

**Конкурс по математическим играм**

Выберите игру, которая вас больше заинтересовала, и попробуйте придумать для одного из игроков (первого или второго) стратегию, гарантирующую ему победу независимо от ходов соперника. Постарайтесь не только указать, как следует ходить, но и объяснить, почему при этом неизбежен выигрыш. Ответ без пояснений не учитывается.

Не пытайтесь решить все задания, сохраните время и силы для других конкурсов. Хороший анализ даже только одной игры позволит считать ваше участие в конкурсе успешным.

**1. «Полоска из прямоугольника».** Дан бумажный прямоугольник  $m \times n$  клеточек ( $n > 1$  и  $m > 1$ ). Первый игрок разрезает прямоугольник на два прямоугольника по линии сетки. Второй делает то же с одним из получившихся прямоугольников, затем снова ходит первый (выбирает любой имеющийся в данный момент прямоугольник и разрезает его на два прямоугольника по линии сетки) и так далее. Побеждает тот, кто после своего хода из всех получившихся частей может сложить полоску шириной в 1 клетку. Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр? Рассмотрите случаи:

- а) Среди чисел  $n$  и  $m$  есть хотя бы одно чётное;
- б) Числа  $n$  и  $m$  нечётные.

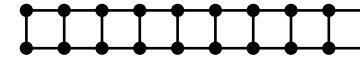
**2. «Чеканка монет».** В одном королевстве два казначея по очереди чеканят монеты. Каждым ходом казначей чеканит монету номиналом в  $N$  золотых ( $N$  — натуральное число), то есть вводит в обращение большее число таких монет. Изначально никаких монет нет. Очередным ходом разрешается чеканить монету только такого номинала, который нельзя набрать уже имеющимися в обращении монетами. Проигрывает тот, кому приходится выпускать монету номиналом 1 золотой.

- а) Докажите, что если первый казначей первым ходом отчеканит монету в 2 или 3 золотых, то он проигрывает.
- б) Выгодно ли первому казначею начинать с чеканки монеты 4 золотых?
- в) Выгодно ли первому казначею начинать с чеканки монеты 6 золотых?
- г) Первый казначей выпустил монету в 5 золотых, а второй — в 6 золотых. Как теперь первый может выиграть?
- д) Пусть первый казначей выпустил монету в 5 золотых, а второй — в  $k$  золотых. Докажите, что теперь первый может отчеканить монету в  $4k - 5$  золотых и не может никакую большего номинала.
- е) Докажите, что первый казначей выигрывает, начиная с монеты в 5 золотых. (Указание. Пусть второй ответил монетой в  $k$  золотых, а первый выпустил монету в  $4k - 5$  золотых. Если он при этом побеждает, то задача решена. Если же второй казначей может победить, отчеканив в ответ монету в  $m$  золотых, значит, чеканить  $4k - 5$  со стороны первого было опрометчивым ходом. А как следовало поступить?)

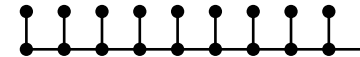
**3. «Колонизаторы».** На карте точками отмечены города, некоторые соединены дорогами. Играют двое. За ход каждый игрок захватывает один город, который не был никем захвачен ранее. Нельзя захватывать город, соединённый дорогой с городом противника. Проигрывает тот, кто не сможет сделать свой ход по правилам игры.

Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр?

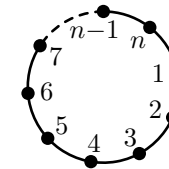
- а) Рассмотрите карту с 20-ю городами, показанную на рисунке:



- б) Рассмотрите карту с 20-ю городами, показанную на рисунке:

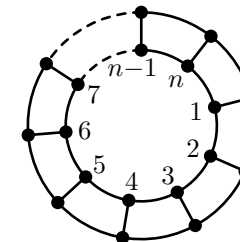


- в) Пусть  $n$  городов расположены в виде кольца, как показано на рисунке:



Кто — начинающий или его соперник — победит в зависимости от  $n$ ?

- г) Пусть  $2n$  городов расположены в виде двойного кольца, как показано на рисунке:



Кто — начинающий или его соперник — победит в зависимости от  $n$ ?

---

Не забудьте **подписать** свою работу (указать номер карточки, фамилию, имя, школу, класс) и **сдать** её. Сдавать листок с условиями не нужно. Закрытие Турнира в Москве и Московском регионе, вручение грамот и призов запланировано на воскресенье 23 декабря 2012 года во втором гуманитарном корпусе МГУ. Условия задач, результаты участников (после 20 ноября) и решения будут опубликованы в Internet по адресу <http://www.mccme.ru/olympiads/turlom/2012/> Тел. 499-241-12-37.