XXXV Турнир имени М. В. Ломоносова 30 сентября 2012 года

Конкурс по математике. Ответы и решения

(предварительная версия от 15.10.2012)

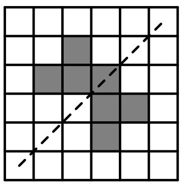
В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решать задачи более старших классов также разрешается, решение задач более младших классов при подведении итогов не учитывается).

1. (6–7) Мартышка, Осёл и Козёл затеяли сыграть трио. Уселись чинно в ряд, Мартышка справа. Ударили в смычки, дерут, а толку нет. Поменялись местами, при этом Осёл оказался в центре. А трио всё нейдёт на лад. Пересели ещё раз. При этом оказалось, что каждый из трёх «музыкантов» успел посидеть и слева, и справа, и в центре. Кто где сидел на третий раз?

Ответ. Слева направо: Козёл, Мартышка, Осёл.

Решение. Сперва Мартышка сидит справа, потом — не справа и не в центре (там Осёл), т. е. слева, в конце — не справа и не слева — значит, в центре. Сперва Осёл сидит не справа (там Мартышка) и не в центре (он там сядет потом), т.е. слева, потом — в центре, в конце — справа. Козлу остаётся последовательно центр, справа, слева.

2. (6–8) На клетчатом листе бумаги было закрашено несколько клеток так, что получившаяся фигура не имела осей симметрии. Ваня закрасил ещё одну клетку. Могло ли у получившейся фигуры оказаться 4 оси симметрии?



(Пример фигуры с одной осью симметрии приведён на рисунке, ось симметрии показана пунктиром.)

Ответ. Могло — см. рис. ниже.

Комментарий. Чтобы построить пример, нужно взять какую-нибудь фигуру с 4 осями симметрии и выкинуть из нее клетку, не лежащую ни на одной из этих осей.

Например, 4 оси симметрии имеет квадрат: две диагонали и две прямые, проходящие через середины противоположных сторон. Так получается ответ, приведенный ниже в центре. Есть и другие (например, еще один приведен ниже справа).

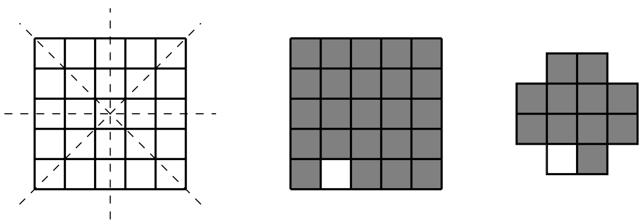


Рис. 1: к задаче 2.

3. (6–8) Кое-кто в классе смотрит футбол, кое-кто — мультики, но нет таких, кто не смотрит ни то, ни другое. У любителей мультиков средний балл по математике меньше 4, у любителей футбола — тоже меньше 4. Может ли средний балл всего класса по математике быть больше 4? (Среднее нескольких чисел — это сумма этих чисел, делённая на их количество.)

Ответ. Может.

Решение. Например, пусть есть две человека, которые имеют по математике 5 и смотрят только мультфильмы, три человека, у которых по математике 3, а смотрят они и то и другое, и, наконец, еще два человека, у которых по математике тоже 5, но смотрят они только футбол).

Тогда средний балл любой из двух групп равен

$$(5 \cdot 2 + 3 \cdot 3) : 5 = 3\frac{4}{5} < 4,$$

но общий средний балл равен

$$(5 \cdot 4 + 3 \cdot 3) : 7 = 4\frac{1}{7} > 4.$$

Комментарий. Естественно, если нет людей, смотрящих и футбол, и мультфильмы, то средний балл всего класса будет меньше 4.

4. (7–11) Говорящие весы произносят вес, округлив его до целого числа килограммов (по правилам округления: если дробная часть меньше 0,5, то число округляется вниз, а иначе — вверх; например, 3,5 округляется до 4). Вася утверждает, что, взвешиваясь на этих весах с одинаковыми бутылками, он получил такие ответы весов:

На весах:	Вася и 5 бутылок	Вася и 10 бутылок	Вася и 14 бутылок
Ответ весов:	«22 килограмма»	«25 килограмм»	«28 килограмм»

Могло ли такое быть? Если да, приведите пример подходящих для этого значений веса Васи и веса одной бутылки.

Ответ. Да. Например, если Вася весит 18 кг, а бутылка — не меньше 700, но меньше 750 г.

Комментарий. Пусть Вася весит x кг, а бутылка — y кг. Условие состоит в том, что

$$\begin{cases} 21{,}5 \leqslant x + 5y < 22{,}5; \\ 24{,}5 \leqslant x + 10y < 25{,}5; \\ 27{,}5 \leqslant x + 14y < 28{,}5. \end{cases}$$

Если подставить в эту систему, например, $x = 18$, то на y получится условие $0{,}7 \leqslant y < 0{,}75$, что соответствует ответу выше. Подходят и другие веса — все они изображены на рисунке ниже.

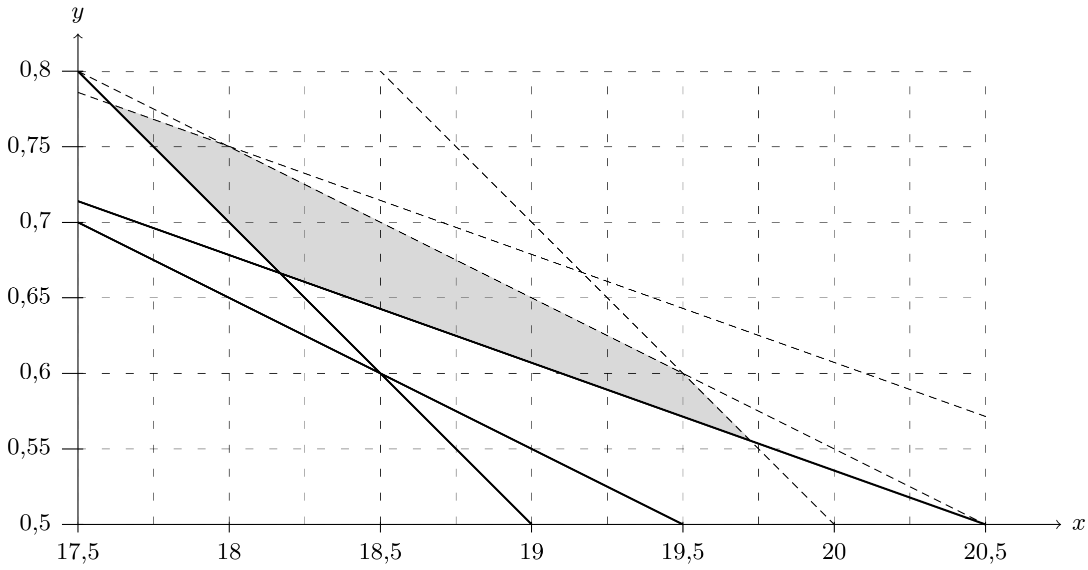
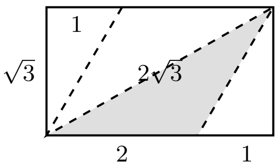


Рис. 2: к задаче 4.

5. (8–11) Равнобедренный треугольник с углом 120° сложен ровно из трёх слоёв бумаги. Треугольник развернули — и получился прямоугольник. Нарисуйте такой прямоугольник и покажите пунктиром линии сгиба.

Ответ. 

6. (9–11) В каждой клетке клетчатого квадрата 7×7 стоит по числу. Сумма чисел в каждом квадратике 2×2 и 3×3 равна 0. Докажите, что сумма чисел в 24 клетках, расположенных по периметру квадрата, тоже равна 0.

Решение. Так как равна нулю сумма и в квадратике 3×3, и во входящем него квадрате 2×2, равна нулю и сумма в остающемся уголке из 5 клеток.

Но по аналогичной причине равна нулю сумма чисел в уголке из 7 клеток, получающемся выкидыванием из квадрата 4×4 (т. е. 4 квадратов 2×2) квадрата 3×3.

Осталось заметить, что из уголков двух таких видов легко составить рамку квадрата 7×7.

Второе решение. Из 2 квадратов 3×3 можно составить прямоугольник 3×6, а из трех квадратов 2×2 — прямоугольник 2×6. Поэтому сумма чисел в любом прямоугольнике 1×6 равна нулю.

Осталось заметить, что из четырех прямоугольников 1×6 можно составить рамку квадрата 7×7.

Комментарий. Может возникнуть подозрение, что из условия задачи следует, что вообще все числа таблицы должны быть равны 0. Развеять его поможет пример ниже.

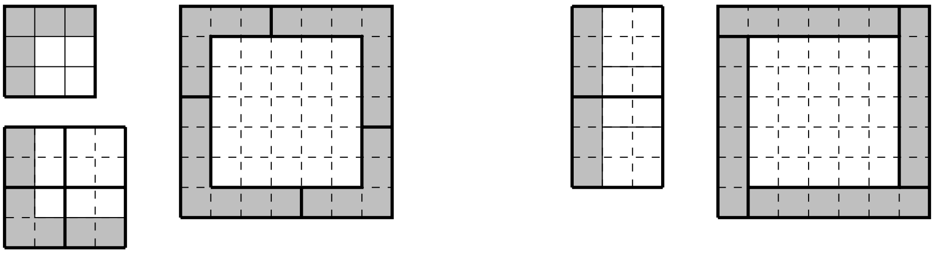


Рис. 3: к задаче 6.

1	−1	1	−1	1	−1	1
2	−2	2	−2	2	−2	2
−3	3	−3	3	−3	3	−3
1	−1	1	−1	1	−1	1
2	−2	2	−2	2	−2	2
−3	3	−3	3	−3	3	−3
1	−1	1	−1	1	−1	1

Рис. 4: к задаче 6.

7. (9–10) Верно ли, что в вершинах любого треугольника можно расставить положительные числа так, чтобы сумма чисел в концах каждой стороны треугольника равнялась длине этой стороны?

Решение. Нетрудно проверить, что в вершинах можно поставить числа $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{b+c-a}{2}$ и $\frac{c+a-b}{2}$ (они положительны в силу неравенства треугольника).

Второе решение. Можно решить задачу и геометрически. Впишем в треугольник окружность. Отрезки, примыкающие к одной вершине, равны (как касательные, проведенные к данной окружности из данной точки). Поставим в каждую вершину длину соответствующего отрезка. Поскольку каждая сторона составлена из двух таких отрезка, условие задачи выполнено.

Отметим, что длины этих отрезков — это как раз числа из предыдущего решения.

8. (11) Докажите, что можно на каждом ребре произвольного тетраэдра записать по неотрицательному числу так, чтобы сумма чисел на сторонах каждой грани численно равнялась её площади.

Решение. Прочитав второе решение задачи 7, можно догадаться и как решать задачу 8. Впишем в тетраэдр сферу и рассмотрим все треугольники, образованные какой-то парой вершин тетраэдра и точкой касания сферы с гранью, содержащей эти вершины. К каждому ребру тетраэдра примыкает по два таких треугольника. Они равны по трем сторонам — а значит, равновелики.

Напишем на каждом ребре площадь примыкающего к нему треугольника. Сумма чисел на сторонах грани — это сумма площадей трех треугольников, на которые эта грань разбивается, т. е. как раз площадь грани.

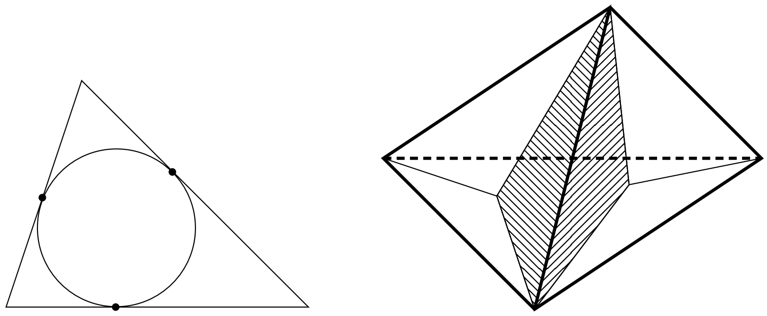


Рис. 5: к задачам 7 и 8.

Второе решение. Пусть площадь наименьшей грани равна s. Напишем на стороне, общей для наименьшей и наибольшей граней число s, а на остальных двух ребрах наименьшей грани — по нулю. Тогда на оставшихся трех ребрах всегда можно расставить неотрицательные числа требуемым образом.

Действительно, пусть площадь набольшей грани равна S, а площади двух оставшихся граней — a и b. На одно ребре наибольшей грани уже написано число s. Напишем на двух других $\frac{1}{2}(S-b+a-s)$ и $\frac{1}{2}(S-a+b-s)$ (каждое из них неотрицательно как сумма двух неотрицательных чисел). Наконец, на единственном пока еще пустом ребре напишем число $\frac{1}{2}(a+b+s-S)$ (это число неотрицательно, так как проекции трех граней покрывают четвертую, а площадь грани не меньше площади ее проекции на другую грань).

Нетрудно проверить, что условие задачи выполнено:

$$
\begin{aligned}
s &= s+0+0;\\
S &= s+\frac{1}{2}(S-b+a-s)+\frac{1}{2}(S-a+b-s);\\
a &= 0+\frac{1}{2}(S-b+a-s)+\frac{1}{2}(a+b+s-S);\\
b &= 0+\frac{1}{2}(S-a+b-s)+\frac{1}{2}(a+b+s-S).
\end{aligned}
$$

Вариант подготовили: Т. И. Голенищева–Кутузова, Т. В. Караваева, Г. А. Мерзон, И. В. Раскина, А. Л. Семенов, Б. Р. Френкин, А. В. Шаповалов, И. В. Ященко.