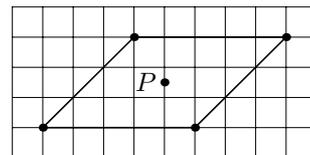


Решения задач

8 – 9 класс

1. (*Фольклор*) На рисунке изображен параллелограмм и отмечена точка P пересечения его диагоналей. Проведите через P прямую так, чтобы она разбила параллелограмм на две части, из которых можно сложить ромб.



Решение. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм, P — точка пересечения его диагоналей. Отметим на сторонах BC и AD точки X и Y так, как показано на рисунке 1а, Z — основание перпендикуляра, опущенного из точки X на прямую AD . Применив для треугольника XYZ теорему Пифагора, получим, что $XY = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = BC = BX + XC$. Тогда из четырехугольников $ABXY$ и $YXCD$ можно сложить ромб A_1B_1XY .

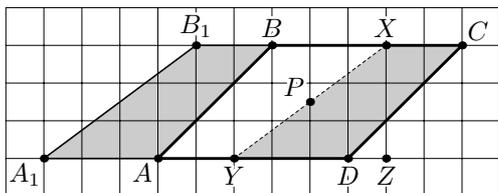


Рис. 1а

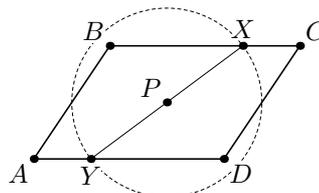


Рис. 1б

Отметим, что такая прямая существует для любого параллелограмма. Действительно, пусть в параллелограмме $ABCD$ $AB < BC$ и $\angle ABC$ — не острый (см. рис. 1б). Тогда существует отрезок XY с концами на сторонах BC и AD , равный BC . Для того, чтобы его построить, достаточно провести окружность с радиусом, равным $\frac{1}{2}BC$, и центром в точке P . Она пересечет отрезок BC хотя бы в одной точке, поскольку расстояние от точки P до прямой BC не больше, чем $\frac{1}{2}AB$, т. е. не больше, чем $\frac{1}{2}BC$, а $PC > \frac{1}{2}BC$.

2. (*Ю. Блинков*) Квадрат и прямоугольник одинакового периметра имеют общий угол. Докажите, что точка пересечения диагоналей прямоугольника лежит на диагонали квадрата.

Решение. *Первый способ.* Пусть $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ — данные квадрат и прямоугольник (см. рис. 2а). Заметим, что достаточно будет доказать, что точка O — середина отрезка B_1D_1 равноудалена от прямых AB и BC . Из условия следует, что $AB_1 + AD_1 = AB + AD$, то есть $BB_1 = DD_1$. Пусть OM и OK — перпендикуляры, опущенные на стороны AB и BC соответственно.

Тогда $OM = \frac{1}{2}AD_1$, как средняя линия треугольника AB_1D_1 , а $OK = \frac{1}{2}AB_1 - BB_1$. Учитывая, что $BB_1 = DD_1$ и $AD = AB$, получим: $OK = \frac{1}{2}AB_1 - BB_1 = \frac{1}{2}(AB + BB_1) - BB_1 = \frac{1}{2}AD_1$. То есть O лежит на диагонали BD квадрата $ABCD$.

Второй способ. Выберем декартову систему координат так, чтобы общая вершина A квадрата $ABCD$ и прямоугольника $AB_1C_1D_1$ была началом координат, а обе фигуры лежали в I координатной четверти (см. рис. 2б). Тогда $B_1(0; b)$, $C_1(a; b)$, $D_1(a; 0)$. Точка O пересечения диагоналей прямоугольника имеет координаты $(\frac{a}{2}; \frac{b}{2})$. Прямая BD задается уравнением $x + y = c$. По условию $2(a + b) = 4c$, где c — сторона квадрата, то есть $c = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$. Следовательно, прямая BD содержит точку O .

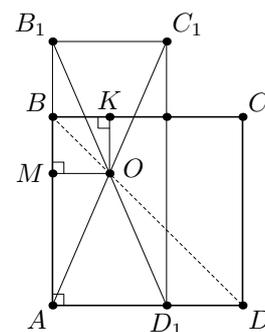


Рис. 2а

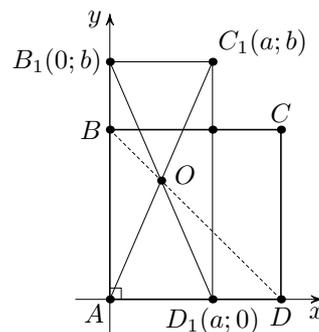


Рис. 2б

3. (Д. Прокопенко) В треугольнике ABC AA_1 и BB_1 — высоты. На стороне AB выбраны точки M и K так, что $B_1K \parallel BC$ и $A_1M \parallel AC$. Докажите, что угол AA_1K равен углу BB_1M .

Решение. Поскольку $\angle AA_1B = \angle AB_1B = 90^\circ$, то четырехугольник ABA_1B_1 — вписанный. Следовательно, $\angle ABC + \angle AB_1A_1 = 180^\circ$, откуда $\angle ABC = \angle A_1B_1C$. Так как $A_1M \parallel AC$, то $\angle A_1B_1C = \angle MA_1B_1$. Аналогично, из того, что $KB_1 \parallel BC$, получим, что $\angle AKB_1 = \angle ABC$. Следовательно, четырехугольник MKA_1B_1 — вписанный. Тогда $\angle KB_1M = \angle KA_1M$. Из параллельности прямых и равенства вписанных углов в четырехугольнике ABA_1B_1 получим, что $\angle MA_1A = \angle A_1AB_1 = \angle B_1BA_1 = \angle KB_1B$. Следовательно, $\angle BB_1M = \angle BB_1K + \angle KB_1M = \angle MA_1A + \angle KA_1M = \angle AA_1K$.

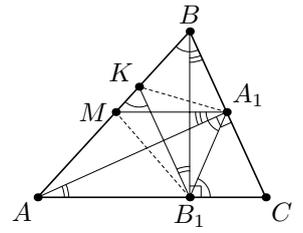


Рис. 3

В случае, когда точки M и K располагаются на стороне AB в другом порядке, решение аналогично, только искомые углы являются не суммой рассмотренных углов, а их разностью.

4. (Фольклор) Постройте треугольник по стороне, радиусу вписанной окружности и радиусу внеписанной окружности, касающейся этой стороны. (Исследование проводить не требуется.)

Решение. Предположим, что искомый треугольник ABC построен. Будем считать, что известна длина стороны AC и радиусы окружностей, которые её касаются.

Пусть K, L и N — точки касания вписанной окружности со сторонами AC, AB и BC соответственно (см. рис. 4а), точки M, P и T — точки касания внеписанной окружности со прямыми AC, AB и BC соответственно.

Первый способ. Докажем, что $NT = AC$. Действительно, из равенства отрезков касательных следует, что $AK = AL, BL = BN, CK = CN$, откуда $AC = p - BN$ (p — полупериметр треугольника ABC). Кроме того, $BP = BT$ и $BP + BT = AB + AM + BC + CM$, откуда $BT = p$. Но тогда $NT = p - BN$, то есть, $AC = NT$.

Отсюда вытекает способ построения треугольника ABC : проведем прямую l , на которой отложим отрезок NT , равный данному (см. рис. 4а). Построим окружности с данными радиусами, касающиеся прямой l в точках N и T (лежащие в одной полуплоскости относительно l). Затем построим общую внутреннюю и вторую общую внешнюю касательные к этим окружностям. Тогда вершины треугольника расположены в точках попарного пересечения данных прямых.

Заметим, что наличие у данных окружностей двух общих внутренних касательных не влияет на количество решений задачи, поскольку эти касательные симметричны относительно биссектрисы угла B .

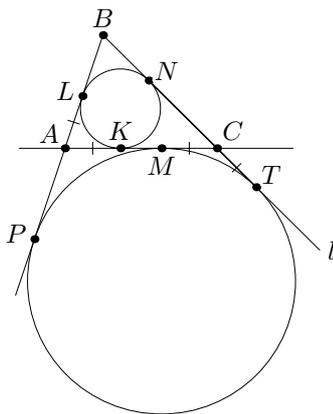


Рис. 4а

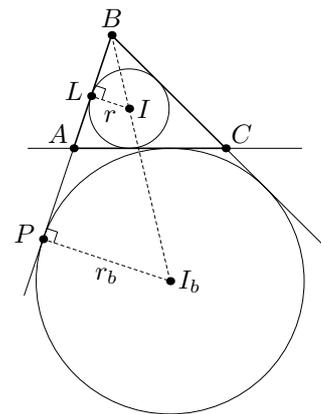


Рис. 4б

Второй способ. Пусть I и I_b — центры вписанной и внеписанной окружности, r и r_b — их радиусы (см. рис. 4б). Тогда точки I и I_b лежат на одной прямой — биссектрисе угла B . Следовательно, $\operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} = \frac{r}{BL} = \frac{r_b}{BP}$. Из доказанного выше следует, что $BL = p - AC, BP = p$. То есть, $\frac{r}{p - AC} = \frac{r_b}{p}$, откуда $p = \frac{AC \cdot r_b}{r_b - r}$ и $\operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} = \frac{r_b}{p} = \frac{r_b - r}{AC}$. Зная $\operatorname{tg} \frac{\angle B}{2}$, мы можем построить угол, равный $\frac{\angle B}{2}$, а, следовательно, и угол, равный углу B .

Отсюда вытекает следующий способ построения. Построим угол, равный углу B , и впишем в него окружности с данными радиусами. Затем проведем общую внутреннюю касательную к этим окружностям.

5. (Б. Френкин) В некоторой точке круглого острова радиусом 1 км зарыт клад. На берегу острова стоит математик с прибором, который указывает направление на клад, когда расстояние до клада не превосходит 500 м. Кроме того, у математика есть карта острова, на которой он может фиксировать все свои перемещения, выполнять измерения и геометрические построения. Математик утверждает, что у него есть алгоритм, как добраться до клада, пройдя меньше 4 км. Может ли это быть правдой?

Ответ: да, может.

Решение. Пусть O — центр острова, A — точка старта, w — окружность с центром в точке O и радиусом 500 м, l_1 и l_2 — касательные к w , параллельные OA (см. рис. 5).

Покажем, что можно получить сигнал прибора, пройдя менее 3,5 км, откуда следует ответ. Нужно пройти 500 м по направлению к центру острова, а затем идти по окружности w . Если мы не получили сигнала, пока двигались к центру острова, то его нет в заштрихованной области, следовательно, его нет и внутри криволинейного треугольника OBC . Двигаясь из точки X в точку Y по большей дуге окружности w мы гарантированно получим сигнал, поскольку будут охвачены все точки острова.

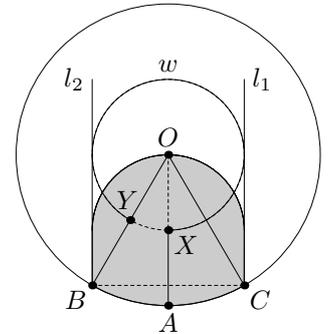


Рис. 5

Так как треугольник OBC — равносторонний, то $\angle BOA = 30^\circ$, следовательно, по малой окружности мы пройдем не более $\frac{11}{12}\pi$, то есть, всего будет пройдено не более, чем $\frac{11}{12}\pi + 0,5 < 3,5$ км.

6. (П. Кожевников) Фиксированы две окружности w_1 и w_2 , одна их внешняя касательная l и одна их внутренняя касательная m . На прямой m выбирается точка X , а на прямой l строятся точки Y и Z так, что XY и XZ касаются w_1 и w_2 соответственно, а треугольник XYZ содержит окружности w_1 и w_2 . Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники XYZ , лежат на одной прямой.

Решение. Докажем, что точка S касания окружности, вписанной в треугольник XYZ со стороной YZ не зависит от выбора точки X . Так как точка D — фиксирована, то для этого достаточно доказать, что фиксирована длина отрезка DS . В решении будем несколько раз использовать известный факт:

Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC , AC и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Тогда $AB_1 = p - BC$, где p — полупериметр треугольника ABC .

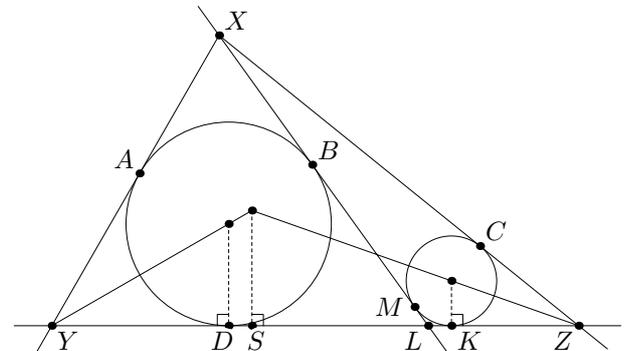


Рис. 6

Итак, $DS = YS - YD = (p_{XYZ} - XZ) - (p_{XYL} - XL) = (p_{XYZ} - p_{XYL}) + (XL - XZ)$ (см. рис. 6). Преобразуем разность полупериметров отдельно: $p_{XYZ} - p_{XYL} = \frac{1}{2}(XZ + ZL - XL) = \frac{1}{2}(P_{XZL} - 2XL) = p_{XZL} - XL$. Тогда $(p_{XYZ} - p_{XYL}) + (XL - XZ) = p_{XZL} - XL + (XL - XZ) = p_{XZL} - XZ = LK$. Итак, $DS = LK$, причем точки L и K — фиксированы. То есть фиксирована точка S , а значит центры окружностей, вписанных в треугольник XYZ , лежат на прямой, проходящей через S и перпендикулярной YZ .

Верен следующий факт (автор — Игорь Федорович Шарыгин, из задач Соросовских олимпиад): точки S , L и центры данных окружностей лежат на одной окружности, из чего также следует решение данной задачи.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников, Д. Прокопенко, Б. Френкин.

Решения задач

10 – 11 класс

1. (А. Аюбян) Существуют ли два таких четырехугольника, что стороны первого меньше соответствующих сторон второго, а соответствующие диагонали больше?

Ответ: да, существуют.

Решение. Например, рассмотрим квадрат $ABCD$ и четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, расположенные так, как показано на рисунке 1. Тогда длина диагоналей квадрата равна 4, а длины диагоналей четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ равны 2. Кроме того, длины соответствующих сторон четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ больше соответствующих сторон квадрата, поскольку $A_1D_1 = C_1D_1 = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} > 2\sqrt{2} = AD = CD$ и $A_1B_1 = B_1C_1 > A_1D_1 > AB = BC$.

Можно доказать, что не существует выпуклых четырехугольников, удовлетворяющих условию задачи.

2. (Ю. Блинков) Трапеция $ABCD$ и параллелограмм $MBDK$ расположены так, что стороны параллелограмма параллельны диагоналям трапеции (см. рис.). Докажите, что площадь серой части равна сумме площадей черных частей.

Решение. Заметим, что утверждение задачи равносильно равенству площадей треугольников KMD и AKC (см. рис. 2). Так как $AC \parallel KD$, то $AKDC$ — трапеция, следовательно, $S_{AKC} = S_{ADC}$. Аналогично, в трапеции $ABCD$: $S_{ADC} = S_{ADB}$. В то же время, $S_{ADB} = \frac{1}{2}S_{MBDK} = S_{KMD}$. Что и требовалось.

3. (В. Протасов) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки касания вписанной окружности со стороной BC на прямую AC , проходит через центр вписанной окружности треугольника A_1CB_1 .

Решение. Пусть K и M — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и BC соответственно, I — центр вписанной окружности, O — точка пересечения перпендикуляра ML и прямой IC (см. рис. 3). Докажем, что O — центр вписанной окружности треугольника A_1B_1C . Для этого достаточно доказать, что длина отрезка OL равна радиусу этой окружности. Из подобия прямоугольных треугольников COL и CIK следует, что $\frac{OL}{IK} = \frac{CL}{CK}$. Поскольку $CK = CM$ и $\frac{CL}{CM} = \cos \angle C$, то $OL = IK \cdot \cos \angle C$. Используя тот факт, что треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC с коэффициентом $k = \cos \angle C$, получим требуемое.

С помощью факта, доказанного в этой задаче, можно решить трудную задачу 11.5 с Московской математической олимпиады 2002 года. Желающим подробнее разобраться с данной конструкцией предлагаем обратиться к серии задач «Три загадочные точки в треугольнике», предлагавшейся на XIV конференции Турнира городов.

4. (Д. Терешин) На медианах треугольника как на диаметрах построены три окружности. Известно, что они попарно пересекаются. Пусть C_1 — более удаленная от вершины C точка пересечения окружностей, построенных на медианах AM_1 и BM_2 . Точки A_1 и B_1 определяются аналогично. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

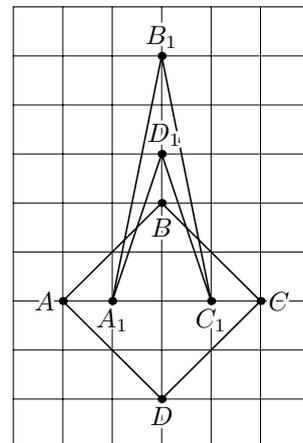


Рис. 1

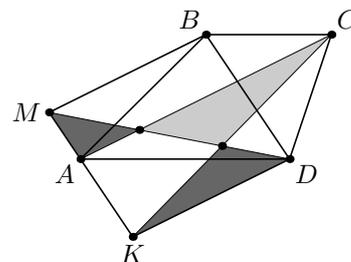


Рис. 2

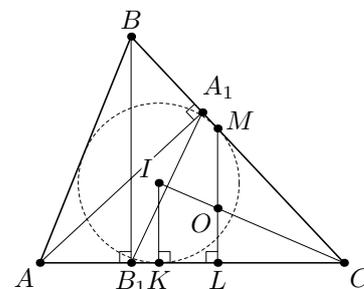


Рис. 3

Решение. Рассмотрим окружности, построенные как на диаметрах на медианах AM_1 и BM_2 треугольника ABC . Пусть C_1 и C_2 — точки пересечения этих окружностей (см. рис. 4). Докажем, что C_1, C_2 и C лежат на одной прямой, содержащей высоту треугольника.

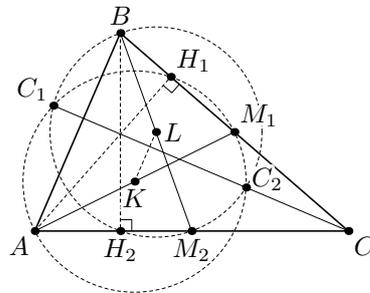


Рис. 4

Пусть H_1 и H_2 — точки пересечения этих окружностей со сторонами BC и AC треугольника. Тогда $\angle AH_1M_1 = \angle BH_2M_2 = 90^\circ$, поскольку они опираются на диаметры. То есть, AH_1 и BH_2 — высоты треугольника ABC . Докажем, что $CM_1 \cdot CH_1 = CM_2 \cdot CH_2$. Действительно, треугольники CAB и CH_1H_2 подобны, следовательно, $\frac{CH_1}{CH_2} = \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}BC} = \frac{CM_2}{CM_1}$. Таким образом, по свойству секущей к окружности, точки C_1, C_2 и C лежат на одной прямой. Так как C_1C_2 — общая хорда двух окружностей, то она перпендикулярна линии центров, то есть, отрезку KL , соединяющему середины медиан AM_1 и BM_2 . Поскольку $KL \parallel AB$, то $C_1C_2 \perp AB$, следовательно, прямая CC_1 содержит высоту треугольника.

Так как высоты треугольника пересекаются в одной точке, то утверждение задачи доказано.

Возможно также решение, основанное на том, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются радикальными осями рассматриваемых окружностей.

5. (Барбу Берчану, Румыния) Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдутся три ребра, из которых можно составить треугольник.

Решение. Алгебраическая лемма. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — положительные числа такие, что $x_1 \leq x_2, x_{i-1} + x_i \leq x_{i+1}$ для всех $i = 3, 4, \dots, n$. Тогда $x_{i_1} + \dots + x_{i_k} \leq x_n$ для любых индексов $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n - 2$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $x_1 + \dots + x_{n-2} \leq x_n$. Если n чётно, то

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{n-3} + x_{n-2}) &\leq x_3 + x_5 + \dots + x_{n-1} \leq \\ &\leq (x_4 + x_5) + x_7 + \dots + x_{n-1} \leq (x_6 + x_7) + x_9 + \dots + x_{n-1} \leq \dots \leq x_{n-2} + x_{n-1} \leq x_n. \end{aligned}$$

Если n нечётно, то $(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{n-4} + x_{n-3}) + x_{n-2} \leq x_{n-1} + x_{n-2} \leq x_n$. Лемма доказана.

Пусть теперь ребра многогранника имеют длины $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Если нет треугольников из трех ребер, то $x_1 \leq x_2 < x_3 < \dots < x_n$ (иначе при $x_i = x_{i+1}$ отрезки x_1, x_i, x_{i+1} образуют равнобедренный треугольник) и $x_{i-1} + x_i \leq x_{i+1}$ при $i = 3, \dots, n$. Рассмотрим две смежные грани, имеющие общее ребро x_n . Запишем неравенства для длин ребер в этих гранях: $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k} > x_n, x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_p} > x_n$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_p$. По лемме $i_k = j_p = n - 1$. Это означает, что рассматриваемые грани имеют еще одно общее ребро — x_{n-1} . Противоречие.

Отметим, что утверждение задачи верно и для невыпуклого многогранника.

6. (Ю. Блинков) К двум окружностям w_1 и w_2 , пересекающимся в точках A и B , проведена их общая касательная CD (C и D — точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD , чем A). Прямая, проходящая через A , вторично пересекает w_1 и w_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P . Докажите, что PB — симедиана треугольника KPL (прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы).

Решение. Заметим, что треугольник ACD подобен треугольнику PKL . Действительно, $\angle ACD = \angle AKC$ как угол между касательной и хордой. Аналогично, $\angle CDA = \angle DLA$. Кроме того, из свойства касательной и секущей следует, что прямая AB пересекает CD в его середине, то есть, содержит медиану треугольника ACD .

Далее можно рассуждать разными способами.

Первый способ. Заметим, что $\angle DCB = \angle PKB, \angle CDB = \angle PLB$. Тогда при преобразовании подобия, переводящем треугольник ACD в треугольник PKL точка B перейдет в

B' — изогонально сопряженную B относительно треугольника PKL (про изогональное сопряжение можно прочитать, например, в книжках В.В. Прасолов «Задачи по планиметрии» или А.Г. Мякишев «Элементы геометрии треугольника»). Тогда прямая PB' содержит медиану треугольника PKL , а прямая PB — симедиана.

Второй способ. Докажем вспомогательное утверждение.

Точки P, C, B и D лежат на одной окружности, радиус которой равен радиусу окружности, описанной около треугольника ACD . Действительно, $\angle ABC = 180^\circ - \angle AKC$, $\angle ABD = 180^\circ - \angle ALD$, то $\angle CBD = 180^\circ - \angle CPD$, то есть точки P, C, B и D лежат на одной окружности. Равенство радиусов следует из равенства углов CAD и CPD .

Теперь перейдем непосредственно к доказательству утверждения задачи.

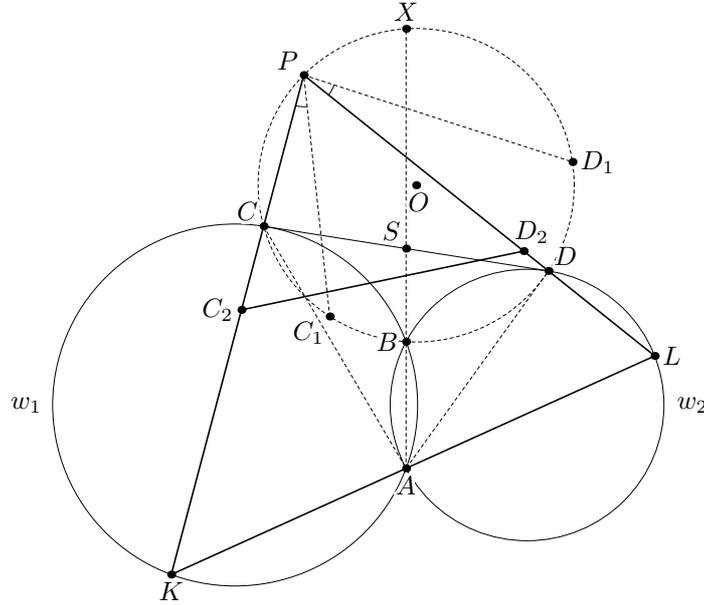


Рис. 5

Отразим треугольник ACD относительно точки S — середины отрезка CD . Тогда точка A перейдет в точку X , лежащую на описанной окружности треугольника CPD (см. вспомогательное утверждение). Пусть O — центр описанной окружности треугольника CPD , $\angle XOP = \alpha$.

Рассмотрим поворот с центром O , при котором точка X переходит в точку P . Пусть при этом C переходит в C_1 , а D — в D_1 . Тогда $\angle C_1PC = \angle D_1PD = \frac{1}{2}\alpha$. Тогда при повороте с центром в точке P и углом $\frac{1}{2}\alpha$, точки C_1 и D_1 перейдут в точки C_2 и D_2 соответственно, лежащие на прямых PC и PD . Поскольку композицией данных поворотов на углы α и $\frac{1}{2}\alpha$ в противоположных направлениях будет являться поворот на угол $\frac{1}{2}\alpha$, и $\angle XBP = \frac{1}{2}\alpha$, то прямая XB , содержащая медиану треугольника XCD перейдет в прямую PB , содержащую медиану треугольника PC_2D_2 . Итак, треугольники PD_2C_2 и PKL подобны и по-разному ориентированы. Следовательно, прямая PB , содержащую медиану треугольника PC_2D_2 , содержит симедиану треугольника PKL .

Заметим, что второй способ решения есть пошаговая реализация преобразования подобия, описанного в первом способе. Отметим также, что утверждение задачи верно при любом взаимном расположении точек A, K и L .

Материалы подготовили: А. Акопян, А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников, Д. Прокопенко, Д. Терешин.