике) ставилась в следующих случаях:
— в 6 классе и младше решено не менее 1 задачи;
— в 10 классе и младше решено не менее 2 задач;
— в 11 классе решено не менее 3 задач.

В случае, если поставлена оценка «v», оценка «e» не ставится.

Оглавление