Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двенадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 13 апреля 2014 года

Решения задач

8–9 класс

1. (*Ю. Блинков*) В треугольнике ABC: $\angle A = 45^\circ$, BH — высота, точка K лежит на стороне AC, причем $BC = CK$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABK совпадает с центром вневписанной окружности треугольника BCH. (*Вневписанной окружностью называется окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.*)

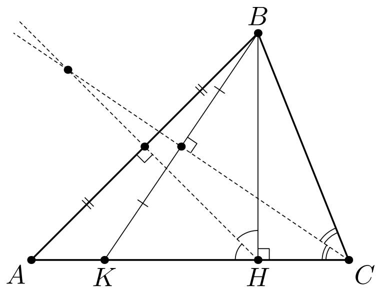

Рис. 8–9.1

Решение. Поскольку треугольник BCK — равнобедренный, то серединный перпендикуляр к стороне BK совпадает с биссектрисой угла ACB (см. рис. 8–9.1). Треугольник AHB — также равнобедренный, поэтому серединный перпендикуляр к стороне AB совпадает с биссектрисой угла AHB. Следовательно, центр описанной окружности треугольника ABK совпадает с точкой пересечения биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника BCH, то есть, с центром его вневписанной окружности.

2. (*А. Гаркавый, А. Хачатурян*) Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AB взята точка M так, что $AD = DM$. На стороне AD взята точка N так, что $AB = BN$. Докажите, что $CM = CN$.

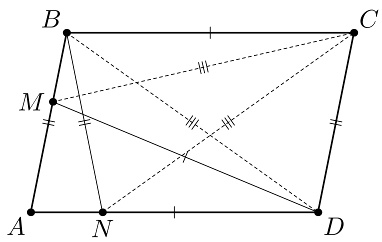

Рис. 8–9.2

Решение. Поскольку $ABCD$ — параллелограмм, то $DM = AD = BC$, следовательно, $DMBC$ — равнобокая трапеция (см. рис. 8–9.2). Аналогично, $BN = AB = CD$, то есть, $BNDC$ — также равнобокая трапеция. В равнобокой трапеции диагонали равны, следовательно, $CN = BD = CM$, что и требовалось.

Комментарий. Отметим, что точки M и N лежат на описанной окружности треугольника BCD.

3. (*А. Шаповалов, А. Заславский*) Существует ли выпуклый пятиугольник, в котором каждая диагональ равна какой-то стороне?

Ответ: да, существует, см., например, рис. 8–9.3а.

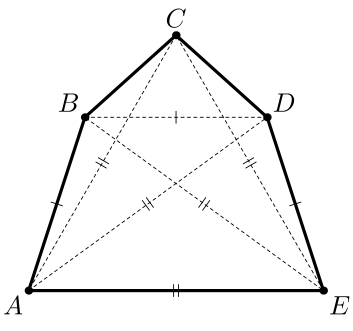

Рис. 8–9.3а

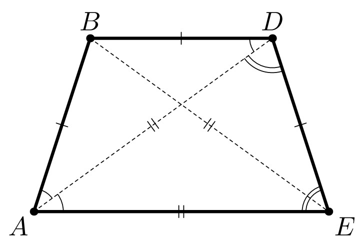

Рис. 8–9.3б

Решение. Рассмотрим пятиугольник $ABCDE$, изображенный на рис. 8–9.3а, то есть, такой пятиугольник, у которого диагонали AC, AD, BE и CE равны стороне AE, а диагональ BD равна сторонам AB и DE. Покажем, как он может быть получен.

Точка C является вершиной равностороннего треугольника ACE, а $ABDE$ — равнобокая трапеция, у которой $AB = BD = DE$ и $AD = BE = AE$. Искомой трапецией является трапеция, у которой $\angle A = \angle E = 72^\circ$, а диагонали AD и BE равны стороне AE. Действительно, $\angle ADE = \angle AED = 72^\circ$, $\angle DAE = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$, $\angle BDA = \angle DAE = 36^\circ$ и $\angle BAD = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$, то есть, $AB = BD = DE$.

Комментарий. Отметим, что A, B, D и E — четыре последовательных вершины правильного пятиугольника.

4. (*А. Гаркавый*) В треугольнике ABC серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекают сторону AC в точках P и Q соответственно, причем точка P лежит на отрезке AQ. Докажите, что описанные окружности треугольников PBC и QBA пересекаются на биссектрисе угла PBQ.

Решение. Пусть X — точка пересечения описанных окружностей треугольников PBC и QBA, а $\angle QBC = \angle BCQ = \alpha$ (см. рис. 8–9.4а). Тогда $\angle AQB = 2\alpha$ (как внешний в треугольнике BCQ). Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, получим, что $\angle PXB = \angle PCB = \alpha$ и $\angle AXB = \angle AQB = 2\alpha$. Следовательно, XP — биссектриса угла X в треугольнике AXB.

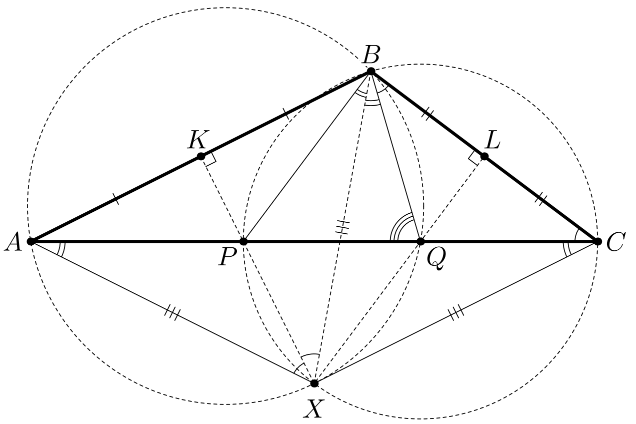

Рис. 8–9.4а

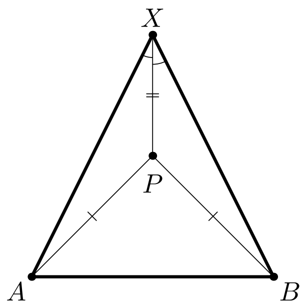

Рис. 8–9.4б

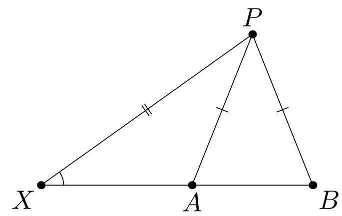

Рис. 8–9.4в

Докажем, что точки X, P и K лежат на одной прямой. Это можно сделать разными способами.

Первый способ. Серединный перпендикуляр PK к стороне AB треугольника AXB и биссектриса угла X пересекаются в середине дуги AB описанной окружности треугольника AXB. Следовательно, X, P и K лежат на одной прямой (иначе у прямых KP и PX было бы две точки пересечения, что невозможно).

Второй способ. Рассмотрим отдельно треугольник AXB (см. рис. 8–9.4б). В треугольниках AXP и BXP равны две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон. Следовательно, либо эти треугольники равны, либо $\angle PAX + \angle PBX = 180^\circ$ (см. рис. 8–9.4в). Второй случай невозможен, поскольку тогда сумма углов треугольника AXB будет больше 180°. Следовательно, $\triangle AXP = \triangle BXP$, откуда $AX = XB$, то есть, X лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB.

Аналогично можно доказать, что точки X, Q и L лежат на одной прямой.

Вернемся к решению задачи. Из доказанного следует, что $AX = XB = XC$, то есть, $\angle PBX = \angle XAC = \angle XCA = \angle QBX$, поэтому BX — биссектриса угла PBQ.

Комментарий. Заметим, что:
1. X — центр описанной окружности треугольника ABC;
2. X — центр вневписанной окружности треугольника PBQ.

Отметим, что каждый из этих фактов дает другой способ решения: можно определить точку X как центр описанной окружности треугольника ABC или как центр вневписанной окружности треугольника PBQ, и затем доказать, что она принадлежит обеим окружностям из условия.

5. (*Д. Прокопенко*) Отрезок AD — диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Через точку пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне BC, которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC.

Решение. Пусть X и Y — точки пересечения прямых BD и CD с прямой EF (см. рис. 8–9.5). Заметим, что углы ABD и ACD — прямые. Поэтому нам достаточно доказать, что BC — средняя линия треугольника XYD. Действительно, тогда $XB = DB$, то есть, треугольник XED — равнобедренный, откуда $XE = DE$. Аналогично, $YF = DF$, следовательно, $XY = XE + EF + FY = DE + EF + DF = 2BC$.

Итак, докажем, что BC — средняя линия. Заметим, что $BHCD$ — параллелограмм (BD и CH перпендикулярны AB, BH и CD перпендикулярны AC). Следовательно, отрезок DH делится стороной BC пополам. Тогда, в силу параллельности прямых BC и EF, получаем искомое.

Комментарий. В заключительной части решения было показано, что точка, симметричная H относительно середины стороны BC, лежит на описанной окружности треугольника ABC и диаметрально противоположна точке A.

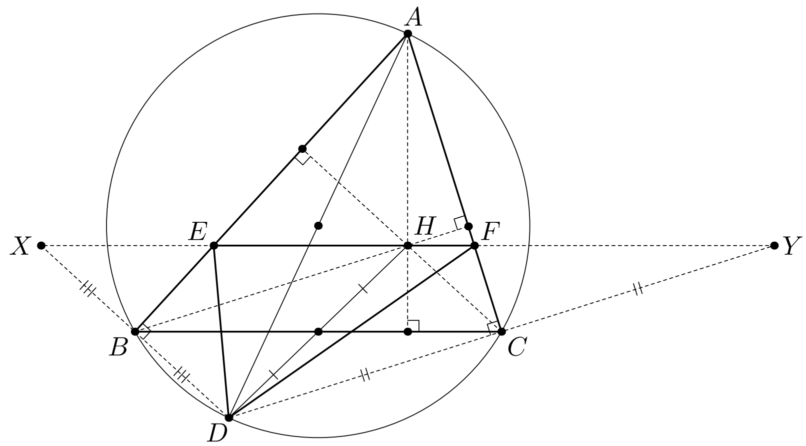

Рис. 8-9.5

6. (*К.Кноп*) Внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB взята точка M такая, что угол MAB на 15° больше угла MAC, а угол MCB на 15° больше угла MBC. Найдите угол BMC.

Ответ: 150°.

Решение. Пусть X — точка пересечения AM и высоты CH треугольника ABC (см. рис. 8–9.6а). Рассмотрим случай, когда точка X лежит на отрезке AM (в конце решения мы покажем, что другой случай невозможен). Из условия следует, что $\angle BAX = 30^\circ$. Тогда $\angle CXM = \angle AXH = 90^\circ - \angle XAH = 60^\circ$. Поскольку CH также является медианой треугольника ABC, то треугольник AXB — равнобедренный, то есть, $\angle BXH = 60^\circ$. Следовательно, и $\angle BXM = 60^\circ$.

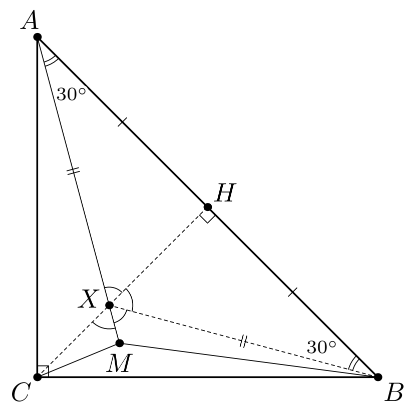

Рис. 8–9.6а

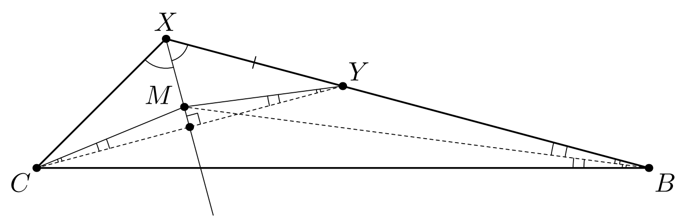

Рис. 8–9.6б

Рассмотрим отдельно треугольник CXB. В нем $\angle XCB = 45^\circ$, $\angle XBC = 15^\circ$, $\angle CXB = 120^\circ$ и XM — биссектриса угла CXB (см. рис. 8–9.6б). Докажем, что BM — биссектриса угла CBX. Обозначим $\angle MBC = \alpha$, тогда $\angle MCB = 15^\circ + \alpha$. Выберем на отрезке XB такую точку Y, что $\angle YCB = 15^\circ$, тогда $\angle XCY = 30^\circ$. Кроме того, $\angle XYC = 30^\circ$ (как внешний угол в треугольнике CYB), следовательно, треугольник CXY — равнобедренный.

Поскольку XM — биссектриса равнобедренного треугольника CXY, то она также является медианой и высотой, следовательно, CMY — также равнобедренный, откуда $\angle MYC = \angle MCY = \alpha$. С другой стороны, $\angle MBC = \alpha$, то есть, четырехугольник $CMYB$ — вписанный. Тогда $\angle MBY = \angle MCY = \alpha$, откуда $2\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 7,5^\circ$ и $\angle CMB = 150^\circ$.

Докажем, что точка X лежит на отрезке AM. Пусть это не так (см. рис. 8–9.6.в). Снова рассмотрим треугольник AXB отдельно и проведем отрезок CY так, что $\angle YCB = 15^\circ$. По условию, $\angle MCB = 15^\circ + \angle MBC$. Так как $\angle XCB = 30^\circ + \angle XBC$, то чтобы выполнялось условие, угол MBX должен быть на 15° больше MCX. Треугольник CMY — равнобедренный, следовательно, $\angle MCX = \angle MYX > \angle MBY$, то есть, такое расположение точек невозможно.

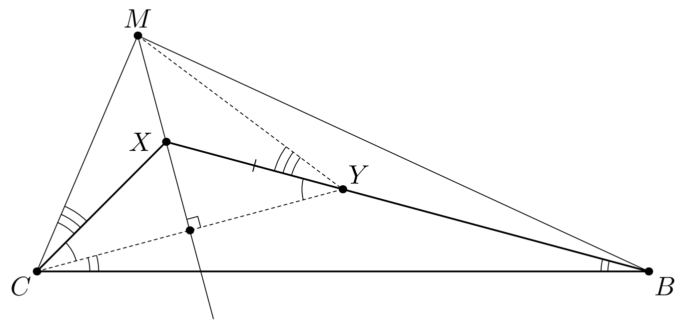

Рис. 8-9.6в

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников.

Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двенадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 13 апреля 2014 года

Решения задач

10–11 класс

1. (*Ю. Блинков*) В трапеции $ABCD$: $BC < AD$, $AB = CD$, K — середина AD, M — середина CD, CH — высота. Докажите, что прямые AM, CK и BH пересекаются в одной точке.

Решение. Заметим, что AM и CK — медианы треугольника ACD, следовательно, точка L их пересечения делит отрезок CK в отношении $2:1$ (см. рис. 10–11.1). Кроме того, $BC : KH = 2:1$, поскольку $KH = \frac{AD}{2} - \frac{1}{2}(AD-BC) = \frac{1}{2}BC$. Используя параллельность AD и BC получим, что BH делит отрезок CK в отношении $2:1$, то есть, проходит через точку L.

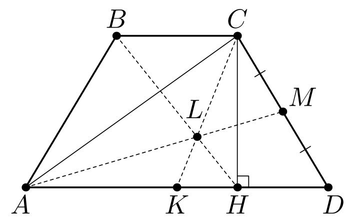

Рис. 10–11.1

2. (*А. Хачатурян*) Можно ли правильную треугольную призму разрезать на две равные пирамиды?

Ответ: да, можно.

Решение. Пусть M — середина AA'. Тогда пирамиды $A'B'BMC'$ и $C'CAMB$ равны (см. рис. 10–11.2). Это можно доказать различными способами.

Первый способ. Основания $AMC'C$ и $A'B'BM$ данных пирамид равны и грани $A'C'B'$ и ABC, являющиеся равными равносторонними треугольниками, примыкают к соответствующим сторонам оснований и перпендикулярны плоскостям оснований.

Второй способ. Одна пирамида получается из другой симметрией относительно прямой MO, где O — центр грани $BCC'B'$. Действительно, при этой симметрии точки A' и A, B' и C, C' и B переходят друг в друга.

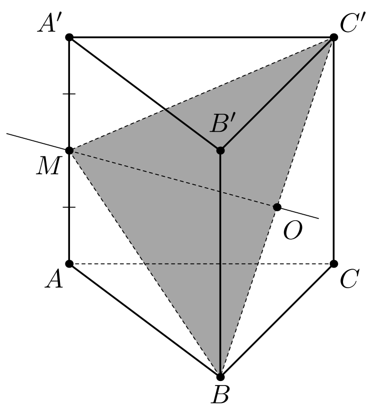

Рис. 10–11.2

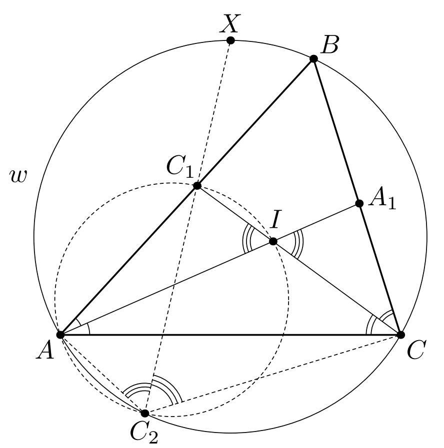

Рис. 10–11.3

3. (*Д. Швецов*) Биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Описанные окружности треугольников AIC_1 и CIA_1 повторно пересекают дуги AC и BC (не содержащие точек B и A соответственно) описанной окружности треугольника ABC в точках C_2 и A_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2 и C_1C_2 пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Докажем, что прямые C_1C_2 и A_1A_2 проходят через середину дуги ABC (см. рис. 10–11.3).

Пусть X — точка пересечения прямой C_1C_2 и описанной окружности w треугольника ABC. Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, следует, что $\angle AC_2X = \angle AC_2C_1 = \angle AIC_1$. Кроме того, $\angle AIC_1 = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$. Таким образом, $\angle AC_2X = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$. Поскольку $\angle AC_2C = 180^\circ - \angle B$, то $\angle AC_2X = \angle CC_2X$, то есть, X — середина дуги AC.

То, что прямая A_1A_2 также пересекает w в середине дуги ABC, доказывается аналогично.

4. (*А. Заславский*) Медианы AA_0, BB_0 и CC_0 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M, а высоты AA_1, BB_1 и CC_1 — в точке H. Касательная к описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ в точке C_1 пересекает прямую A_0B_0 в точке C'. Точки A' и B' определяются аналогично. Докажите, что A', B' и C' лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой MH.

Решение. Воспользуемся без доказательства следующими известными фактами:

1. Основания высот и медиан лежат на одной окружности w_1 (называемой окружностью девяти точек). При этом центр O_1 этой окружности лежит на прямой MH, содержащей также центр O описанной окружности w треугольника ABC (эта прямая называется прямой Эйлера).

2. Радикальная ось двух окружностей перпендикулярна их линии центров.

Подробнее про окружность девяти точек и про радикальную ось можно посмотреть в книгах В. В. Прасолов, «Задачи по планиметрии». — М.: МЦНМО, 2007 и Я. П. Понарин, «Элементарная геометрия. Том 1. Планиметрия». — М.: МЦНМО, 2008.

Рассмотрим утверждение задачи. Поскольку O и O_1 принадлежат прямой MH (то есть, MH — линия центров окружностей w и w_1), то достаточно доказать, что точки A', B' и C' принадлежат радикальной оси w и w_1 (см. рис. 10–11.4).

Докажем этот факт для точки C' (доказательство для остальных точек аналогично). Покажем, что CC' — касательная к окружности w. Это можно сделать различными способами.

Первый способ. Поскольку прямые CC_1 и A_0B_0 перпендикулярны и отрезок CC_1 делится A_0B_0 пополам, то точки C и C_1 симметричны относительно прямой B_0C', следовательно, $\angle C'CA_0 = \angle C'C_1A_0$ и $\angle CB_0A_0 = \angle C_1B_0A_0$.

Поскольку C_1C' — касательная к окружности w_1, то $\angle A_0B_0C_1 = \angle A_0C_1C'$. Используя симметрию точек C и C_1 относительно B_0C' и параллельность прямых AB и A_0B_0 получим, что $\angle BAC = \angle A_0B_0C = \angle C'B_0C_1 = \angle A_0C_1C' = \angle C'CA_0$, то есть, CC' — касательная к окружности w.

Второй способ. Воспользуемся тем, что описанная окружность и окружность девяти точек гомотетичны с центром в точке H и коэффициентом $\frac{1}{2}$. При этой гомотетии касательная к окружности w в точке C перейдет в касательную к окружности w_1 в точке T — середине отрезка CH. Эти касательные образуют с отрезком CC_1 равные углы. Кроме того, касательные к w_1 в точках T и C_1 также образуют с CC_1 равные углы. Следовательно, и касательные к окружностям w и w_1 в точках C и C_1 соответственно, образуют с CC_1 равные углы. Значит, точка пересечения касательных лежит на серединном перпендикуляре к CC_1, то есть, на A_0B_0.

Вернемся к решению задачи. В силу симметрии, $C'C = C'C_1$, то есть степени точки C' относительно окружностей w и w_1 равны. Следовательно, точка C' принадлежит радикальной оси этих окружностей, что и требовалось.

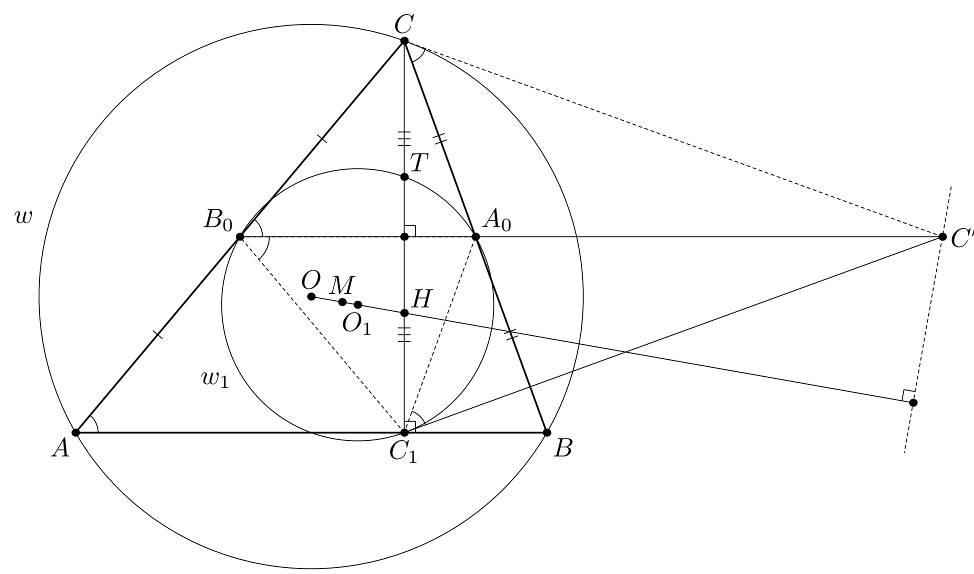

Рис. 10–11.4

Комментарий. Для доказательства того, что CC' — касательная, также можно было воспользоваться симметрией описанных окружностей треугольников $C_1B_0A_0$ и CB_0A_0 и гомотетией с центром в точке C и коэффициентом 2.

5. (*А. Заславский*) Дан правильный треугольник ABC, площадь которого равна 1, и точка P на его описанной окружности. Прямые AP, BP, CP пересекают соответственно прямые BC, CA, AB в точках A', B', C'. Найдите площадь треугольника $A'B'C'$.

Решение. Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, и суммы углов треугольника получим, что $\angle CAB = \angle ACB = \angle APB = \angle BPC = \angle APC' = \angle CPA' = 60^\circ$, $\angle PBC = \angle PAC = \angle PC'A$, $\angle PBA = \angle PCA = \angle PA'C$ (см. рис. 10–11.5). Следовательно, следующие пары треугольников подобны: BPC' и $A'PB$; $C'PA$ и APB'; $A'PC$ и CPB'.

Из первого подобия следует, что $BP^2 = C'P \cdot A'P$, из второго: $AP^2 = C'P \cdot B'P$, из третьего: $CP^2 = B'P \cdot A'P$. Вычислим площадь треугольника $A'B'C'$ как сумму площадей треугольников $C'B'P$, $C'A'P$ и $A'B'P$ (попутно используя тот факт, что углы при вершине P этих треугольников равны 120°).

$$S_{A'B'C'} = (C'P \cdot B'P + C'P \cdot A'P + A'P \cdot B'P)\frac{\sqrt{3}}{4} = (AP^2 + BP^2 + CP^2)\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

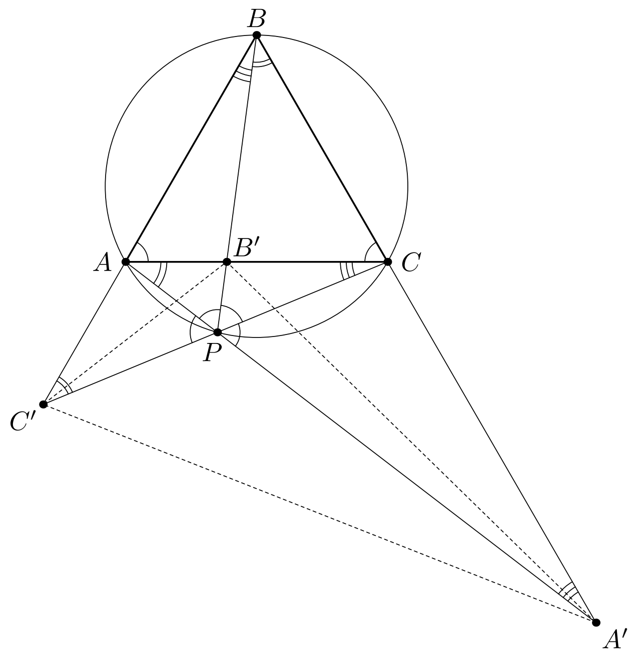

Рис. 10–11.5

Воспользуемся без доказательства известным фактом: для равностороннего треугольника ABC со стороной a и произвольной точки на его описанной окружности верно следующее равенство:

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 6R^2 = 2a^2. \qquad (*)$$

Тогда $S_{A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Поскольку $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 1$, то $S_{A'B'C'} = 2$.

Комментарий. Утверждение $(*)$ можно доказать, например, используя векторы. Кроме того, оно является частным случаем более общего утверждения: для правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ и точки P на его описанной окружности верно, что $\sum\limits_{i=1}^{n} PA_i^2 = 2nR^2$.

6. (*А. Акопян, П. Кожевников*) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно, а I_a и J_a — центры вневписанных окружностей треугольников ABC и ADC соответственно (вписанных в углы BAC и DAC соответственно). Докажите, что точка K пересечения прямых IJ_a и JI_a лежит на биссектрисе угла BCD.

Решение. Докажем,что точка K лежит внутри четырехугольника $ABCD$ (см. рис. 10–11.6а). Заметим, что прямые II_a и JJ_a пересекаются в точке A, поскольку точки I и I_a лежат на биссектрисе угла BAC, а J и J_a лежат на биссектрисе угла DAC.

Поскольку $\angle ICJ + \angle ICI_a = \dfrac{\angle BCD}{2} + 90^\circ < 180^\circ$ и аналогично $\angle JCI + \angle JCJ_a < 180^\circ$, то точка K лежит внутри угла ICJ.

Далее, заметим, что $\angle ICI_a = \angle JCJ_a = 90^\circ$. Следовательно, биссектрисы углов ICJ и I_aCJ_a лежат на одной прямой. Нам потребуется следующая лемма:

Лемма. *Пусть биссектрисы углов XOX' и YOY' лежат на прямой l. Z — точка пересечения прямых XY и $X'Y'$, Z' — точка пересечения прямых XY' и XY'. Тогда прямые OZ и OZ' симметричны относительно l.*

Применив эту лемму к углам ICJ и I_aCJ_a, получим, что $\angle ICA = \angle JCK$, то есть, $\angle DCK = \angle DCJ + \angle JCK = \dfrac{\angle DCA}{2} + \angle ICA = \dfrac{\angle DCA}{2} + \dfrac{\angle BCA}{2} = \dfrac{\angle DCB}{2}$, что и требовалось.

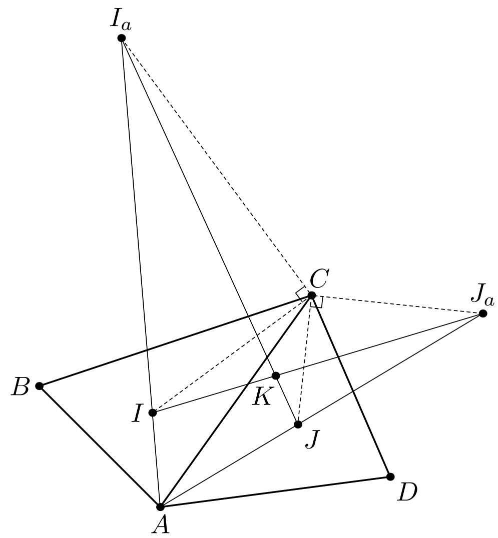

Рис. 10–11.6а

Докажем лемму для случая, когда углы XOY и $X'OY'$ — прямые. Это можно сделать разными способами.

Первый способ. Опустим перпендикуляры OM, OK, OL и OP на прямые XY, $X'Y$, XY' и $X'Y'$ соответственно (см. рис. 10–11.6б).

Покажем, что точки M, K, L и P лежат на одной окружности. Для этого достаточно доказать, что $\angle MKP = \angle MLP$. Обозначим $\angle MKY = \alpha$, $\angle PKO = \beta$. Четырехугольник $MKOY$ — вписанный, поэтому $\angle MOY = \angle MKY = \alpha$. Поскольку $XO \perp OY$ и $OM \perp XY$, то $\angle MXO = \angle MOY = \alpha$. И, наконец, из того, что $MXLO$ — вписанный, получим, что $\angle MLO = \angle MXO = \alpha$.

Четырехугольник $OKX'P$ — вписанный, то $\angle OX'P = \angle OKP = \beta$. Поскольку $X'O \perp Y'O$ и $OP \perp X'Y'$, то $\angle POY' = \angle OX'Y' = \beta$. И, наконец, из того, что $OLPY'$ — вписанный, получим, что $\angle Y'LP = \angle POY' = \beta$.

Таким образом, $\angle MKP = 90^\circ + \alpha + \beta = \angle MLP$, следовательно, $MKLP$ — вписанный четырехугольник, что и требовалось.

Тогда $\angle MKL + \angle MPL = 180^\circ$.

Заметим, что $\angle MKL = \alpha + 90^\circ + \angle OKL = \angle OYZ + \angle OZ'L$ $(*)$ (в силу вписанности четырехугольников $YMKO$ и $OKZ'L$). Кроме того, $\angle MPL = \angle MPO + \angle OPL = \angle MZO + \angle OY'Z'$ $(**)$ (поскольку четырехугольники $MOPZ$ и $OLPY'$ — вписанные).

Кроме того, $\angle OYZ + \angle MZO = 180^\circ - \angle ZOY$ и $\angle OY'Z' + \angle OZ'L = 180^\circ - \angle Z'OY'$. Сложив левые и правые части этих равенств и левые и правые части равенств $(*)$ и $(**)$ соответственно, получим, что $\angle ZOY + \angle Z'OY' = 180^\circ$. Следовательно, прямые $Z'O$ и ZO симметричны относительно биссектрисы углов XOX' и YOY'. Другие случаи расположения точек рассматриваются аналогично.

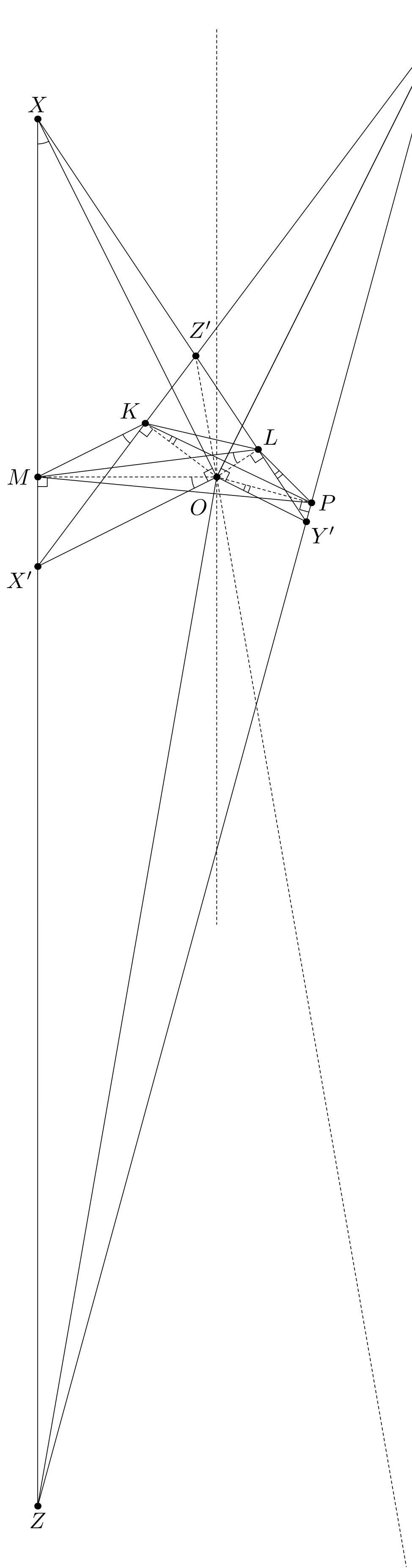

Рис. 10–11.6б

Второй способ. Пусть T, U, V, W — точки пересечения прямых II_a и CJ_a, IJ_a и CJ, I_aJ_a и CJ, CI_a и IJ_a соответственно (см. рис. 10–11.6в). Используем тот факт, что при центральной проекции сохраняется двойное отношение четырех точек. Рассмотрев центральную проекцию прямой II_a на прямую CJ с центром J_a и центральную проекцию прямой CJ на прямую IJ_a с центром I_a, получаем равенство двойных отношений $(ITI_aA) = (UCVJ) = (UWJ_aK)$. Воспользуемся тем, что

$$(ITI_aA) = \frac{II_a}{I_aT} : \frac{IA}{TA} = \frac{\sin ICI_a}{\sin I_aCT} : \frac{\sin ICA}{\sin TCA}, \text{ а } (UWJ_aK) = \frac{UJ_a}{WJ_a} : \frac{UK}{WK} = \frac{\sin UCJ_a}{\sin WCJ_a} : \frac{\sin UCK}{\sin WCK}.$$

Также заметим, что $\sin I_aCT = \sin I_aCJ_a$, $\sin TCA = \sin J_aCA$, $\sin WCJ_a = \sin I_aCJ_a$, $\sin WCK = \sin I_aCK$, $\sin UCK = \sin JCK$ и, наконец, $\sin ICI_a = \sin JCJ_a = \sin 90^\circ = 1$. Следовательно, $\frac{\sin J_aCA}{\sin ICA} = \frac{\sin I_aCK}{\sin JCK}$.

Положим $\angle J_aCI = \angle I_aCJ = t$, $\angle ICA = x$, а $\angle JCK = y$. Тогда $\frac{\sin(t-x)}{\sin x} = \frac{\sin(t-y)}{\sin y}$, откуда (используя формулу синуса разности) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y$, то есть, $\angle ICA = \angle JCK$.

Комментарий. 1. Про двойные отношения можно прочитать в в книге В. В. Прасолов, «Задачи по планиметрии». — М.: МЦНМО, 2007.

2. Заметим, что фактически мы доказали лемму не в частном случае, а в общем. Действительно, во втором способе решения мы использовали только то, что углы XOY и $X'OY'$ равны, а в первом способе аналогичное рассуждение проходит, если проводить прямые под данным (ориентированным) углом.

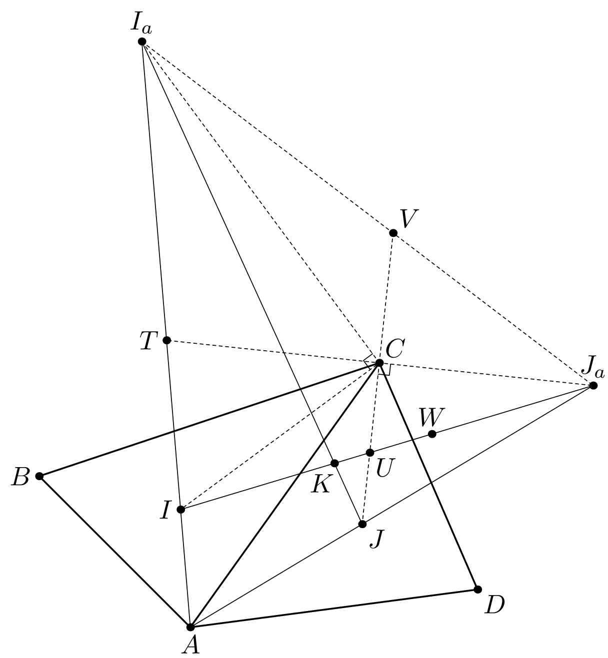

Рис. 10–11.6в

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников.