7 класс

1. В наборе из 10 гирек любые четыре гирьки перевешивают любые три из оставшихся. Верно ли, что любые три гирьки из этого набора перевешивают любые две из оставшихся семи?

ОТВЕТ: Да. Если бы некоторые две гирьки весили вместе не меньше, чем некоторые три другие, можно было бы выбрать из остальных пяти гирек две, первая из которых весит не меньше, чем вторая. Добавив первую к двум гирькам, а вторую — к трём, получим три гирьки, перевешивающие четыре другие гирьки.

2. Существуют ли такие цифры Г и У, что число УГУ делится на 13, а число ГУГ — не делится?

ОТВЕТ: Нет, поскольку ГУГ − УГУ = 100Г + 10У + Г − (100У + 10Г + У) = 91Г − 91У делится на 13.

3. Можно ли так расположить на плоскости четыре прямоугольника, чтобы ни одна вершина не была общей для всех прямоугольников, но у любых двух прямоугольников была одна общая вершина? (Прямоугольники могут пересекаться.)

ОТВЕТ: Да, можно.

4. Вовочка пришёл сдавать компьютерный тест. На экране появились 6 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». После ответа на все вопросы компьютер вычисляет количество правильных ответов и ставит: двойку, если правильных ответов не более двух; тройку — если их три; четвёрку — если четыре; пятёрку — если пять или шесть.

Вовочка не знал ответа ни на один из вопросов. Тем не менее, по предыдущему опыту он знал следующее: первый и последний вопросы требуют противоположных ответов; не бывает, что на три подряд вопроса ответ один и тот же; не бывает, что утвердительные и отрицательные ответы строго чередуются; последовательность ответов на первые три вопроса не бывает в точности такой же, как последовательность ответов на последние три вопроса.

Помогите Вовочке не получить двойку.

ОТВЕТ: Возможны лишь следующие варианты: 001011, 001101, 010011, 011001, 101100, 100110, 110010, 110100. (Здесь 0 — «нет», а 1 — «да».)

(Несложно доказать также, что обязательно найдутся три ответа “да”.)

Достаточно ответить «да, да, да, да, да, да», и в любом случае Вовочка получит тройку. Ту же оценку он получит, если на все вопросы ответит «нет».

5. Какое наибольшее количество ладей может стоять на шахматной доске, если половина из них белые, половина — чёрные, при этом никакая белая ладья не бьёт никакую чёрную?

ОТВЕТ: 32 ладьи. Можно расставить 16 белых ладей в первые четыре вертикали и нижние четыре горизонтали, а 16 чёрных — в последние четыре вертикали и верхние четыре горизонтали. Оценка доказывается, например, так: посчитаем число горизонталей и вертикалей, которые занимают белые ладьи. Если их (в сумме) не больше 8, то ладей не больше 16. (1x7, 2x6, 3x5, 4x4) А если больше, то черные ладьи занимают меньше горизонталей и вертикалей.

6. Некоторые числа представимы в виде суммы $\overline{abc} + \overline{ab} + a$, а некоторые — нет. (Например, число 1101 представимо, поскольку $1101 = 993 + 99 + 9$. А числа 220 и 1514 — не представимы.) Сколько существует трёхзначных чисел, представимых в виде суммы $\overline{abc} + \overline{ab} + a$?

ОТВЕТ: 801. Поскольку всего трёхзначных чисел 900 штук, то достаточно заметить, что неравенству

$$\overline{abc} + \overline{ab} + \mathrm{a} > 999$$

удовлетворяют в точности те числа $\overline{abc}$, которые начинаются с цифры 9, кроме числа 900. Кроме того, легко видеть, что из разных трехзначных чисел получаются разные числа.

7. Робинзон Крузо поручил Пятнице провести перепись собак, кошек, коз и попугаев. Пятница решил отмечать каждую собаку палочкой, кошку — палочкой и ноликом, козу — двумя ноликами. Сможет ли Пятница отметить каждого попугая какой-нибудь последовательностью из палочек и ноликов, чтобы по его отчёту (Пятница пишет слева направо подряд без пробелов) Робинзон мог однозначно установить, сколько каких животных приняли участие в переписи?

ОТВЕТ: Нет. Дело в том, что можно раскодировать запись справа налево.