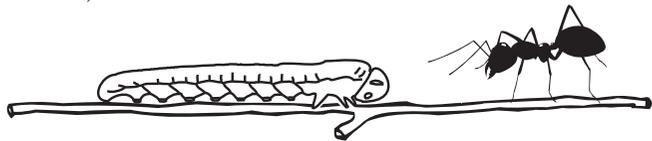


**Конкурс по физике. Ответы и решения. Критерии проверки.**

В скобках после номера задачи указаны классы, которым эта задача рекомендуется. Можно решать и задачи старших классов. Задачи младших классов на оценку не влияют. Ученикам 7 класса и младше достаточно решить одну «свою» задачу, ученикам 8–11 классов — две «своих» задачи.

1. (6–9) Гусеница длиной 10 сантиметров ползёт по веточке со скоростью 1 миллиметр в секунду. Навстречу гусенице по этой веточке бежит муравей, Муравей пробежал по гусенице (которая продолжала ползти, не обращая на него внимания) от начала до конца и затем побегал по веточке дальше.



И по веточке, и по гусенице муравей передвигался со скоростью 1 сантиметр в секунду. Сколько времени потерял муравей из-за того, что ему пришлось перелезть через ползущую навстречу гусеницу, а не просто бежать по неподвижной веточке?

**Решение.** Муравей со скоростью 1 см/с пробежит по гусенице длиной 10 см от начала до конца за 10 с. Гусеница за такое время со скоростью 1 мм/с проползёт расстояние 10 мм = 1 см. В результате после перемещения по гусенице муравей окажется на расстоянии 1 см от того места, где он бы оказался в это же время, если бы он вместо движущейся гусеницы бежал по неподвижной веточке. Так как скорость муравья 1 см/с, отставание на 1 см для него означает потерю времени 1 с.

**Ответ.** 1 секунда.

2. (6–9) Для перевозки тяжёлого груза по железной дороге требуется мощность двигателей электровоза или тепловоза намного больше, чем мощность двигателей корабля, перевозящего этот же груз по воде. Объясните, почему.

**Решение.** Железные дороги практически всегда имеют уклон. Для перевозки груза в гору необходимо затрачивать работу на увеличение потенциальной энергии груза. Эта работа как раз и совершается двигателями тепловоза или электровоза.

Рельеф поверхности водоёмов существенно более пологий. Для перемещения по горизонтальной поверхности водоёма фактически нужно только преодолевать силу сопротивления воды. Эта сила тем меньше, чем меньше скорость. Как известно, большой корабль может сдвинуть с места даже ребёнок (конечно, с небольшой скоростью).

Для плавания по наклонной поверхности воды (например, вверх по течению реки) затрачивать работу на подъём груза также не требуется. Подъём происходит за счёт выталкивающей силы воды (силы Архимеда). В самом деле, если бы корабль, плывя вверх по течению, оставался бы на одной

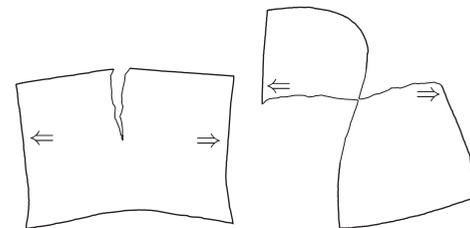
высоте, он оказывался бы погруженным в окружающую воду всё глубже и глубже. Соответственно, с увеличением глубины погружения будет увеличиваться и выталкивающая сила (сила Архимеда), которая вытолкнет корабль на такую высоту (глубину погружения), на которой выталкивающая сила окажется меньше и уравновесится силой тяжести корабля.

Конечно, с совсем маленькой скоростью корабль плавать не может. Во-первых, требуется обеспечить разумное (не слишком большое) время доставки груза. Во-вторых, скорость плавания относительно воды должна быть по крайней мере больше скорости течения (иначе корабль просто не сможет перемещаться в нужном направлении).

Никаких других причин для существенного увеличения скорости корабля нет. Медленно плывущий по широкой реке (а тем более по озеру или морю) корабль никому не мешает. На железной дороге маленькие скорости оказываются неприемлемыми — медленно движущийся грузовой поезд занимает железнодорожный путь и мешает движению других поездов. Поэтому тяжёлые грузы по железной дороге приходится возить с большой скоростью и мощности двигателей электровоза (или тепловоза) также должно хватать и на разгон поезда (то есть увеличение кинетической энергии) за достаточно короткий промежуток времени.

Также отметим, что на корабле вполне могут быть установлены более мощные двигатели, чем на тепловозе или электровозе. Это не противоречит приведённым выше рассуждениям. В условии задачи речь идёт о перевозке *одно и того же груза* по воде и по железной дороге, в то время как грузоподъёмность судна может быть существенно больше, чем возможная загрузка железнодорожного состава. Кроме того, нужно учесть, что один железнодорожный состав могут вести 2 или 3 или даже больше электровозов или тепловозов. Их необходимое количество (то есть суммарная мощность их двигателей) как раз и выбирается исходя из общей массы поезда и того, насколько крутые подъёмы этот поезд должен преодолевать.

3. (7–10) Лист обычной бумаги рвут пополам. Почему, если рвать как показано на рисунке слева, требуется существенно бóльшая сила, чем если делать так, как показано на рисунке справа? Бумагу держат пальцами там, где нарисованы стрелочки, и тянут по направлению стрелочек.



**Решение.** На рисунке справа расстояние между стрелочками (местами, к которым прикладывают силу) равно длине разорванных краёв листа. При разрыве бумаги образуется два края, поэтому длина образовавшегося разрыва при таком способе действий будет в 2 раза меньше расстояния между стрелочками. Если действовать, как на рисунке слева, то оказывается, что длина образующегося разрыва получается в несколько раз больше, чем необходимое для этого увеличение расстояния между стрелочками.

При одном и том же перемещении рук в первом случае длина образующегося разрыва оказывается существенно меньше, чем во втором, поэтому и необходимая для этого сила в первом случае тоже требуется меньше.

Можно считать, что работа, необходимая для разрыва бумаги, в основном затрачивается на разрыв бумажных волокон, и поэтому будет одинаковой независимо от способа разрыва (количество разорванных волокон примерно одно и то же).

Как известно,  $A = Fs$  ( $A$  — работа,  $F$  — сила,  $s$  — перемещение), поэтому при совершении одной и той же работы чем меньше перемещение, тем больше для этого требуется сила.

Возможно, что в первом случае (рисунок справа) бумага будет не только рваться за счёт разрыва волокон, но и «расслаиваться». Но, учитывая существенную разницу в относительном перемещении рук в первом и во втором случае, детали механизма образования разрыва для ответа на вопрос задания не очень существенны.

Для описанной в задаче ситуации можно предложить альтернативное объяснение (фактически описывающее другими словами те же самые физические процессы). В случае, показанном на рисунке слева, часть механических напряжений, приложенных к листу, концентрируется в месте разрыва, а часть «обступает» место разрыва по площади ещё не порванной бумаги (на рисунке — ниже места разрыва), что обеспечивает дополнительную прочность. В ситуации на рисунке справа все механические напряжения проходят через место разрыва, «обогнуть» место разрыва им просто негде. Это как раз хорошо видно из рисунка, для которого удачно для этой цели выбран ракурс. Невидимая на этом рисунке часть листа бумаги расположена перпендикулярно линии приложения разрывающих сил и поэтому не может обеспечить дополнительную прочность.

**4.** (8–11) Водитель автомобиля заметил странный эффект, наблюдаемый во время езды, когда на улице достаточно тепло ( $\approx +25^\circ\text{C}$ ) и идёт дождик.

Если ехать с закрытыми окнами и включённой вентиляцией (воздух забирается с улицы и подаётся вентилятором внутрь автомобиля), то все окна запотевают изнутри. Если для подаваемого вентилятором воздуха включить дополнительный подогрев — стёкла потеть не будут. Если включить охлаждение — стёкла тоже потеть не будут.

Кажется странным, что противоположные действия (нагрев и охлаждение) приводят к одному и тому же результату. Как это можно объяснить?

**Решение.** Из условия задачи понятно, что воздух, подаваемый с улицы в салон автомобиля без нагрева или охлаждения, создаёт в салоне микроклимат с абсолютной влажностью, соответствующей 100% (или более) относительной влажности для температуры внутренней поверхности стёкол автомобиля.

Учитывая, что температура внутренней поверхности стёкол салона автомобиля должна быть немного выше уличной температуры, это может показаться странным. Действительно, если при более высокой температуре

относительная влажность достигает 100%, то она должна была бы достигнуть 100% ещё при уличной температуре, что должно было привести к выпадению из воздуха избыточного содержания воды ещё до попадания в салон автомобиля. Объясняется это кажущееся противоречие тем, что существенным источником паров воды в воздухе салона автомобиля является не только воздух, подаваемый с улицы, но и дыхание водителя (и пассажиров).

Подогрев воздуха, подаваемого с улицы, увеличивает температуру воздуха в салоне и температуру внутренней поверхности оконных стёкол. При такой температуре имеющихся в воздухе салона автомобиля водяных паров оказывается недостаточно для достижения относительной влажности 100%.

Если же для подаваемого с улицы воздуха включить охлаждение, то относительная влажность превышает значение 100% ещё в системе охлаждения, при этом там же часть воды удаляется (в виде жидкости) из подаваемого в салон автомобиля воздуха. В салоне температура этого воздуха немного повышается (за счёт имеющихся в работающем автомобиле источников тепла), вследствие чего снижается относительная влажность. В результате содержание в воздухе салона автомобиля водяных паров оказывается недостаточным для создания 100% относительной влажности на внутренней поверхности оконных стёкол.

**5.** (9–11) В пространстве расположили 8 одинаковых точечных электрических зарядов так, что они находятся в вершинах куба. Каждый заряд привязали непроводящей нерастяжимой нитью к центру этого куба (концы всех нитей от зарядов скреплены в центре куба друг с другом). Получившаяся система зарядов и нитей находится в равновесии. Является ли это равновесие устойчивым?

**Решение.** Докажем, что равновесие неустойчиво. Дополнительно к имеющимся в системе нитям (нити при этом оставим, все заряды также оставим на своих местах) добавим следующие ограничения на перемещения зарядов.

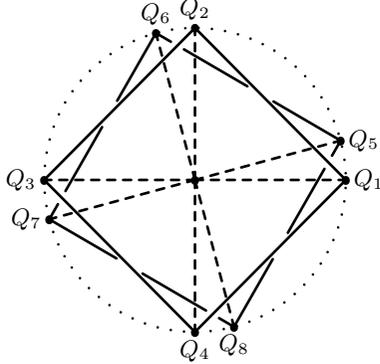
1) Заряды одной из квадратных граней куба (на рисунке это заряды  $Q_5, Q_6, Q_7$  и  $Q_8$ ) скрепим в жёсткую конструкцию — так, что при любых перемещениях эти заряды всегда будут образовывать квадрат исходного размера.

2) Заряды противоположной грани куба (на рисунке это заряды  $Q_1, Q_2, Q_3$  и  $Q_4$ ) также скрепим в жёсткую конструкцию — так, что при любых перемещениях эти заряды также всегда будут образовывать квадрат исходного размера.

3) Разрешим для каждого квадрата с зарядами только поворот квадрата целиком вокруг оси, проходящей через центры этих двух квадратов. Любые другие перемещения зарядов запретим.

Покажем, что равновесие получившейся системы неустойчиво. То есть что если повернуть одну грань относительно другой на небольшой угол (как показано на рисунке), то система будет стремиться увеличить этот угол, а не вернуться в исходное состояние.

Рассмотрим для примера заряд  $Q_5$  и оценим прибыль и убыль (в результате перемещения этого заряда) потенциальной энергии его электростатического взаимодействия с зарядами  $Q_1, Q_2, Q_3$  и  $Q_4$ .



Пусть длина ребра исходного куба равна  $a$ . Введём систему координат. Начало координат расположим в центре грани  $Q_1Q_2Q_3Q_4$ , ось  $Ox$  направим вправо, ось  $Oy$  — вверх (по рисунку), ось  $Oz$  — перпендикулярно плоскости рисунка.

Для угла поворота грани  $Q_5Q_6Q_7Q_8$  относительно грани  $Q_1Q_2Q_3Q_4$  введём обозначение  $\varphi$ . Для радиуса окружности, описанной около грани куба, для удобства записи введём обозначение  $R = a\sqrt{2}/2$ ; соответственно,  $a = \sqrt{2}R$ .

В этих обозначениях координаты  $(x, y, z)$  зарядов будут следующими.

$Q_1$	$(R, 0, 0)$
$Q_2$	$(0, R, 0)$
$Q_3$	$(-R, 0, 0)$
$Q_4$	$(0, -R, 0)$
$Q_5$ (до поворота)	$(R, 0, R\sqrt{2})$
$Q_5$ (после поворота)	$(R \cos \varphi, R \sin \varphi, R\sqrt{2})$

По теореме Пифагора определим расстояния между зарядом  $Q_5$  и зарядами грани  $Q_1Q_2Q_3Q_4$ .

Расстояние  $Q_5-Q_1$  до поворота было равно  $a = \sqrt{2}R$ , после поворота

$$\begin{aligned} & \sqrt{(R - R \cos \varphi)^2 + (R \sin \varphi)^2 + (\sqrt{2}R)^2} = R\sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi + 2} = \\ & = R\sqrt{1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 2} = R\sqrt{4 - 2 \cos \varphi} = 2R\sqrt{1 - \frac{\cos \varphi}{2}} \end{aligned}$$

Расстояние  $Q_5-Q_2$  до поворота было равно  $2R$ , после поворота

$$\begin{aligned} & \sqrt{(R \cos \varphi)^2 + (R - R \sin \varphi)^2 + (\sqrt{2}R)^2} = R\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - \sin \varphi)^2 + 2} = \\ & = R\sqrt{\cos^2 \varphi + 1 - 2 \sin \varphi + \sin^2 \varphi + 2} = R\sqrt{4 - 2 \sin \varphi} = 2R\sqrt{1 - \frac{\sin \varphi}{2}} \end{aligned}$$

Расстояние  $Q_5-Q_4$  до поворота было равно  $2R$ , после поворота

$$\begin{aligned} & \sqrt{(R \cos \varphi)^2 + (-R - R \sin \varphi)^2 + (\sqrt{2}R)^2} = R\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 + \sin \varphi)^2 + 2} = \\ & = R\sqrt{\cos^2 \varphi + 1 + 2 \sin \varphi + \sin^2 \varphi + 2} = R\sqrt{4 + 2 \sin \varphi} = 2R\sqrt{1 + \frac{\sin \varphi}{2}} \end{aligned}$$

Расстояние  $Q_5-Q_3$  до поворота было равно  $\sqrt{3}a = \sqrt{3}\sqrt{2}R = \sqrt{6}R$ , после поворота

$$\begin{aligned} & \sqrt{(-R - R \cos \varphi)^2 + (R \sin \varphi)^2 + (\sqrt{2}R)^2} = R\sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi + 2} = \\ & = R\sqrt{1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 2} = R\sqrt{4 + 2 \cos \varphi} = 2R\sqrt{1 + \frac{\cos \varphi}{2}} \end{aligned}$$

Для изменений в результате поворота энергий электростатического взаимодействия заряда  $Q_5$  с зарядами  $Q_1, Q_2, Q_3$  и  $Q_4$  введём обозначения  $\Delta W_1, \Delta W_2, \Delta W_3$  и  $\Delta W_4$  соответственно.

Заметим, что при маленьких углах  $0 < \varphi \ll 90^\circ$  функция  $\sqrt{1 - \frac{\cos \varphi}{2}}$

убывает быстрее, чем возрастает функция  $\sqrt{1 + \frac{\cos \varphi}{2}}$ . В самом деле, возрастание и убывание происходит из-за изменения значения одного и того же выражения  $\frac{\cos \varphi}{2}$ , но при этом  $0 < \cos \varphi < 1$ , поэтому  $1 - \frac{\cos \varphi}{2} < 1 + \frac{\cos \varphi}{2}$ .

Соответственно, при вычислении квадратного корня  $1 - \frac{\cos \varphi}{2}$  приходится на более «крутой», а  $1 - \frac{\cos \varphi}{2}$  — на более «пологий» участок функции  $f(x) = \sqrt{x}$ . Значит, в результате поворота расстояние между зарядами  $Q_5$  и  $Q_1$  увеличилось на большую величину, чем уменьшилось расстояние между зарядами  $Q_5$  и  $Q_3$ .

Заряд  $Q_1$  создаёт в месте нахождения заряда  $Q_5$  электростатическое поле, в 3 раза большее по напряжённости, чем создаёт там же заряд  $Q_7$  (длина диагонали куба в  $\sqrt{3}$  раз больше длины ребра куба, напряжённость электростатического поля обратно пропорциональна квадрату расстояния)<sup>1</sup>, поэтому  $\frac{-\Delta W_1}{\Delta W_3} > 3$ .

Скорости возрастания и убывания функций  $\sqrt{1 + \frac{\cos \varphi}{2}}$  и  $\sqrt{1 - \frac{\cos \varphi}{2}}$  выбором соответствующего маленького значения угла  $0 < \varphi \ll 90^\circ$  можно

<sup>1</sup>Речь идёт о перемещениях заряда  $Q_5$  существенно меньших, чем расстояния до других зарядов. Поэтому можно считать, что напряжённость электростатического поля на таких маленьких расстояниях не меняется.

Поскольку энергия электростатического взаимодействия между двумя зарядами обратно пропорциональна расстоянию между этими зарядами, для более строгого (но избыточного в нашей задаче) рассмотрения можно исследовать поведение не функций расстояний в зависимости от  $\varphi$ , а обратных им величин.

сделать сколь угодно близкими друг другу. Возрастание и убывание происходит из-за изменения значения одного и того же выражения  $\frac{\sin \varphi}{2}$ , равного 0 при  $\varphi = 0$  и близкого к нулю при маленьких углах  $\varphi$ . Поэтому скорости и возрастания, и убывания будут обусловлены поведением функции  $f(x) = \sqrt{x}$  при  $x$ , близких к 1. В данном случае речь идёт об удалении и приближении заряда  $Q_5$  к зарядам  $Q_4$  и  $Q_2$  соответственно, изначально расположенным на одинаковом расстоянии от заряда  $Q_5$ . Таким образом, выбором достаточно маленького значения угла поворота  $\varphi > 0$  сумму  $\Delta W_1 + \Delta W_4$  можно сделать сколь угодно близкой к 0, а отношение  $\frac{-\Delta W_4}{\Delta W_2}$  сколь угодно близким к 1.

Учитывая ранее полученные неравенства  $\Delta W_1 < 0$  и  $\frac{-\Delta W_1}{\Delta W_3} > 3$ , получаем, что для достаточно маленьких углов  $\varphi > 0$  выполняется соотношение

$$\Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \Delta W_4 < 0$$

Расстояние от заряда  $Q_5$  до зарядов  $Q_6$ ,  $Q_7$  и  $Q_8$  при этом не изменялось, соответственно, не изменялась и энергия взаимодействия. То есть при описанном выше повороте на любой достаточно малый угол  $\varphi > 0$  потенциальная энергия заряда  $Q_5$  уменьшается.

По аналогичным причинам на такие же величины уменьшатся потенциальные энергии зарядов  $Q_6$ ,  $Q_7$  и  $Q_8$ . Иных энергетических изменений в системе не произойдёт, так как остальные расстояния между зарядами не менялись.

Таким образом, при выполнении поворота на любой достаточно малый угол  $\varphi > 0$  потенциальная энергия всей системы уменьшается, поэтому положение системы при  $\varphi = 0$  не является положением устойчивого равновесия.

Теперь снимем ограничения 1), 2) и 3), дополнительно наложенные на перемещения зарядов системы в начале решения задачи. От снятия ограничений и появления дополнительных степеней свободы статическое механическое равновесие не может стать более устойчивым. Поэтому равновесие исходной системы зарядов также не является устойчивым.

В решении для наглядности мы достаточно подробно провели математические выкладки, поясняющие качественные рассуждения, а также для этой цели выбрали способ решения, удобный для наглядного математического описания.

Разумеется, такое решение не является единственно возможным.

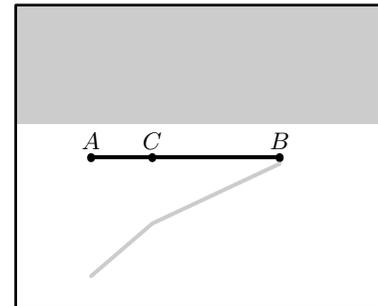
**Ответ.** Равновесие не является устойчивым.

**6. (9–11)** Тонкую прямую непрозрачную палочку поместили в сосуд с водой: часть палочки находится под водой, а часть — над водой. Известно, что если смотреть на палочку сбоку, кажется, что она «переламывается» на поверхности воды. А будет ли «переламываться» тень от палочки, наблюдаемая на дне сосуда?

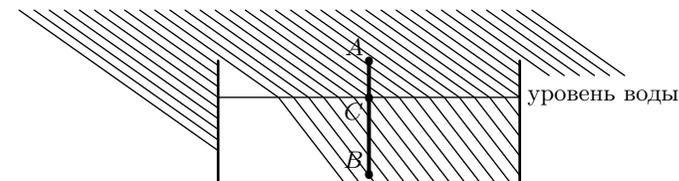
Наблюдатель и источник света, благодаря которому возникает тень, расположены выше поверхности воды. Дно сосуда плоское и расположено параллельно поверхности воды.

**Решение.** Будем освещать поверхность воды пучком параллельных световых лучей. Непрозрачную палочку расположим наклонно к поверхности воды и перпендикулярно падающим световым лучам. Введём обозначения:  $A$  — конец палочки, находящийся над поверхностью воды,  $B$  — конец палочки, находящийся под поверхностью воды,  $C$  — пересечения палочки с поверхностью воды.

На рисунке показан вид получившейся оптической системы сверху. Серым цветом показаны тени от палочки и от бортика сосуда.



На следующем рисунке показан вид сбоку (слева относительно первого рисунка) в том же масштабе. Тонкой горизонтальной линией показана поверхность воды, тонкими наклонными линиями — световые лучи, проведённые через равные интервалы.



Наличие «перелома» тени видно из рисунков, все геометрические размеры которых получены в результате геометрических и оптических расчётов.

Но получить ответ можно и без точных построений и вычислений. Для этого можно схематично нарисовать рисунок, аналогичный приведённому виду сбоку. Будем мысленно перемещать вдоль палочки от одного конца к другому с постоянной скоростью воображаемую точку и следить за «тенью» этой точки.

Проекция скорости тени на направление перпендикулярное плоскости рисунка, очевидно, будет всё время постоянной, так как световые лучи в этом направлении вообще не преломляются. Проекция скорости тени на горизонтальное (по рисунку) направление будет разной для участков  $AC$  и  $CB$ . Действительно, на участке  $AC$  наша воображаемая точка будет «встречать» световые лучи чаще, чем на участке  $CB$ . Но при этом все показанные

на рисунке световые лучи «утыкаются» в дно сосуда через равные расстояния. Поэтому чем чаще эти световые лучи пересекает объект, тем больше соответствующая проекция скорости тени объекта.

Сохранение проекции скорости на одно из направлений и изменение проекции скорости на другое направление возможно только при изменении направления движения, что в нашем случае и означает «перелом» тени.

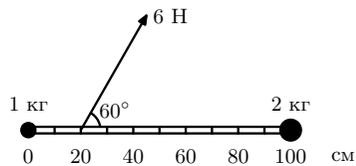
Мы для простоты рассмотрели освещение параллельным пучком световых лучей. Для точечного источника освещения решение будет аналогичным. В самом деле, фактически нас интересует поведение тени только в одной точке «перелома». Луч света, исходящий от точечного источника и проходящий (после преломления) через нужную нам точку, а также близкие к нему по направлению лучи, выходящие из того же источника, в нашем решении можно считать пучком параллельных лучей.

Заметим, что для экспериментального наблюдения описанного в задаче эффекта требуется некоторая аккуратность, чтобы сделать эффект заметным. В частности, необходимо обеспечить достаточно маленький угол между направлением падающего освещения и поверхностью воды. Иначе угол «перелома» тени от палочки окажется очень маленьким, и наблюдателю может показаться, что «перелом» тени вообще отсутствует. Учитывая, что наблюдаемый угол «перелома» самой палочки в месте пересечения поверхности воды достаточно заметен, из наблюдений легко сделать ошибочный вывод об отсутствии «перелома» тени. Наблюдение такой оптической иллюзии и послужило поводом для составления задачи.

Также заметим, что «перелом» тени наблюдаться не будет, если падающие на палочку световые лучи и сама палочка будут лежать в одной вертикальной плоскости. В этом случае такая плоскость окажется плоскостью симметрии оптической системы, что делает невозможным отклонение тени ни в одну, ни в другую сторону от этой плоскости.

**Ответ.** Наблюдаемая на дне сосуда тень от палочки будет «переламываться» (кроме случаев, когда сама палочка и световой луч, освещающий точку пересечения палочкой поверхности воды, располагаются в одной и той же вертикальной плоскости).

**7.** (9–11) К концам жёсткой лёгкой линейки длиной 1 м прикреплены две маленькие по размерам гири с массами 2 кг и 1 кг. Положение гири массой 1 кг соответствует делению «0 см» на линейке. Линейка с грузами покоится на гладкой горизонтальной поверхности. К точке линейки, соответствующей делению «20 см», приложили горизонтальную силу 6 Н в направлении, составляющем угол  $60^\circ$  с линейкой. Найдите величину ускорения гири массой 1 кг в этот момент.



**Решение.** Разложим приложенную силу 6 Н на составляющие вдоль линейки и перпендикулярно линейке.

Проекция приложенной силы на направление вдоль линейки составляет  $F_x = 6 \text{ Н} \cdot \cos 60^\circ = 6 \text{ Н} \cdot 1/2 = 3 \text{ Н}$ . Поскольку линейка жёсткая и не

может менять свою длину, оба груза (гири) имеют одинаковые проекции ускорения вдоль направления линейки. Суммарная масса грузов составляет  $M = 3 \text{ кг}$ , проекция их ускорения на направление вдоль линейки равна  $a_x = F_x/M = 3 \text{ Н}/3 \text{ кг} = 1 \text{ м/с}^2$ .

Проекция приложенной силы на направление поперёк линейки составляет  $F_y = 6 \text{ Н} \cdot \sin 60^\circ = 6 \text{ Н} \cdot \sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3} \text{ Н}$ . Линейка лёгкая, поэтому с каким бы линейным ускорением она ни двигалась и с каким бы угловым ускорением она ни двигалась, сумма всех сил, действующих на неё, равна нулю, и сумма всех моментов сил, действующих на неё, тоже равна нулю. Поперечная к линейке составляющая силы, с которой на неё действует груз 1 кг, равна по величине  $0,8 \cdot 3\sqrt{3} \text{ Н}$ , а поперечная составляющая силы, с которой на линейку действует груз массой 2 кг, равна  $0,2 \cdot 3\sqrt{3} \text{ Н}$ . По третьему закону Ньютона линейка действует на грузы с такими же, но противоположно направленными силами. Проекция ускорения груза массы 1 кг на направление поперёк линейки  $a_y = 0,8 \cdot 3\sqrt{3} \text{ Н}/1 \text{ кг} = 2,4\sqrt{3} \text{ м/с}^2$ .

Полное ускорение груза массы 1 кг

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = \sqrt{1^2 + (2,4\sqrt{3})^2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \sqrt{18,28} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx 4,28 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

**8.** (10–11) В баллоне ёмкостью 1 литр находится азот. Азот из баллона медленно выпускают, всё время поддерживая температуру баллона постоянной. Когда в баллоне оставалось 1 моль азота, давление внутри баллона было равно атмосферному ( $10^5 \text{ Па}$ ). Чему будет равно давление в баллоне, когда в нём останется 0,5 моль азота?

**Решение.** Выясним, в каком состоянии азот находится в баллоне. Предположим, что в газообразном. Как известно из школьной программы, 1 моль идеального газа при нормальных условиях (температуре 300 К и атмосферном давлении) занимает объём 22,4 л. Для получения объёма 1 л (то есть в 22,4 раза меньше) при том же давлении необходимо понизить температуру в 22,4 раза. Температура  $300 \text{ К}/22,4 \approx 13,39 \text{ К} = (13,39 - 273,15)^\circ \text{С} = -259,76^\circ \text{С}$  явно меньше температуры кипения азота при атмосферном давлении. (Точное значение температуры кипения азота при атмосферном давлении ( $77,4 \text{ К} = -195,75^\circ \text{С}$ ) помнить не обязательно — полученное в ходе решения задачи значение оказывается меньше с большим запасом).

Аналогично, если предположить, что весь азот находится в газообразном состоянии (является идеальным газом) во втором случае (когда в баллоне находится 0,5 моль азота), необходимая для этого температура должна быть  $300 \text{ К}/(0,5 \cdot 22,4) \approx 26,79 \text{ К} = (26,79 - 273,15)^\circ \text{С} = -246,36^\circ \text{С}$ .

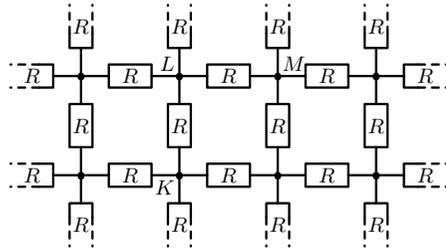
То есть фактически в обоих случаях в баллоне часть азота находится в жидком состоянии при температуре кипения, а часть — в газообразном. При удалении из баллона 0,5 моль азота жидкий азот испарялся, превращаясь в газообразный. Поддерживаемая постоянной температура баллона соответствует температуре кипения азота при атмосферном давлении. Соответственно, во втором случае давление будет таким же, как и в первом:  $10^5 \text{ Па}$ .

Практическая реализация такого эксперимента не представляет сложности. Для поддержания нужной температуры в баллоне достаточно поливать его снаружи кипящим жидким азотом при атмосферном давлении.

Отметим, что для решения задачи нам фактически было важно только установить, что во время всего процесса весь азот в баллоне не может находиться в газообразном состоянии. Поэтому увеличение объёма азота происходит за счёт фазового перехода. При этом если мы поддерживаем (по условию задачи) постоянную температуру фазового перехода, то и давление также меняться не будет.

**Ответ.**  $10^5$  Па.

**9.** (10–11) Из резисторов сопротивлением  $R$  собрана плоская квадратная решётка, бесконечная во все стороны. В такой схеме электрическое сопротивление между узлами  $K$  и  $L$  равно  $R/2$ , а электрическое сопротивление между узлами  $K$  и  $M$  равно  $2R/\pi$ . Выберите в такой схеме любые 2 различных узла, сопротивление между которыми не равно  $R/2$  или  $2R/\pi$ , укажите взаимное расположение этих узлов и найдите сопротивление между ними.



**Решение.** Выберем какой-нибудь узел решётки и будем считать его координаты равными  $(0, 0)$ . Координатами остальных узлов  $(x, y)$  будем считать количество узлов, на которое нужно «отступить» на схеме от выбранного узла по горизонтали ( $x$ ) и вертикали ( $y$ ) соответственно.

Потенциал узла  $(x, y)$  будем обозначать  $U_{i,j}$ . Примем, что  $U_{0,0} = 0$ .

Электрическое сопротивление между узлом  $(0, 0)$  и любым другим узлом  $(i, j)$  будем обозначать  $R_{i,j}$ .

Обозначение  $R$  (без индексов) по-прежнему будем использовать для сопротивления всех резисторов схемы в соответствии с условием задачи.

Докажем, например, что

$$R_{2,1} = 2R_{1,1} - R_{1,0}$$

Доказав это и воспользовавшись данными из условия  $R_{1,0} = R/2$  и  $R_{1,1} = 2R/\pi$ , мы сможем найти  $R_{2,1}$  и тем самым выполнить предложенное задание.

Пусть в узел  $(0, 0)$  втекает извне ток  $I \neq 0$  и далее «растекается» по нашей схеме на бесконечность. Тогда для любого узла  $(i, j)$  выполняется соотношение

$$R_{i,j} = 2U_{i,j}/I.$$

В самом деле, рассмотрим другую ситуацию с нашей схемой: из узла  $(i, j)$  вытекает вон ток  $I$ , «собирающийся» с бесконечности. Эта ситуация аналогична предыдущей и отличается только выбором узла, направлениями

тока и величиной потенциалов относительно бесконечности. Наложив обе описанные ситуации на нашу схему (пользуясь принципом суперпозиции), мы получим, что «растекающиеся на бесконечность» и «стекающиеся с бесконечности» токи взаимно скомпенсируются<sup>2</sup>, по схеме из узла  $(0, 0)$  в узел  $(i, j)$  течёт результирующий ток  $I$ , а потенциалы узлов  $(0, 0)$  и  $(i, j)$  отличаются от потенциала бесконечности на величины  $+U_{i,j}$  и  $-U_{i,j}$  соответственно, то есть разность потенциалов равна  $2U_{i,j}$ . Тогда по закону Ома  $I = 2U_{i,j}/R_{i,j}$ .

Заметим также, что в нашей схеме потенциал любого узла  $(i, j)$  (за исключением узла  $(0, 0)$ ) равен среднему арифметическому потенциалов четырёх соседних узлов, с которыми данный узел непосредственно соединён резисторами:

$$U_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{4}$$

В самом деле, пусть из этого узла через резисторы, соединяющие этот узел с узлами  $(i+1, j)$ ,  $(i-1, j)$ ,  $(i, j+1)$  и  $(i, j-1)$ , текут токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  и  $I_4$  соответственно, тогда

$$U_{i+1,j} - U_{i,j} = RI_1$$

$$U_{i-1,j} - U_{i,j} = RI_2$$

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = RI_3$$

$$U_{i,j-1} - U_{i,j} = RI_4$$

Суммируя эти выражения, получим

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j} = R(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) = R \cdot 0 = 0$$

Воспользовавшись ранее полученной формулой  $R_{i,j} = 2U_{i,j}/I$ , получаем

$$R_{i+1,j} + R_{i-1,j} + R_{i,j+1} + R_{i,j-1} - 4R_{i,j} = 0$$

В частности, для  $i = 1$  и  $j = 1$  получаем:

$$R_{2,1} + R_{0,1} + R_{1,2} + R_{1,0} - 4R_{1,1} = 0$$

Ввиду симметрии  $R_{1,2} = R_{2,1}$  и  $R_{1,0} = R_{0,1}$ , откуда

$$2R_{2,1} + 2R_{1,0} - 4R_{1,1} = 0$$

то есть

$$R_{2,1} = 2R_{1,1} - R_{1,0}$$

Подставляя из условия значения  $R_{1,0} = R/2$  и  $R_{1,1} = 2R/\pi$ , получаем

$$R_{2,1} = 2 \frac{2R}{\pi} - \frac{R}{2} = \left( \frac{4}{\pi} - \frac{1}{2} \right) R$$

<sup>2</sup>Нужно признать, что данное утверждение поясняет суть дела, но не является абсолютно строгим математически. Математически строгое описание ситуации с компенсацией токов на бесконечности требует дополнительных пояснений.