1. Крестики-нолики на полоске

А) Ответ: выигрывает второй игрок. Пронумеруем клетки плоски. Предположим сначала, что первый поставил крестики в клетки с номерами 5 и 6. Тогда второму надо поставить нолик в клетку 4. За следующий ход первый игрок сможет закрыть крестиками не более двух из трёх клеток с номерами 7, 8 или 9, следовательно, хотя бы одна из них останется свободной. В неё второму игроку и следует поставить нолик. Теперь выставить пять крестиков подряд в полоске уже невозможно.

Если же одна из клеток 5 и 6 осталась свободной после первого хода первого игрока, то второй игрок должен сначала поставить нолик в неё. Пусть это клетка с номером 5 (второй случай — симметричен). Вторым своим ходом второй игрок должен поставить нолик в одну из клеток с номерами 6, 7, 8, 9 и 10. Хотя бы одна из этих клеток будет свободна, так как за два хода первый игрок закроет крестиками не более 4-х клеток. После этого в полоске не останется места для пяти последовательных крестиков, и, таким образом, первый игрок проигрывает.

Б) Ответ: выигрывает первый игрок. Пронумеруем клетки полоски. Первым ходом первый игрок должен поставить крестики в клетки с номерами 3 и 11. Если второй игрок поставит нолик в любую свободную клетку левее центральной, т.е. с номерами от 1 до 6, первый игрок должен поставить крестики в клетки 9 и 10. После этого образуется *“вилка”*: в полоске есть три крестика подряд, у которых слева и справа по две свободные клетки. Одна из этих пар клеток целиком останется свободной после хода второго игрока, первый игрок поставит туда свои два крестика и выиграет. Случай, когда второй игрок первым своим ходом ставит нолик правее центра — симметричен только что разобранному.

Рассмотрим случай, когда второй игрок первым своим ходом ставит нолик в центральную клетку 7. Первому игроку следует поставить крестики в клетки 4 и 10. Без ограничения общности будем считать, что второй игрок далее поставил нолик в клетку с номером, большим 7. Тогда первому игроку следует поставить крестики на клетки с номерами 2 и 5. Получается ещё одна “вилка”: 4 крестика подряд, у которых по бокам по одной свободной клетке. Этого достаточно первому игроку, чтобы выиграть следующим ходом.

В) Ответ: выигрывает второй игрок. Опишем действия второго игрока в засисимости от начального хода первого игрока:
1. Два крестика рядом: второй игрок ставит нолик вплотную к ним;
2. Два крестика через одну клетку: нолик ставится между ними;
3. Два крестика через две клетки: нолик между ними в любую из двух клеток;
4. Крестики диаметрально противоположны: нолик ставим через свободную клетку от каждого из них.
Заметим, что во всех этих случаях клетка напротив нолика и соседние с ней — остаются свободными. Второму игроку теперь достаточно поставить нолик в любую из этих трёх клеток, чтобы лишить соперника возможности поставить 5 крестиков подряд. И

он сможет это сделать: первый игрок за свой следующий ход закроет крестиками не более двух из них.

Г) Ответ: выигрывает первый игрок. Пронумеруем клетки кольца числами от 1 до 9. Первому игроку следует поставить крестики в клетки с номерами 2 и 8. Если второй игрок теперь ставит нолик в одну из клеток 4–6, то первый игрок ставит крестики в клетки 1 и 9, после чего образуется уже рассмотренная “вилка” из четырёх крестиков подряд со свободными клетками по бокам. Если второй игрок ставит нолик в клетку 3 или 7, то первый игрок ставит крестики в клетки 6–7 или 3–4 соответственно, после чего возникает “вилка” из трёх крестиков подряд с парами свободных клеток по бокам. Если же второй игрок ставит нолик в клетку с номером 9, то первому игроку следует поставить крестики в клетки 4 и 5. Теперь чтобы выиграть, ему достаточно поставить два крестика либо в клетки 1 и 3, либо в клетки 6 и 7. Одна из этих пар клеток останется свободной к следующему ходу первого игрока, что и обеспечит ему победу. Оставшийся же случай клетки 1 аналогичен предыдущему в силу симметрии.

Д) Ответ: выигрывает первый игрок. Пронумеруем клетки. Первым ходом первый игрок должен поставить крестики в клетки с номерами 1 и 7. Это противоположные клетки кольца. Очевидно, можно считать, что второй игрок поставит нолик в одну из клеток 2–4, поскольку остальные случаи — аналогичны в силу симметрии. Первому игроку теперь достаточно поставить крестики в клетки 8 и 9, после чего образовываются три крестика подряд с парами свободных клеток по бокам. Как было рассмотрено ранее, это приводит первого игрока к победе.

2. Пирамидки

Назовем стержень *полным*, если после n ходов игры на нём n колец. Оставшиеся стержни мы будем называть *неполными*.

А) Ответ: выиграет второй игрок. Для победы ему достаточно повторять ходы первого игрока: класть кольца на те же стержни, что и соперник. Заметим, что при этом всегда перед ходом первого игрока на всех стержнях будет четное число колец, поскольку за каждую пару ходов количество колец на каждом стержне либо увеличивается на два, либо останется таким же, а изначально все стержни пустые. Второй игрок всегда сможет повторить ход соперника, потому что на соответствующих 4-х стержнях обязано быть нечётное число колец, а стало быть, оно меньше восьми.

Б) Ответ: выигрывает второй игрок. Поскольку на каждый стержень можно надеть по 7 колец, то игра продлится по крайней мере 7 ходов. Из них 4 хода сделает первый игрок, и 3 — сделает второй. Покажем, как ходить второму, чтобы обеспечить себе последний, 8-ой ход в игре. Пронумеруем стержни. Без потери общности можно считать, что первый игрок надел кольца на стержни с номерами 2, 3, 4, 5 и не надел на первый. Стратегия второго игрока будет следующей: на первом ходу надеть кольца на все стержни, кроме второго; на втором — на все, кроме третьего; на третьем — на все, кроме четвертого. Тогда после 7 ходов количество неполных стержней будет не менее четырёх, а именно на стержнях 1, 2, 3, 4 будет не более шести колец, значит, второй может сделать ещё один ход. Заметим, что всего на стержни помещается $5 \cdot 7 = 35$ колец, а после 8-го хода всего будет надето 32 кольца. Значит, 9-ый ход невозможен. Следовательно второй игрок выигрывает.

В) Ответ: выигрывает второй игрок. После хода первого игрока второй должен пойти таким образом, чтобы остался ровно один полный стержень. Легко убедиться, что это возможно при любом ходе первого игрока. После следующего хода первого игрока второму необходимо сходить таким образом, чтобы на трёх стержнях было по три кольца, а на оставшихся, соответственно, 2 и 1. Этого добиться нетрудно — надо лишь повторить ход первого игрока с одним исключением: если тот положил кольцо на полный стержень, вместо него надо положить кольцо на один из двух стержней с одним кольцом. Без потери общности будем считать, что стержни с тремя кольцами имеют номера 1-3, стержень с двумя кольцами — четвертый, оставшийся с одним кольцом — пятый.

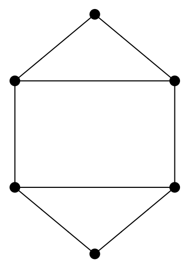
Если теперь первый наденет кольца на первые три стержня, то второй поступает аналогично и выигрывает. Если же первый надевает по кольцу на два из трёх первых стержней, то второй с ними поступает так же, а последнее кольцо надевает на тот из двух последних стержней, на который не надел первый. Теперь два стержня заполнены, а потому ходы игроков однозначны, и, поскольку на оставшиеся стержни можно положить только два ряда колец, выигрывает второй. В последнем случае, если первый игрок надевает лишь на один из первых трёх стержней, второй повторяет его ход и получает ситуацию, где можно надевать кольца лишь на 4 стержня, при этом на одном из них — 4 кольца, а на остальных — по 3. Заметим, что как бы ни сходил первый игрок в такой ситуации, у второго будет возможность сделать ход. Но после этого останется место лишь для одного кольца (за 8 ходов надето $8 \cdot 3 = 24$ кольца, а всего помещается 25). Таким образом, выигрывает второй игрок.

Г) Ответ: выигрывает первый игрок. Пронумеруем все данные нам стержни. Стратегия первого игрока будет состоять в том, чтобы всё время надевать кольца на первые 98 стержней. Посмотрим, как меняется количество полных стержней во время игры. После первого хода их 98. После каждого следующего хода первого игрока количество полных стержней не меняется (поскольку он надевает кольца на все полные стержни и некоторые неполные). После каждого хода второго игрока количество полных стержней не может уменьшится больше, чем на 2. Таким образом после 94го хода (47 ходов первого и 47 ходов второго) останется как минимум $98 - 47 \cdot 2 = 4$ полных стержня. После 95-го хода (он приходится на первого игрока) их останется столько же, следовательно, второй игрок не сможет сделать ход, поскольку не заполненными до самого конца останутся не более $100 - 4 = 96$ стержней.

3. Не упусти шарик!

А) Ответ: выиграет второй игрок. Схема шариков с верёвками является квадратом с диагоналями. Если первый игрок убирает верёвку на стороне квадрата, второй игрок должен убрать верёвку на противоположной стороне. Если же первый игрок убирает диагональ, второй должен убрать вторую диагональ. После первых двух ходов остаётся цепочка из четырёх последовательно соединённых верёвок с шариками в узлах. Следующий ход первого игрока оставляет второму единственный возможный ход, после которого первый проигрывает.

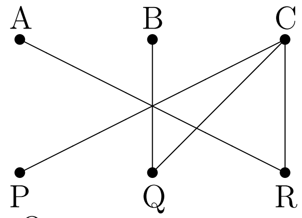
Б) Ответ: выиграет первый игрок. Первым ходом ему необходимо убрать одну из вертикальных верёвок. Можно развернуть получившуюся картинку:



Теперь все верёвки можно разбить на пары симметричных друг другу относительно *центра* картинки. После этого как только второй убирает одну из верёвок, первый убирает вторую из соответствующей пары. Всякий раз после хода первого игрока картинка вновь становится центрально симметричной. Заметим, что ни у одной из таких пар верёвок нет шарика, к которой они обе были бы привязаны.

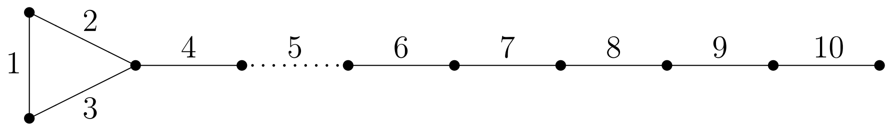
Докажем, что после хода первого игрока шарик улететь не может, и значит, он выиграет. Действительно, пусть в какой-то момент после хода первого игрока шарик улетел. Это означает, что перед этим ходом этот шарик был привязан лишь к одной верёвке. На предыдущем ходе второй игрок не мог отвязывать верёвку от этого шарика (иначе бы оказалось, что пара симметричных верёвок имеет общий шарик), значит, и перед ходом второго игрока этот шарик был привязан лишь к одной верёвке. Но перед ходом второго игрока картинка была центрально симметричной, а значит, и шарик, центрально симметричный рассматриваемому, тоже был привязан к одной верёвке, и эта верёвка была убрана вторым игроком. После этого игра должна была закончиться проигрышем второго игрока.

В) Ответ: выигрывает второй игрок. Назовём верхние шарики: A, B, C, а нижние шарики — P, Q, R. Заметим, что любая верёвка связывает верхний и нижний шарик, и все верхние шарики связаны со всеми нижними. Поэтому без ограничения общности можно предположить, что сначала первый игрок убирает верёвку A-P. Тогда второму игроку следует убрать A-Q. Таким образом, шарик A остаётся на одной верёвке A-R, которую уже нельзя убирать. Без ограничения общности можно считать, что следующим ходом первый игрок отвязывает верёвку от верхнего шарика B (от A уже отвязывать нельзя, а случай шарика C аналогичен). Если это B-P или B-Q (эти случаи одинаковы, и для определённости можно считать, что это B-P), то второй игрок отвязывает B-R. Если же первый убирает B-R, второму следует убрать B-P. Таким образом, шарики B и P тоже остаются на одной верёвке.



Осталось лишь две верёвки, которые можно убрать: C-Q и C-R. Первый игрок убирает одну из них, второй игрок — оставшуюся. Больше возможных ходов нет, таким образом, выигрывает второй игрок.

Г) Ответ: выиграет первый игрок. Пронумеруем верёвки как на рисунке.

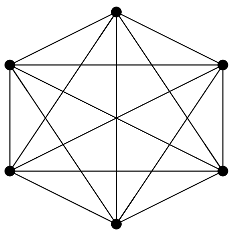


Первый игрок убирает верёвку под номером 5. После этого картинка разбивается на две части. Каждая из частей допускает всего лишь два возможных варианта развития событий внутри себя: из части может быть убрана либо лишь одна верёвка (1 и 8), либо две (2, 3 и 7, 9). Причём первая убранная верёвка однозначно определяет дальнейшее развитие событий в этой части. Таким образом, следующим ходом второй игрок определяет судьбу одной из частей, а далее первый игрок определяет такую же судьбу для второй части. После этого либо игра заканчивается сразу (в случае, если убраны верёвки 1 и 8), либо продолжается ещё два хода (в случае верёвок 2, 3 и 7, 9). Таким образом, выигрывает первый игрок.

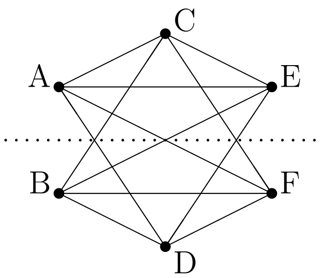
Д) Ответ: выигрывает второй игрок. Схему шариков можно представить в виде куба без диагоналей. Верёвки можно разбить на пары симметричных друг другу относительно центра куба. Когда первый убирает верёвку, второй должен убирать центрально симметричную ей. Эти верёвки не имеют общих шариков, и после каждого хода второго игрока картинка остаётся симметричной. Доказательство того, что после хода второго игрока шарик улететь не может, полностью аналогично доказательству из пункта **Б** с той только разницей, что игроки поменялись местами.

Е) Ответ: выиграет первый игрок.

К сожалению, у этого задания скорее всего нет решения, которое записывалось бы достаточно лаконично (например, симметричной стратегии). Поэтому нам придётся разобрать все возможные игровые позиции. Впрочем, если это делать аккуратно, решение иполучается не слишком длинным.

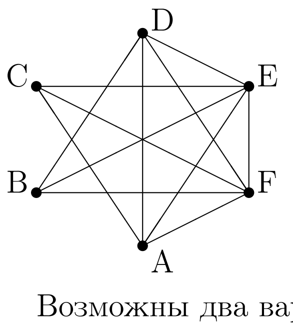


Поскольку каждый шарик связан с каждым, нет никакой разницы, какая именно верёвка будет убрана первой. Если следующим ходом второй игрок уберёт верёвку, связывающую другие два шарика, то далее первому игроку следует убрать верёвку, связывающую оставшуюся пару нетронутых шариков. Если обозначить соответствующие пары шариков за A-B, C-D и E-F, то получится следующая картинка:



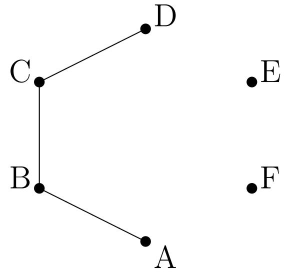
Заметим, что картинка симметрична относительно пунктирной линии. Все верёвки можно разбить на пары друг другу симметричных, не имеющих общих шариков. Поскольку следующий ход — второго игрока, первому теперь достаточно лишь симметрично повторять ходы второго. Таким образом, у первого игрока не может улететь шарик, иначе бы симметричный шарик улетел бы у второго ещё на предшествующем ходе.

Допустим обратное: пусть второй игрок своим первым ходом убрал верёвку, имеющую общий шарик с первой убранной верёвкой. Допустим, это шарик B, а убранные верёвки связывали его с шариками A и C. Тогда первому игроку следует убрать верёвку, связывающую шарики C и D. Теперь оставшиеся шарики с верёвками выглядят так:

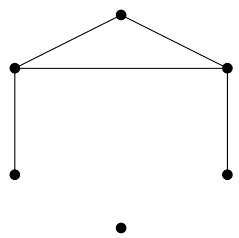


Возможны два варианта дальнейшего развития игры. Если второй игрок убирает одну из двух вертикальных верёвок на картинке, то первый должен убрать вторую. После этого верёвки снова разбиваются на пары симметричных друг другу относительно горизонтальной линии, и можно применить рассуждение из предыдущего случая.

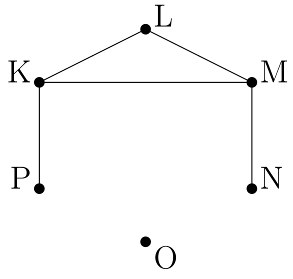
Во втором случае второй игрок убирает любую другую верёвку. Будем рисовать теперь только убранные верёвки. Задачу игроков можно переформулировать так: не допустить ситуацию, когда к одному шарику будут вести пять "верёвок", ведь это будет означать, что шарик на самом деле улетел.



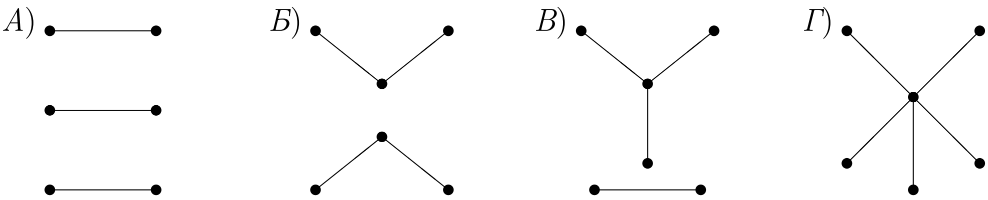
Докажем, что независимо от того, какую именно верёвку убрал второй игрок, первый игрок сможет свести картинку к такой:



Действительно, объединим некоторые верёвки в пары следующим образом:
C-E и B-E;
C-F и B-F;
D-E и B-D;
A-F и A-C;
Без пары остались только верёвки D-F и A-E (и вертикальные, которые мы уже рассматривали). Если второй игрок убирает одну верёвку из пары, первый должен убрать вторую. Если же второй игрок убирает верёвку D-F или A-E, первый должен убрать верёвку B-D или A-C соответственно. Легко проверить, что во всех этих случаях можно, не нарушая связей, переставить шарики и переименовать их так, чтобы образовалась следующая картинка:



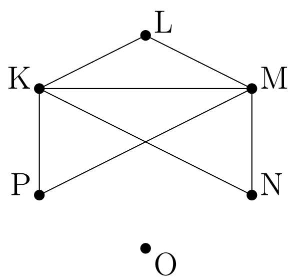
Для дальнейшего нам потребуется следующее рассуждение: рассмотрим все финальные ситуации игры, после которых уже нельзя будет сделать ход. Всего таких ситуаций четыре: когда каждый шарик остаётся привязан к одной верёвке (*А*); когда будет шарик, привязанный к двум верёвкам (*Б*); когда будет шарик, привязанный к трём верёвкам (*В*), и когда будет шарик, привязанный к пяти верёвкам (*Г*). Нетрудно убедиться, что других ситуаций не бывает.



Заметим, что всего на исходном рисунке 15 верёвок. Выигрыш первого игрока означает, что в конечном итоге останется чётное число верёвок (ситуации *Б* и *В*), выигрыш второго — нечётное (*А* и *Г*). Если первый игрок сделает так, что возникновение ситуаций *А* и *Г* будет невозможно, то он выиграет автоматически.

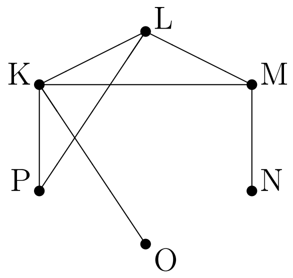
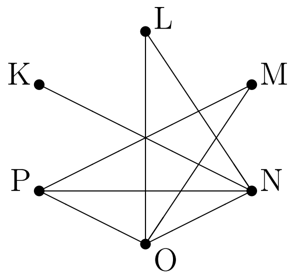
Вернёмся к нашей картинке. Рассмотрим несколько простых случаев.

Первый. Второй игрок убирает верёвку P-M или K-N. Первому игроку следует убрать оставшуюся из этих двух верёвок.

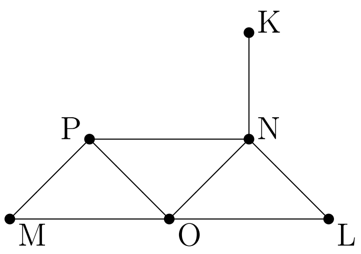


Теперь заметим, что верёвки O-K и O-M нельзя убирать, поскольку иначе шарик K или M улетит. Эти верёвки имеют общий шарик, и, таким образом, второй игрок уже не сможет свести игру к ситуации *А*. Чтобы избежать ситуации *Г*, первому игроку надо всего лишь сделать так, чтобы не осталось шариков, привязанных ко всем пяти верёвкам. Заметим, что после очередного хода второго игрока одну из верёвок O-P, O-L и O-N первый игрок всегда сможет отвязать, и, таким образом, таких шариков не останется.

Второй. Второй игрок убирает верёвку P-L или K-O. Первому игроку следует убрать оставшуюся из двух верёвок. Нарисуем соответствующие картинки для убранных и для оставшихся верёвок:

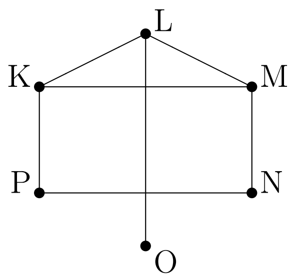
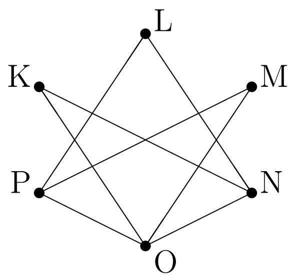
Передвинув шарики на второй картинке, можно получить такую картинку:



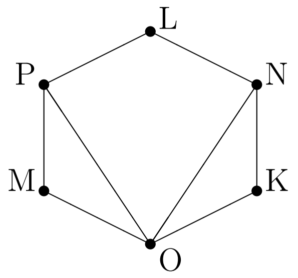
Видно, что ситуация *Г* уже невозможна. Посмотрим, какие три отдельные верёвки могут остаться, если возникнет ситуация *А*. Заметим, что верёвка K-N останется точно. Значит, верёвки P-N, O-N, L-N должны будут быть убраны, а из оставшихся 4-х верёвок единственным образом можно выбрать две, не имеющие общих шариков — это верёвки P-N и O-L. Заметим, что после любого следующего хода второго игрока первый сможет убрать одну из этих двух верёвок, и, таким образом, ситуация *А* тоже будет невозможна.

Третий. Второй игрок убирает верёвку N-L или M-O. Этот случай полностью аналогичен предыдущему с точностью до симметрии.

Четвёртый. Второй игрок убирает верёвку P-N или L-O. Первому игроку следует убрать оставшуюся из двух верёвок. Нарисуем соответствующие картинки для убранных и для оставшихся верёвок:

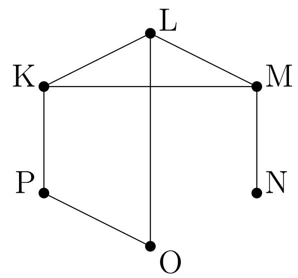
 

Можно также представить вторую картинку нагляднее, передвинув соответствующие вершины так:

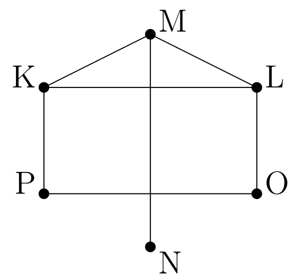


Понятно, что ситуация *Г* уже невозможна. Ситуация *А* может возникнуть только в том случае, если останется одна из двух троек верёвок: P-M, O-K, N-L или L-P, M-O, K-N. Можно рассмотреть два варианта. Если второй игрок убирает верёвку из одной из этих троек, то первый должен убрать верёвку из другой тройки, например, противоположную в шестиугольнике PMOKNL. Таким образом, ситуация *А* будет невозможна. Если же второй игрок убирает одну из двух верёвок O-P или O-N, то первый игрок должен убрать вторую из двух, после чего действовать так же, как в предыдущем варианте.

Пятый. Второй игрок убирает верёвку P-O или N-O. Без ограничения общности будем считать, что это верёвка P-O. Первому игроку следует убрать верёвку O-L.



Однако заметим, что этот случай сводится к предыдущему простым передвижением шариков:



Таким образом, разобраны все случаи. Первый может выиграть независимо от ходов соперника.