Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования
Центр образования №218 г. Москвы
Гимназия №1543 г. Москвы
Школа-интернат «Интеллектуал»

ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ
6 И 7 КЛАССОВ

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Москва
1 марта 2009 года

Результаты Городской устной математической олимпиады будут размещены в сети Интернет на сайте

http://www.mccme.ru/ustn/

Варианты составили:

Н. Нетрусова, *А. Сгибнев*, *Д. Шноль*
М. Берштейн, *Т. Караваева*, *И. Раскина*, *А. Хачатурян*

Городская устная математическая олимпиада.
Задачи и решения.

* * *

Технический редактор: *А. Горская*

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6 класс

Первый тур

(каждая задача оценивается в 5 баллов)

1. ЭТО НЕПРАВИЛЬНЫЕ ПЧЕЛЫ.

Известно, что ЖЖ + Ж = МЁД. На какую цифру оканчивается произведение: В·И·Н·Н·И·П·У·Х (разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми — одинаковые)?

2. КВАДРАТНОЕ КАТАЮТ. Куб, стоящий на плоскости, несколько раз перекатили через его рёбра, после чего он вернулся на прежнее место. Обязательно ли он стоит на той же грани?

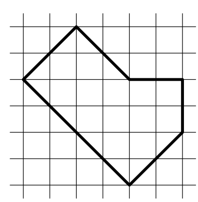
3. ЭТА МУЗЫКА БУДЕТ ВЕЧНОЙ. Есть пять батареек, из которых три заряжены, а две разряжены. Фотоаппарат работает от двух заряженных батареек. Покажите, как за 4 попытки можно гарантированно включить фотоаппарат.

Второй тур

(каждая задача оценивается в 10 баллов)

4. ПОНЧИК И ЛУНОХОД. Пончик находится в сломанном луноходе на расстоянии 18 км от Лунной базы, в которой сидит Незнайка. Между ними устойчивая радиосвязь. Запаса воздуха в луноходе хватит на 3 часа, кроме того, у Пончика есть баллон для скафандра, с запасом воздуха на 1 час. У Незнайки есть много баллонов с запасом воздуха на 2 часа каждый. Незнайка не может нести больше двух баллонов одновременно (одним из них он пользуется сам). Скорость передвижения по Луне в скафандре равна 6 км/ч. Сможет ли Незнайка спасти Пончика и не погибнуть сам?

5. ТОПОР НА ТРОИХ. Разрежьте фигуру на рисунке на три равные части (не обязательно по линиям сетки).



(*Равными называются части, которые можно совместить, наложив друг на друга. При этом части можно поворачивать и переворачивать.*)

6. ВЫБИРАЙ СЕБЕ ЛЮБОЙ. Мария Ивановна покупает 16 шариков для Последнего звонка. В магазине есть шарики трёх цветов: синего, красного и зелёного. Сколько существует вариантов различных покупок 16-ти шариков, если Мария Ивановна хочет, чтобы шарики каждого цвета составляли не менее четверти от количества всех шариков?

Третий тур

(каждая задача оценивается в 15 баллов)

7. ПОЛУНДРА! В трюме корабля образовалась течь. Сразу же включили насос, откачивающий воду, однако он не справлялся, и через 10 минут уровень воды в трюме поднялся на 20 см. Тогда включили второй насос такой же мощности, и через 5 минут уровень опустился на 10 см. Тут течь заделали. За какое время насосы откачают остаток воды?

8. КРОШКА СЫН К ОТЦУ ПРИШЁЛ. Отец говорит сыну:

— Сегодня у нас у обоих день рождения, и ты стал ровно в 2 раза моложе меня.

— Да, и это восьмой раз за мою жизнь, когда я моложе тебя в целое число раз.

Сколько лет сыну, если отец не старше 75 лет?

9. РАЗДЕЛИТЬ ПО-БРАТСКИ. Дан квадрат $2n \times 2n$. Вася закрашивает в нём две любые клетки. Всегда ли Петя сможет разрезать этот квадрат на две равные части так, чтобы закрашенные клетки были в разных половинках?

7 класс

Первый тур

(каждая задача оценивается в 5 баллов)

1. ЗАБАВЫ ПЕРВОКЛАССНИКОВ. Юра записал четырёхзначное число. Лёня прибавил к первой цифре этого числа 1, ко второй 2, к третьей 3 и к четвёртой 4, а потом перемножил полученные суммы. У Лёни получилось 234. Какое число могло быть записано Юрой?

2. БУМАГА ВСЁ СТЕРПИТ. У листа бумаги только один ровный край. Лист согнули, потом разогнули обратно. A — общая точка ровного края и линии сгиба. Постройте перпендикуляр к этой линии в точке A. Сделайте это без помощи чертёжных инструментов, а лишь перегибая бумагу.

3. АХ КАК ДОЛГО, ДОЛГО ЕДЕМ. Пётр Петрович и Иван Иванович ехали вместе в поезде. Каждый из них сначала смотрел в окно, потом читал газету, потом разгадывал кроссворд и под конец пил чай. Только у Петра Петровича на каждое следующее занятие уходило вдвое больше времени, чем на предыдущее, а у Ивана Ивановича — в 4 раза. Начали смотреть в окно они одновременно и кончили пить чай также одновременно. Что делал Пётр Петрович, когда Иван Иванович приступил к кроссворду?

Второй тур

(каждая задача оценивается в 10 баллов)

4. ДЕВОЧКИ И МАЛЬЧИКИ. В школе 450 учеников и 225 парт. Ровно половина девочек сидят за одной партой с мальчиками. Можно ли пересадить учеников так, чтобы ровно половина мальчиков сидела за одной партой с девочками?

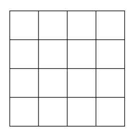
5. ВСЁ ПО-ЧЕСТНОМУ! Али-Баба и 40 разбойников делят добычу. Делёж считается справедливым, если любым 30 участникам достаётся в сумме не менее половины добычи. Какая наибольшая доля может достаться Али-Бабе при справедливом дележе?

6. ПРИЯТНОГО АППЕТИТА! Людоедом называется фантастическая шахматная фигура, которая может ходить как шахматный король — на соседнюю клетку по вертикали или горизонтали, но не может ходить по диагонали. Два людоеда стоят на противоположных угловых полях шахматной доски и начинают ходить по очереди. Людоеду, вставшему на клетку, где уже стоит другой людоед, разрешается им пообедать. Кто кого съест при правильной игре и как ему надо для этого играть?

Третий тур

(каждая задача оценивается в 15 баллов)

7. КУБИНСКИЕ МУХИ. В каждой вершине куба сидело по мухе. Потом все мухи разом взлетели и сели по одной в каждую вершину в каком-то другом порядке. Докажите, что найдутся три мухи, которые в начальном и конечном положении сидели в вершинах равных треугольников.



8. БИКФОРДОВЫ ШНУРЫ. Есть 40 одинаковых шнуров. Если поджечь любой шнур с одной стороны, он сгорает, а если с другой — не горит. Вася раскладывает шнуры в виде квадрата (см. рисунок, каждый шнур — сторона клетки). Затем Петя расставляет 12 запалов. Сможет ли Вася разложить шнуры так, что Пете не удастся сжечь все шнуры?

9. А КУШАТЬ ХОЧЕТСЯ ВСЕГДА Пончик закусывал в придорожном кафе, когда мимо него проехал автобус. Через три плюшки после автобуса мимо Пончика проехал мотоцикл, а еще через три плюшки — автомобиль. Мимо Сиропчика, который закусывал в другом кафе у той же дороги, они проехали в другом порядке: сначала — автобус, через три плюшки — автомобиль, а еще через три плюшки — мотоцикл. Известно, что Пончик и Сиропчик всегда едят плюшки с одной и той же постоянной скоростью. Найдите скорость автобуса, если скорость автомобиля — 60 км/ч, а скорость мотоцикла — 30 км/ч.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс

1. Ответ: на ноль.

Так как к двузначному числу ЖЖ прибавили однозначное число Ж и получили трёхзначное, то количество десятков в двузначном числе равно 9. Таким образом, первое равенство означает $99+9=108$. В нём использовано 4 цифры. В произведении В·И·Н·Н·И·П·У·Х использованы 6 других цифр. Следовательно, среди них обязательно есть цифры 2 и 5, значит, произведение В·И·Н·Н·И·П·У·Х оканчивается на ноль.

Д. Шноль

2. Ответ: не обязательно.

Пусть куб находится перед нами, а нижняя грань окрашена. Рассмотрим следующий путь куба (см. рисунок).

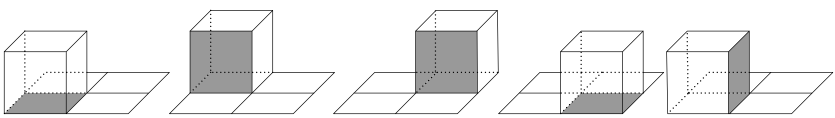
1 шаг: назад. Окрашенная грань стала передней

2 шаг: вправо. Окрашенная грань осталась передней.

3 шаг: вперёд. Окрашенная грань стала нижней.

4 шаг: влево. Окрашенная грань стала правой боковой.

Тем самым, куб оказался на том же месте, но другой гранью снизу.



И. Раскина

3. Вставим первую и вторую батарейки. Если фотоаппарат не работает, то либо одна из них разряжена, либо обе. Вставим теперь третью и четвертую батарейки. Если фотоаппарат не работает, то:

1) одна из них разряжена,

2) из первых двух разряжена одна,

3) пятая батарейка точно работает.

Осталось проверить пятую батарейку в паре с каждой из первых двух.

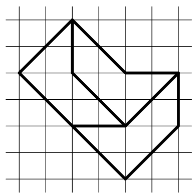
Д. Шноль, Н. Нетрусова

4. Ответ: может.

Незнайка с двумя баллонами идёт по дороге к луноходу. Пройдя 6 км, он оставляет полный баллон, а с одним возвращается обратно (как раз получается 2 часа). На базе он сразу же берёт ещё два баллона и вновь идёт к луноходу. На расстоянии 6 км он берёт оставленный полный баллон и оставляет половинный. В этот момент (как раз прошло 3 часа, и закончился воздух в луноходе) Пончик выходит ему навстречу с единственным баллоном. Через час они встречаются на расстоянии 6 км от лунохода и 12 км от базы. Незнайка даёт Пончику полный баллон, который позволит тому дойти до базы, а сам идёт с половинным до оставленного им другого половинного баллона, которого ему как раз хватает, чтобы дойти до базы.

Е. Федулкина, Л. Федулкин

5. Ответ: см. рисунок.



А. Хачатурян

6. Ответ: 15 вариантов.

Заведомо надо купить 4 синих шарика, 4 красных и 4 зелёных. Остаётся купить ещё 4 шарика, каждый из которых уже может быть любого из трёх цветов. Подсчитать это количество можно разными способами. Приведем один из них (способ упорядоченного перебора).

Сначала рассмотрим, сколько вариантов выбора 4 шариков, если среди них синих шариков нет совсем. Очевидно, их всего 5: 4 красных $(4+0)$, 3 красных + 1 зелёный $(3+1)$, $2+2$, $1+3$, $0+4$. Если один шарик из четырёх синий, то остальные шарики можно выбрать четырьмя способами: $3+0$, $2+1$, $1+2$, $0+3$. Если два шарика синих, то остальные выбираются тремя способами и т. д. (см. таблицу).

Синих шариков	Красных + зеленых	Количество вариантов
0	$4+0$, $3+1$, $2+2$, $1+3$, $0+4$	5
1	$3+0$, $2+1$, $1+2$, $0+3$	4
2	$2+0$, $1+1$, $0+2$	3
3	$1+0$, $0+1$	2
4	$0+0$	1

Таким образом, всего вариантов: $5+4+3+2+1=15$.

Д. Шноль

7. Ответ: за $\dfrac{5}{4}$ минуты.

Уровень воды при включённом одном насосе и течи поднимался на 2 см/мин, а при включённых двух и течи — опускался на 2 см/мин.

Значит, один насос откачивает 4 см/мин, а два насоса — 8 см/мин. $10 : 8 = \frac{5}{4}$ (мин) — время, за которое два насоса откачают остаток воды.

А. Сгибнев

8. Ответ: 30 лет или 24 года.

Пусть, когда сын родился, отцу было N лет. Запишем в таблицу возрасты отца и сына каждый год.

0	N
1	$N+1$
2	$N+2$
3	$N+3$
$\dots$	$\dots$
N	$2N$

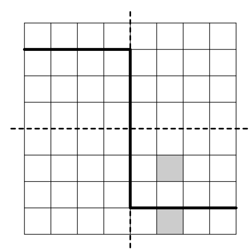
Известно, что ровно в восьми строчках большее число должно делиться на меньшее. При этом большее число — это сумма N и меньшего числа. Меньшее число кратно самому себе, поэтому для делимости суммы необходимо и достаточно, чтобы на него делилось второе слагаемое — N. Таким образом, задача сводится к подбору числа N, у которого ровно 8 делителей. При этом $2N$ не больше 75, т. е. N не больше 37.

Числа, имеющие 8 делителей, могут быть представлены в одном из трех видов: p^7, p^3q, pqr (где p, q и r — простые числа). Перебором устанавливается, что только числа: $24 = 2^3 \cdot 3$ и $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ имеют 8 делителей и не превосходят 37.

Д. Шноль

9. Ответ: всегда.

Разрежем квадрат на четыре квадрата $n \times n$. Если Вася закрашивает две клетки в разных «четвертинках» $n \times n$, то Петя сможет разрезать нужным образом большой квадрат либо по горизонтали, либо по вертикали.



Рассмотрим случай, когда Вася закрасил две клетки в одной «четвертинке» $n \times n$. Эти клетки лежат либо в разных столбцах, либо в разных строках (иначе бы эти клетки совпали). Пусть для определённости закрашенные клетки лежат в разных строках (для столбцов рассуждение аналогично). Разрежем «четвертинку» $n \times n$ по горизонтали так, чтобы закрашенные клетки оказались в разных её частях. После этого продолжим разрез по границе четвертинок до центра квадрата $2n \times 2n$ и отразим получившийся разрез относительно этого центра (см. рисунок).

Д. Шноль

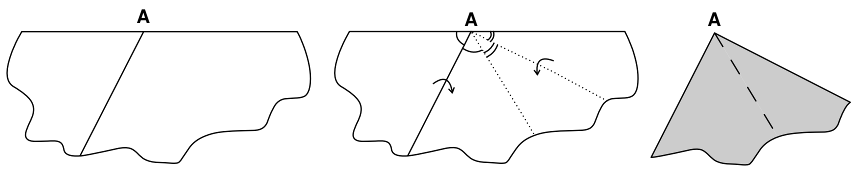
7 класс

1. Ответ: Юра записал 2009 или 1109.

Заметим, что $234 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13$. Максимальный сомножитель, полученный Лёней, мог равняться $9+4 = 13$. Этот сомножитель в произведении, несомненно, имелся, потому что меньшие числа на 13 не делятся, а 234 делится. Значит, последняя цифра Юриного числа — девятка. Остальные три сомножителя дают в произведении 18. Единиц среди них быть не может, так как числа с нуля не начинаются. Единственный возможный вариант $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Понятно, что третья цифра в этом случае 0, а для первых двух цифр возможны два варианта.

Ю. Пукас, Л. Федулкин

2. Согнём бумагу по данному сгибу и затем ещё по одной линии, проходящей через точку A — так, чтобы лучи, на которые точка A делит ровный край бумаги, совместились, образовав новый луч (см. рисунок). Тогда этот луч разделит развёрнутый угол с вершиной в A на два смежных угла, а сгибы — старый и новый — будут биссектрисами этих углов. Так как биссектрисы смежных углов перпендикулярны, то задача решена.



Д. Прокопенко

3. Ответ: Пётр Петрович смотрел в окно.

Пусть Пётр Петрович смотрел в окно x минут, а Иван Иванович — y минут. Тогда $x + 2x + 4x + 8x = y + 4y + 16y + 64y$, откуда $15x = 85y$. Иван Иванович начал разгадывать кроссворд через $5y = \dfrac{15x}{17}$ минут. Это меньше, чем x, значит, Пётр Петрович в это время смотрел в окно.

А. Штерн

4. Ответ: нет, нельзя.

Девочек, сидящих с другими девочками, вдвое больше, чем парт, за которыми они сидят. Значит их чётное число. Всего девочек ещё вдвое больше, то есть количество девочек делится на 4. Если бы мальчиков можно было рассадить подобным образом, то и количество мальчиков было бы кратно 4. Но общее количество детей (450) не делится на 4, поэтому такое пересаживание невозможно.

XXV Уральский турнир юных математиков

5. Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пусть все сорок разбойников возьмут поровну добычи. У любых 30 из них должно быть не менее половины добычи. Поэтому каждый берёт $\frac{1}{2} : 30 = \frac{1}{60}$. При этом 40 разбойников получат $40 \cdot \frac{1}{60} = \frac{2}{3}$ награбленного, а Али-Баба — оставшуюся треть. Это больше, чем у любого разбойника, поэтому любая группа из 30 человек с участием Али-Бабы заведомо обладает более чем половиной добычи. Докажем, что больше Али-Баба взять не сможет. Выберем среди разбойников 30 наиболее «бедных». Они в сумме получили не более $\frac{3}{4}$ того, что досталось всем разбойникам. При этом, так как у них по условию по крайней мере половина добычи, у всех сорока разбойников будет по крайней мере $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ добытого богатства.

Фольклор

6. Ответ: пообедает второй людоед.

Разобьём клетки доски на диагонали, параллельные той, где изначально расположены людоеды. Всего таких диагоналей 15. Заметим, что каждым ходом людоед перемещается на соседнюю диагональ.

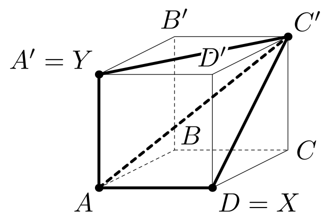
Укажем стратегию, позволяющую второму людоеду пообедать. Пусть для определенности он начинает игру из правого верхнего угла. Тогда он должен всегда ходить влево или вниз, и при этом вставать на ту же диагональ, на которую перед этим встал первый людоед. При этом после любого парного хода людоеды окажутся в противоположных углах некоторого квадрата. Размеры этого квадрата будут либо уменьшаться (если первый людоед будет ходить вправо или вверх), либо не будут изменяться. Но первый людоед не сможет постоянно ходить влево или вниз — сделав несколько таких ходов, он обязательно попадёт в положение, когда ему придется ходить вверх или вправо. Таким образом, размеры квадрата в ходе игры будут уменьшаться. Когда они уменьшатся до 2×2, первый людоед будет вынужден, чтобы его не съели, ходить влево или вниз, но эти ходы вскоре закончатся, и он проиграет.

Замечание. Посмотрим на расстояние между двумя людоедами — количество ходов, которые необходимо сделать, чтобы дойти от одного людоеда до другого. Изначально это расстояние равно 13. После каждого хода любого людоеда это расстояние либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1. Т. е. после каждого хода это расстояние меняет чётность.

Заметим, что людоед может пообедать данным ходом, если к этому моменту расстояние между людоедами стало равно 0. Так как перед любым ходом первого людоеда расстояние между людоедами нечётно, то первый людоед никогда не сможет пообедать вторым, даже если бы второй пытался поддаться.

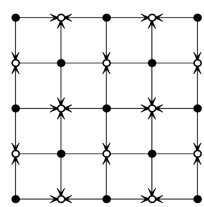
VI Уральский турнир юных математиков

7. Поскольку куб можно произвольно перевернуть, то можно считать, что муха, сидевшая в вершине A, осталась на месте. Если муха из противоположной вершины C' также осталась на месте, то вместе с любой третьей мухой они образуют нужную тройку. Если же муха из C' переместилась в вершину X, то в C' на её место прилетела третья муха, сидевшая до того в вершине Y. Эти три мухи образуют искомую тройку ввиду равенства треугольников AXC' и AYC' (один из примеров таких треугольников приведен на рисунке).



Украинская олимпиада, 1991 *г.*

8. Приведём конструкцию, для которой 12 запалов недостаточно. Можно считать, что Пете разрешается устанавливать запалы только на концах шнуров. Ведь если перенести запал из внутренней точки шнура к тому концу, с которого он горит, ситуация не ухудшится. Поставим на каждом шнуре стрелочку в том направлении, в котором он может гореть. Покрасим узлы сетки в шахматном порядке. Узлов одного из цветов, пусть чёрного, будет тринадцать. Пусть из этих узлов все стрелочки выходят (см. рисунок). Тогда каждый из шнуров, выходящих из чёрной точки, может сгореть, только если в эту точку помещен запал. Но запалов всего 12, а точек 13.



V Уральский турнир юных математиков

9. Пусть в тот момент, когда автобус проезжал мимо Пончика, мотоциклу оставалось x км до первого кафе. Это означает, что за «время трёх плюшек» автомобиль проезжает x км. Автомобиль движется вдвое быстрее мотоцикла и проехал за это же время $2x$ км. Столько же он проехал и за следующее «время трёх плюшек». Значит, в тот момент, когда мимо Пончика проезжал автобус, автомашина была от него вчетверо дальше, чем мотоцикл.

Когда же автобус проезжал мимо Сиропчика, и автомашина, и мотоцикл были позади него на расстоянии $2x$ км. Стало быть, пока автобус ехал от Пончика до Сиропчика, автомашина догнала мотоцикл, ликвидировав отставание в $4x - x = 3x$ км. За это же время автомашина сократила отставание от автобуса на $4x - 2x = 2x$ км. Это значит, что скорость, с которой машина догоняет мотоцикл (30 км/ч), составляет три вторых от скорости, с которой она догоняет автобус. То есть машина догоняет автобус со скоростью 20 км/ч, значит, скорость автобуса $60 - 20 = 40$ км/ч.

С. Токарев
