Двенадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Четырнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 17 апреля 2016 года

Решения задач

8–9 класс

1. (*А. Блинков*) В шестиугольнике равны углы, три главные диагонали равны между собой и шесть остальных диагоналей также равны между собой. Верно ли, что у него равны стороны?

Ответ: нет, неверно.

Решение. Рассмотрим шестиугольник $ABCDEF$ с равными углами, у которого стороны равны через одну, а соседние — не равны (см. рис. 8–9.1а, б). Построить его можно, отрезав от равностороннего треугольника, три меньших равных равносторонних треугольника (см. рис. 8–9.1а). Тогда в полученном шестиугольнике углы равны, стороны равны через одну, а противолежащие стороны параллельны.

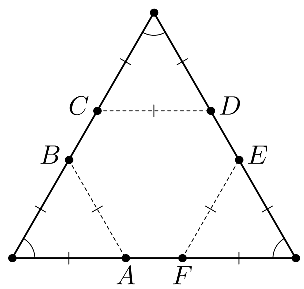


Рис. 8–9.1а

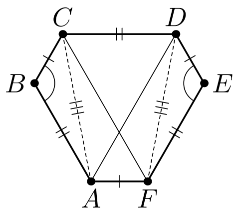
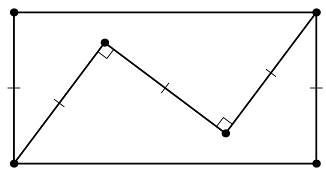


Рис. 8–9.1б

Докажем, что он удовлетворяет условию. Действительно, малые диагонали равны из равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними, например, $\triangle ABC = \triangle FED$ (см. рис. 8–9.1б). Равенство главных диагоналей, например, AD и CF, следует из того, что четырехугольник $ACDF$ — равнобокая трапеция.

Комментарий. Рассмотренный нами шестиугольник называется полуправильным равноугольным.

2. (*Н. Стрелкова*) В прямоугольнике проведена ломаная, соседние звенья которой перпендикулярны и равны меньшей стороне прямоугольника (см. рис). Найдите отношение сторон прямоугольника.



Ответ: 1 : 2.

Решение. Пусть нам дан прямоугольник $ABCD$ и ломаная $AKLC$.

Первый способ. Достроим прямоугольный равнобедренный треугольник KLC до квадрата $KECL$ (см. рис. 8–9.2а). Тогда точки A, K и E лежат на одной прямой. Следовательно, прямоугольные треугольники AEC и ADC равны по гипотенузе и катету. Поэтому, $AD = AE = 2AK = 2AB$.

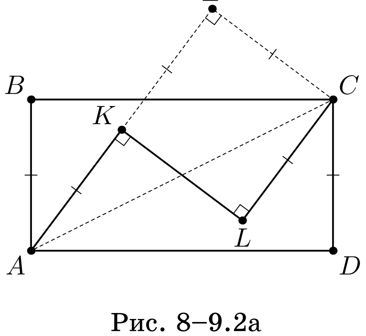


Рис. 8–9.2а

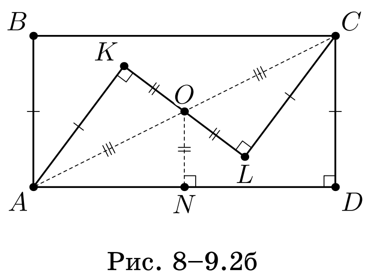


Рис. 8–9.2б

Второй способ. Заметим, что $AKCL$ — параллелограмм, следовательно, точка O пересечения его диагоналей делит каждую из диагоналей пополам. Пусть ON — перпендикуляр к стороне AD. Тогда ON — средняя линия треугольника ACD, следовательно, $ON = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}KL = OK$. То есть, прямоугольные треугольники AKO и ANO равны по гипотенузе и катету, откуда $AB = AK = AN = \frac{1}{2}AD$.

Комментарий. Отметим, что AC — биссектриса угла KAD.

3. (*М. Волчкевич*) Окружность с центром O проходит через концы гипотенузы прямоугольного треугольника и пересекает его катеты в точках M и K. Докажите, что расстояние от точки O до прямой MK равно половине гипотенузы.

Решение. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник, точки L и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на прямые AB и MK соответственно (см. рис. 8–9.3а).

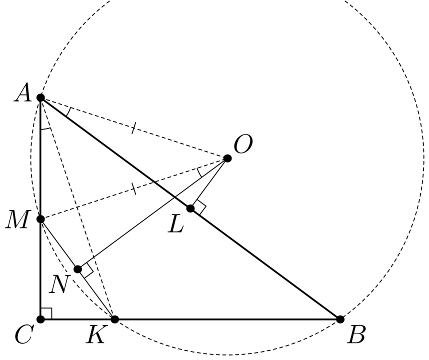


Рис. 8–9.3а

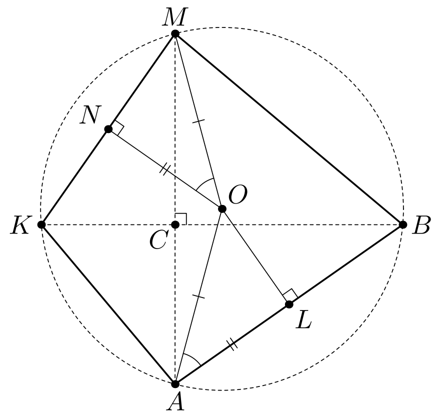


Рис. 8–9.3б

Докажем, что треугольники MON и OAL равны, откуда и будет следовать утверждение задачи. Заметим, что гипотенузы у них равны, как радиусы, то есть достаточно доказать равенство углов MON и OAL.

Пусть $\angle MON = \alpha$, тогда центральный угол MOK равен 2α, а соответствующий ему вписанный угол MAK равен α. Далее, вписанный в окружность угол AKB равен $90^\circ + \alpha$ как внешний угол треугольника CAK. Следовательно, центральный угол AOB, опирающийся на меньшую дугу AB равен $180^\circ - 2\alpha$, то есть $\angle OAL = \angle OAB = \alpha$, что и требовалось.

Комментарий. Отметим, что задача и ее решение аналогичны формулировке и доказательству следующего известного факта: если во вписанном в окружность четырехугольнике диагонали перпендикулярны, то расстояние от центра окружности до его стороны равно половине противолежащей стороны (см. рис. 8–9.3б). В нашем же случае, хорды AM и BK окружности являются перпендикулярными сторонами четырехугольника.

4. (*Д. Швецов*) Пусть M и N — середины гипотенузы AB и катета BC прямоугольного треугольника ABC соответственно. Вневписанная окружность треугольника ACM касается стороны AM в точке Q, а прямой AC — в точке P. Докажите, что точки P, Q и N лежат на одной прямой.

Решение. Пусть D — центр вневписанной окружности треугольника ACM, тогда P и Q — проекции точки D на прямые AC и AB соответственно (см. рис. 8–9.4а). Так как MN — медиана равнобедренного треугольника BMC, проведенная к основанию, то MN — биссектриса угла BMC, поэтому точка D лежит на прямой MN. Кроме того, MN — средняя линия треугольника ABC, значит, $MN \parallel AC$. Таким образом, $PCND$ — прямоугольник.

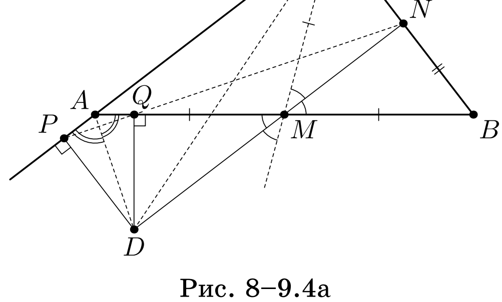


Рис. 8–9.4а

Докажем, что его диагональ PN перпендикулярна AD, откуда и будет следовать утверждение задачи.

Действительно, пусть $\angle AMD = \angle CMN = \angle ACM = \alpha$, тогда $\angle PAD = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$, а $\angle APN = \angle PCD = \dfrac{\alpha}{2}$ (CD — биссектриса угла ACM). Следовательно, $\angle PAD + \angle APN = 90^\circ$, поэтому $AD \perp PN$. Поскольку точка Q симметрична точке P относительно прямой AD, то Q лежит на PN, что и требовалось.

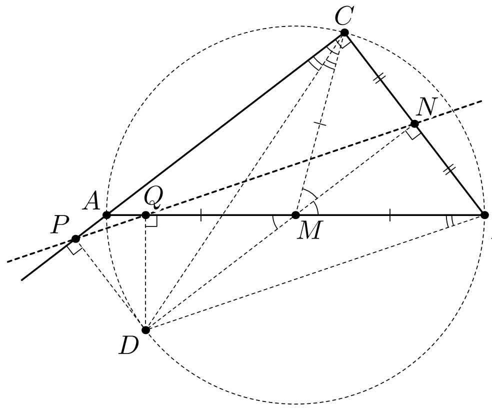


Рис. 8–9.4б

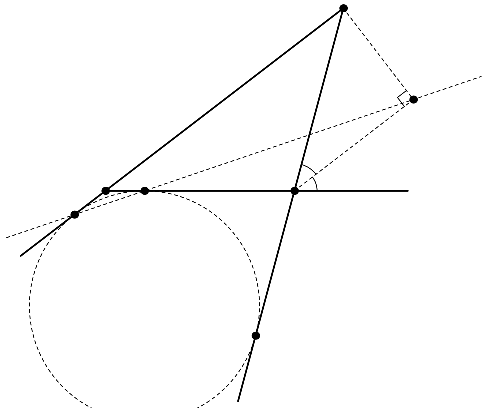


Рис. 8–9.4в

Комментарии. 1. Заметим, что DN — серединный перпендикуляр к стороне BC, следовательно, $\angle ABD = \angle DCM = \angle ACD$ (см. рис. 8–9.4б). Откуда следует другое решение задачи: точки A, C, B и D лежат на одной окружности, тогда точки P, Q и N лежат на прямой Симсона точки D.

2. Также решение задачи можно получить из следующего факта: проекция вершины треугольника на биссектрису внешнего угла и точки касания вневписанной окружности этого треугольника лежат на одной прямой (см. рис. 8–9.4в). Это один из случаев так называемой **«задачи 255»** (классическая задача, которая была под этим номером в задачнике 9–11 И. Ф. Шарыгина).

3. Заметим, что задачу можно было решить с помощью теоремы Менелая.

5. (*Р. Крутовский*) Точки I_A, I_B, I_C — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC, AC и AB соответственно. Перпендикуляр из I_A на AC пересекает перпендикуляр из I_B на BC в точке X_C. Аналогично определяются точки X_A и X_B. Докажите, что прямые I_AX_A, I_BX_B и I_CX_C пересекаются в одной точке.

Решение. Будем пользоваться без доказательства следующими известными фактами:

1. *Биссектрисы треугольника являются высотами треугольника, образованного центрами его вневписанных окружностей.*

2. *Прямые, проходящие через вершины треугольника перпендикулярно соответствующим сторонам его ортотреугольника, пересекаются в центре описанной окружности данного треугольника.*

3. *Расстояние от вершины треугольника до его ортоцентра в два раза больше, чем расстояние от центра описанной окружности до середины противолежащей стороны.*

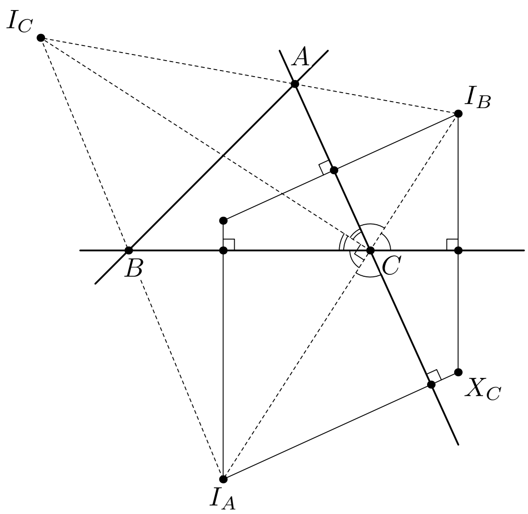


Рис. 8–9.5а

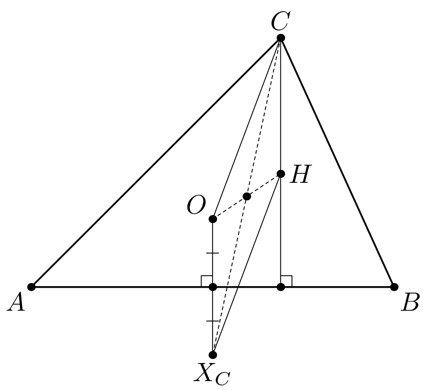


Рис. 8–9.5б

Так как центры вневписанных окружностей равноудалены от прямых, содержащих стороны треугольника, то прямая I_AX_C симметрична прямой, проходящей через I_A и перпендикулярной BC относительно прямой I_AI_B. Аналогично рассматривается симметрия прямой I_BX_C относительно прямой I_AI_B. То есть, точка X_C симметрична точке пересечения перпендикуляров к сторонам BC и AC треугольника, проведенных из точек I_A и I_B соответственно относительно прямой I_AI_B. Аналогично можно определить точки X_A и X_B.

Заметим, что треугольник ABC является ортотреугольником треугольника $I_AI_BI_C$ (*факт* 1). Тогда перпендикуляры, проведенные из вершин I_A, I_B и I_C треугольника $I_AI_BI_C$ к прямым BC, AC и AB соответственно пересекаются в центре окружности, описанной около треугольника $I_AI_BI_C$ (*факт* 2).

Сменив обозначения на более привычные, получим, что задача сводится к доказательству следующего факта.

В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, точка X_C симметрична O относительно стороны AB. Аналогично определяются точки X_A и X_B. Тогда AX_A, BX_B и CX_C пересекаются в одной точке.

Докажем, что, например, CX_C проходит через середину отрезка OH, где H — ортоцентр треугольника ABC (см. рис. 8–9.5б).

Действительно, учитывая *факт* 3, получим, что CX_C является диагональю параллелограмма COX_CH, то есть проходит через середину отрезка OH. Для двух других прямых доказательство аналогично.

Следовательно, AX_A, BX_B, CX_C, то есть прямые I_AX_A, I_BX_B, I_CX_C из условия задачи пересекаются в одной точке, что и требовалось.

6. (*А. Заславский*) Дан квадратный лист бумаги со стороной 2016. Можно ли, согнув его не более десяти раз, построить отрезок длины 1?

Ответ: да, можно.

Решение. Заметим, что мы можем поделить пополам любой отрезок, совместив его концы. Кроме того, можно перегнуть бумагу по прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данной прямой. Иными словами, мы умеем строить середины отрезков и перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку. Воспользуемся при решении задачи этими построениями и тем, что $2016 = 32 \cdot 63$.

Перегнем квадрат $ABCD$ по диагонали BD, а затем шесть раз по перпендикулярным ей прямым так, что эта диагональ разделится на 64 равных части. Пусть X_1 и X_2 лежат на диагонали BD, причем $BX_1 = X_1X_2 = \frac{1}{64}BD$ (см. рис. 8–9.6).

Пусть прямая AX_1 пересекает BC в точке Y. Тогда по теореме о пропорциональных отрезках $\frac{BY}{BC} = \frac{BY}{AD} = \frac{BX_1}{X_1D} = \frac{1}{63}$. Рассмотрев точку Z — проекцию X_2 на BC, получим, что $\frac{BZ}{BC} = \frac{BX_2}{BD} = \frac{1}{32}$. Поэтому, перегнув по прямым AX_1 и X_2Z, а затем по прямой, проходящей через Y и перпендикулярной BC, получим отрезок длины $2BY - BZ = 1$.

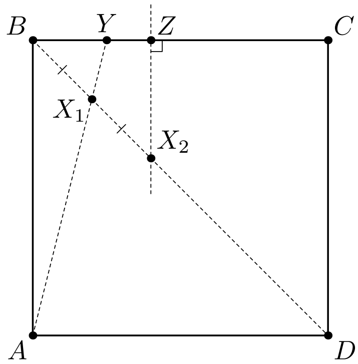


Рис. 8–9.6

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский.

Решения задач

10–11 класс

1. (*А. Якубов*) Прямая, проходящая через центр I вписанной окружности треугольника ABC, перпендикулярна AI и пересекает стороны AB и AC в точках C' и B' соответственно. В треугольниках $BC'I$ и $CB'I$ провели высоты $C'C_1$ и $B'B_1$ соответственно. Докажите, что середина отрезка B_1C_1 лежит на прямой, проходящей через точку I и перпендикулярной BC.

Решение. Пусть IH — высота треугольника BIC (см. рис. 10–11.1а, б). Докажем, что четырехугольник C_1IB_1H — параллелограмм, откуда и будет следовать утверждение задачи. Это можно сделать различными способами.

Первый способ. Заметим, что $\angle AIC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$. Следовательно, $\angle B'IC = \frac{1}{2}\angle B$. Аналогично доказывается, что $\angle C'IB = \frac{1}{2}\angle C$. То есть, треугольники BIC, $BC'I$ и $IB'C$ — подобны (см. рис. 10–11.1а).

Поскольку IH и $B'B_1$ — соответствующие высоты в подобных треугольниках, то $\frac{BH}{HC} = \frac{IB_1}{CB_1}$, откуда следует, что $HB_1 \parallel BI$. Аналогично, $HC_1 \parallel CI$, то есть, C_1IB_1H — параллелограмм, что и требовалось.

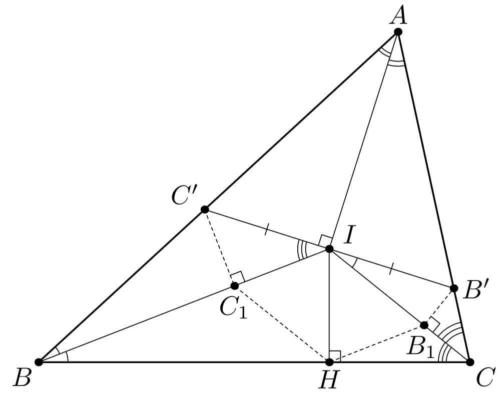


Рис. 10–11.1а

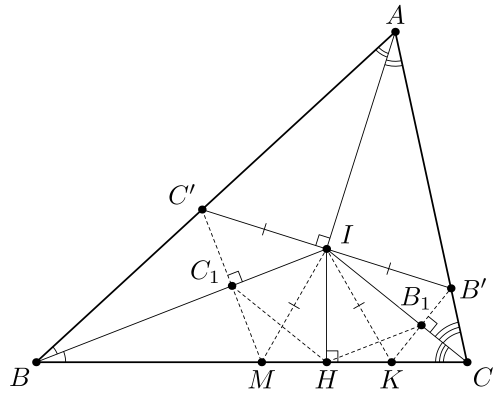


Рис. 10–11.1.б

Второй способ. Пусть M и K — точки пересечения BC с прямыми $C'C_1$ и $B'B_1$ соответственно (см. рис. 10–11.1б). Тогда треугольники $C'BM$ и $B'CK$ — равнобедренные, откуда C_1 и B_1 — середины отрезков $C'M$ и $B'K$ соответственно. Кроме того, $IM = IC' = IB' = IK$. Следовательно, треугольник MIK — равнобедренный, откуда $MH = HK$.

Заметим, что точки I, C_1, H и B_1 являются серединами сторон четырехугольника $C'MKB'$, то есть образуют параллелограмм.

2. (*Ф. Нилов*) Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Прямые A_2A_3 и A_5A_6 пересекаются в точке X, а прямые A_3A_5 и A_1A_6 — в точке Y. Докажите, что прямые A_1A_2 и XY параллельны.

Решение. Докажем, что $\angle A_2A_1Y + \angle XYA_1 = 180^\circ$, откуда и будет следовать утверждение задачи. Рассмотрим окружность, описанную около данного семиугольника (см. рис. 10-11.2). Поскольку четырехугольник $A_1A_2A_3A_6$ вписанный, то $\angle A_2A_1A_6 = 180^\circ - \angle A_2A_3A_6 = \angle XA_3A_6$. Теперь достаточно доказать, что четырехугольник XA_3A_6Y вписанный.

Заметим, что $\angle A_3XA_6 = \angle A_2XA_6 = \frac{1}{2}\left(\smile A_2A_1A_6 - \smile A_3A_4A_5\right) = \frac{\pi}{7}$, а $\angle A_3YA_6 = \angle A_3YA_1 = \frac{1}{2}\left(\smile A_1A_2A_3 - \smile A_6A_5\right) = \frac{\pi}{7}$, то есть четырехугольник XA_3A_6Y вписанный, что и требовалось.

Комментарий. 1. Решение можно записать короче, используя понятие антипараллельности. Действительно, отрезки A_1A_2и A_3A_6 антипараллельны относительно прямых A_1Y и A_2X. То же самое было доказано про отрезки A_3A_6 и XY относительно тех же прямых. Из этого следует параллельность A_1A_2 и XY.

2. Отметим, что утверждение задачи следует из теоремы Паскаля, примененной к вырожденному шестиугольнику $A_1A_2A_3A_5A_5A_6$. Подробнее про теорему Паскаля см., например, В. В. Прасолов «Задачи по планиметрии», глава 6.

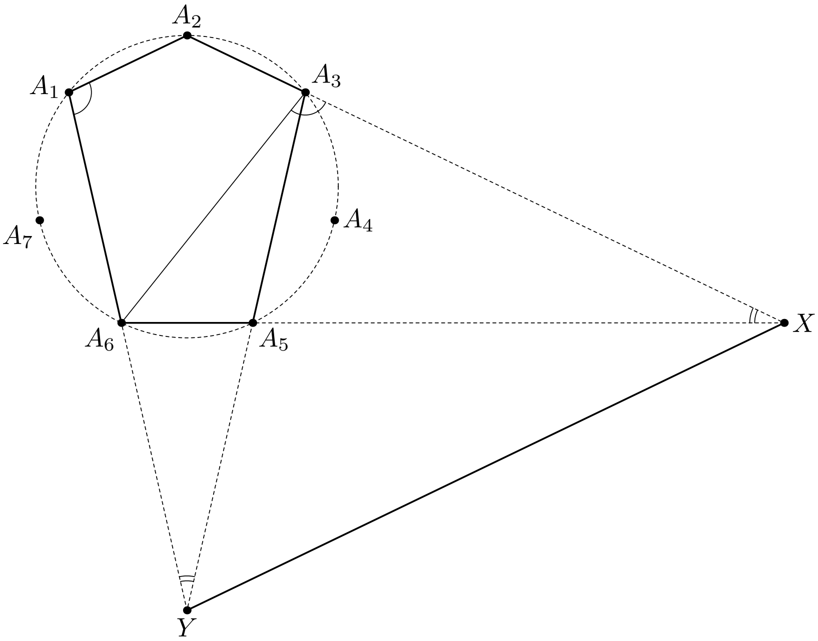
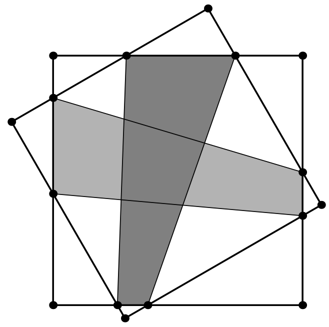


Рис. 10–11.2



3. (*Л. Штейнгарц*) Два квадрата расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что площади заштрихованных четырехугольников равны.

Решение. Обозначим точки пересечения сторон квадратов и продлим их стороны (см. рис. 10–11.3).

Заметим, что заштрихованные четырехугольники $KDLB$ и B_1MD_1P — трапеции. Докажем, что их диагонали B_1D_1 и BD равны и перпендикулярны. Тогда, аналогичным образом рассмотрев другую пару диагоналей (MP и LK), получим, что диагонали трапеций соответственно равны и пересекаются под одним и тем же углом, откуда, поскольку площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними, и будет следовать утверждение задачи.

Рассмотрим параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Заметим, что соответствующие стороны этих параллелограммов перпендикулярны, значит, углы параллелограммов равны. Кроме того, соответствующие высоты параллелограммов равны сторонам данных квадратов, то есть также соответственно равны.

Следовательно, параллелограммы равны и совмещаются композицией поворота на 90° и параллельного переноса (то есть поворотом), а соответствующие диагонали BD и B_1D_1 параллелограммов равны и перпендикулярны.

Комментарий. Отметим, что, поскольку у данных трапеций высоты одинаковы, то $BL + DK = B_1M + D_1P$.

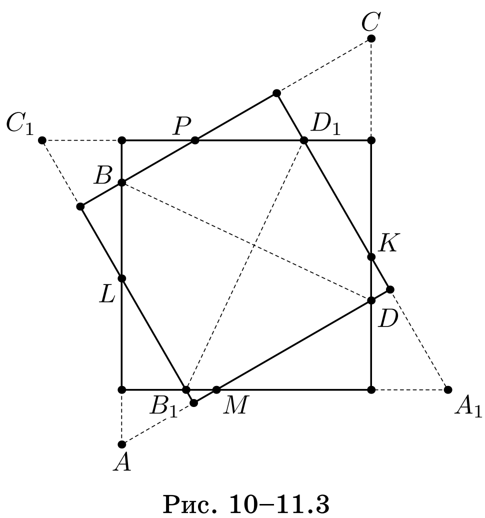


Рис. 10–11.3

4. (*Д. Мухин, жюри*) В выпуклой n-угольной призме равны все боковые грани. При каких n эта призма прямая?

Ответ: при всех $n \neq 4$.

Решение. Покажем, что при $n = 4$ призма может быть и наклонной. Действительно, достаточно рассмотреть, например, четырехугольную призму, у которой все грани — равные ромбы (такая фигура называется ромбоидом, см. рис. 10–11.4а).

Теперь докажем, что в остальных случаях ($n = 3$ и $n > 4$) призма обязательно будет прямой.

Пусть это не так, то есть боковые грани призмы — равные параллелограммы, не являющиеся прямоугольниками. Тогда вершины основания являются вершинами трехгранных углов двух типов:

1) с двумя равными плоскими углами;

2) с двумя плоскими углами, в сумме дающими 180°.

В первом случае проекция общего ребра для этих углов принадлежит прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла многоугольника в основании, а во втором — внешнего.

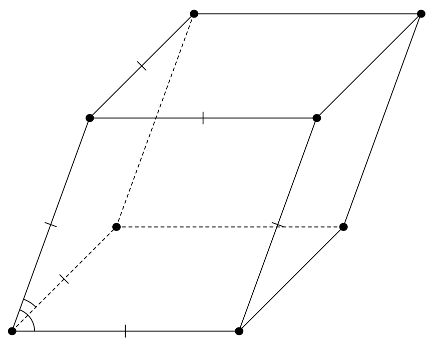


Рис. 10–11.4а

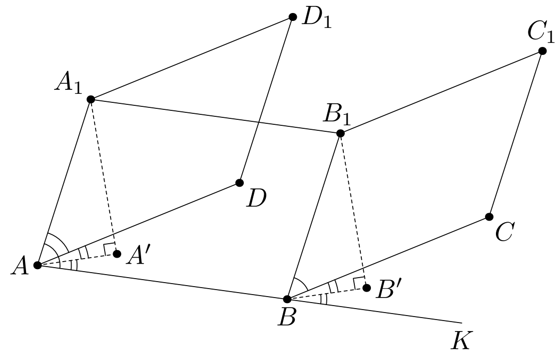


Рис. 10–11.4б

Заметим, что соседние вершины основания — разных типов. Действительно, поскольку проекции параллельных прямых — параллельны, то, в противном случае, мы получим параллельность биссектрис двух соседних внутренних или внешних углов выпуклого многоугольника, что невозможно.

Рассмотрим любые три последовательные грани: AA_1D_1D, AA_1B_1B и BB_1C_1C. Пусть A' и B' — проекции A_1 и B_1 соответственно на плоскость основания призмы, причем A' принадлежит прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла DAB многоугольника в основании, а B' — внешнего угла CBK (см. рис. 10–11.4б). Тогда прямые AA' и BB' параллельны, то есть $\angle A'AK = \angle B'BK$, откуда $\angle DAB = \angle CBK$, следовательно, прямые AD и BC параллельны.

Итак, мы доказали, что у многоугольника в основании призмы стороны через одну параллельны. Учитывая его выпуклость, получим, что он является параллелограммом, а это противоречит нашему предположению.

Комментарий. Отметим, что условие выпуклости призмы является существенным: при $n > 4$ существуют невыпуклые (но не прямые) призмы, удовлетворяющие условию.

5. (*Ю. Блинков*) Из точки A к окружности w проведена касательная AD и произвольная секущая, пересекающая окружность в точках B и C (B лежит между точками A и C). Докажите, что окружность, проходящая через точки C и D и касающаяся прямой BD, проходит через фиксированную точку (отличную от D).

Решение. Проведем из точки A вторую касательную AE к окружности w (см. рис. 10–11.5). Пусть M — середина отрезка DE.

Докажем, что окружность, проходящая через точки C и D и касающаяся прямой BD, проходит через точку M или, что то же самое, окружность, описанная около треугольника DCM, касается прямой BD.

Воспользуемся основным свойством *симедианы* (прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы треугольника):

Прямая, проходящая через вершину треугольника и точку пересечения касательных к описанной около него окружности, проведенных из двух других вершин, содержит си-

медиану треугольника. Подробнее о свойствах симедианы см., например, В.В. Прасолов «Задачи по планиметрии», глава 5, *параграф* 13.

Рассмотрим треугольник DCE. В нем CM — медиана, а CA — симедиана.

Следовательно, $\angle BCE = \angle DCM$. С другой стороны, $\angle BCE = \angle BDE$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). То есть $\angle BDE = \angle DCM$, откуда следует, что BD — касательная к окружности, описанной около треугольника DCM.

Итак, все окружности проходят через фиксированную точку M, что и требовалось.

Комментарий. Также возможно решение с помощью инверсии. При инверсии относительно окружности с центром в точке D и радиусом DA окружность w перейдет в прямую, параллельную AD, а точки B' и C' (образы точек B и C) будут лежать на окружности, проходящей через точки A и D, то есть AD и $B'C'$ — основания равнобокой трапеции. Далее, окружность, проходящая через точку C и касающаяся BD, перейдет в прямую l, проходящую через C' и параллельную прямой $B'D$. Осталось воспользоваться тем, что прямая l проходит через точку A', симметричную точке A относительно $B'C'$. Учитывая, что окружность w, а, значит, и прямая $B'C'$ — фиксирована, получим, что точка A' также фиксирована. Следовательно, все окружности, проходящие через точку C и касающиеся BD, проходят через фиксированную точку (образ точки A' при указанной инверсии).

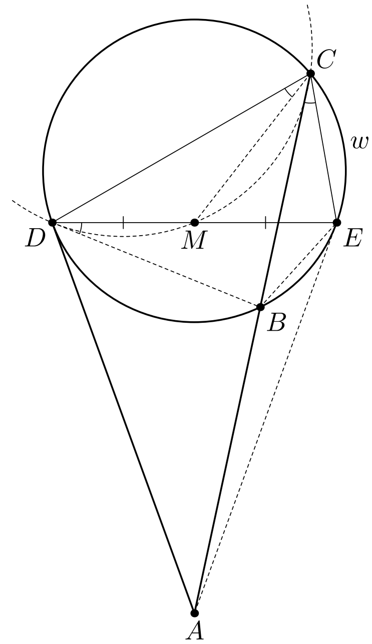


Рис. 10–11.5

6. (*Д. Креков*) Дан остроугольный треугольник ABC. Пусть A' — точка, симметричная A относительно BC, O_A — центр окружности, проходящей через A и середины отрезков $A'B$ и $A'C$. Точки O_B и O_C определяются аналогично. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABC и $O_AO_BO_C$.

Ответ: 6 : 1.

Первый способ. Обозначим середины отрезков BC, BA' и CA' за K, L и M соответственно. Пусть X — центр окружности, описанной около треугольника KLM. Рассмотрим точку D, симметричную A относительно серединного перпендикуляра к стороне BC. Обозначим образы точек K, L, M и X при гомотетии с центром A и коэффициентом 2 за D', B', C' и O' соответственно. Поскольку основание высоты треугольника $A'BC$ лежит на окружности, описанной около треугольника KLM, то $B'D'A'C'$ — равнобокая трапеция, а O' — центр её описанной окружности.

Заметим, что $ADBC$ получается из $A'D'B'C'$ параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{A'A}$, значит $B'DAC'$ — равнобокая трапеция. Обозначим за x и y расстояния от O' до $B'C'$ и $A'D'$ соответственно, а за a и b — половины длин $B'C'$ и $D'A'$, тогда $x^2 + a^2 = y^2 + b^2$.

Рассмотрим теперь точку Y, делящую отрезок $O'K$ в отношении 2 : 1. Докажем, что Y — центр описанной окружности треугольника $AB'C'$. Заметим, что расстояние от Y до $B'C'$ равно $\frac{5x+4y}{3}$,

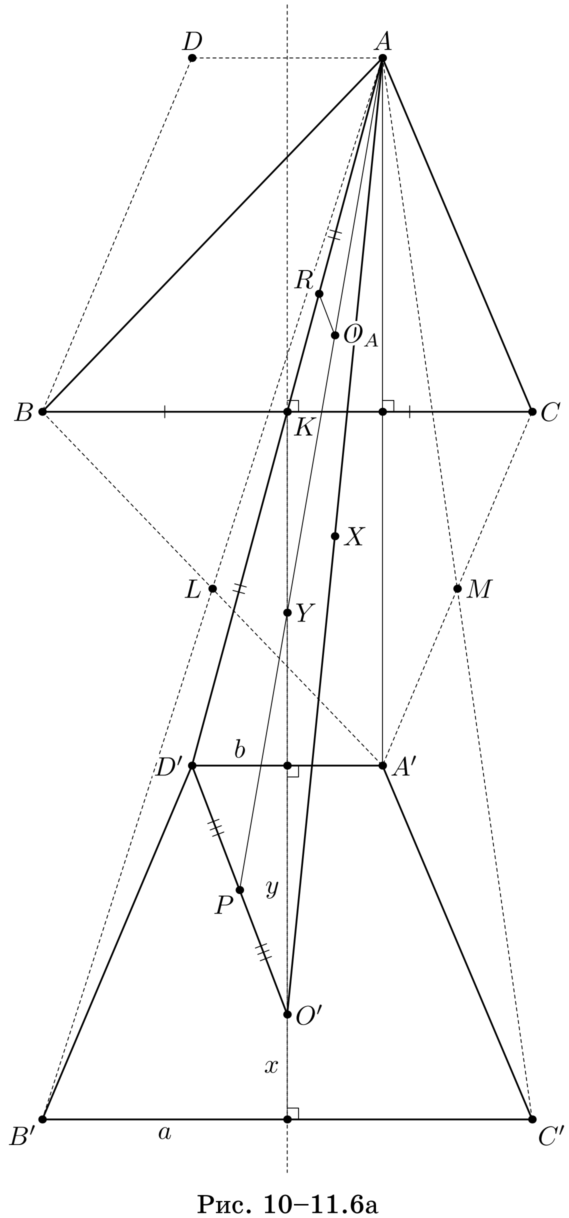


Рис. 10–11.6а

а расстояние от Y до AD равно $\frac{4x+5y}{3}$. Далее, $\left(\frac{5x+4y}{3}\right)^2 - \left(\frac{4x+5y}{3}\right)^2 = x^2 - y^2 = b^2 - a^2$, значит, $a^2 + \left(\frac{5x+4y}{3}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{4x+5y}{3}\right)^2$, то есть точка Y — центр описанной окружности равнобокой трапеции $B'DAC'$, а, следовательно, и треугольника $AB'C'$. Тогда $AY = 2AO_A$ и точка Y также является точкой пересечения медиан в треугольнике $AD'O'$ (поскольку она делит медиану $O'K$ в отношении $2:1$). Значит, $AP = \frac{3}{2}AY = 3AO_A$, где P — середина $D'O'$. Пусть теперь R — точка пересечения медиан треугольника ABC, тогда $AD' = 2AK = 3AR$, то есть ΔARO_A и $\Delta AD'P$ подобны с коэффициентом $\frac{1}{3}$, значит, $RO_A = \frac{1}{3}D'P = \frac{1}{6}O'D' = \frac{r}{6}$, где r — радиус описанной около ΔABC окружности.

Аналогично получаем, что $RO_B = RO_C = \frac{r}{6}$. Таким образом, центр описанной окружности треугольника $O_AO_BO_C$ — точка R, а радиус описанной окружности равен одной шестой радиуса описанной окружности ΔABC.

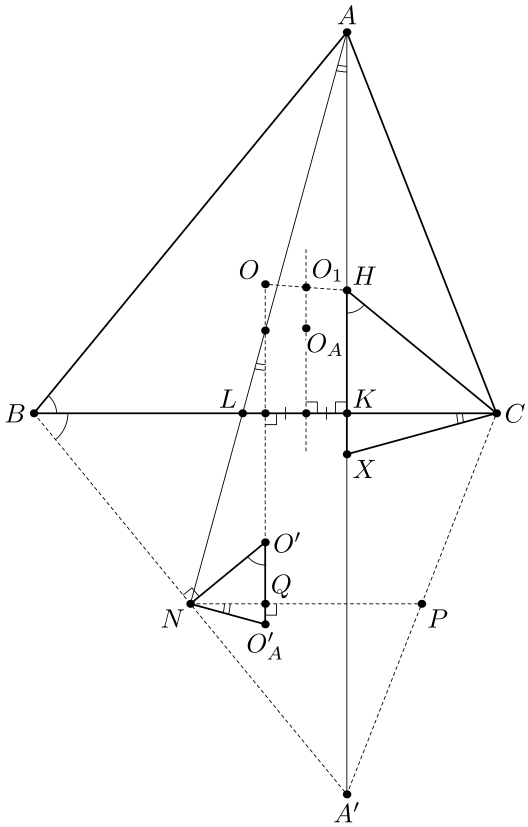


Рис. 10–11.6б

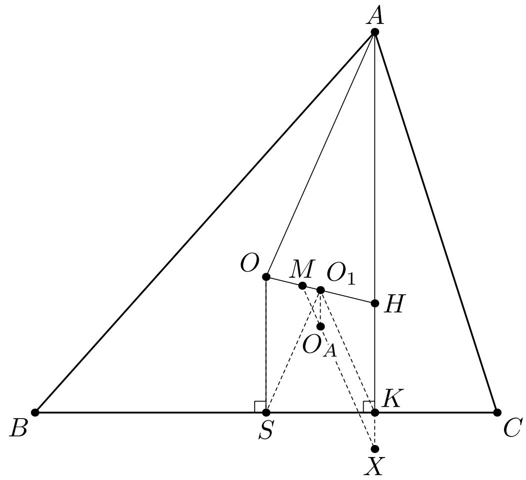


Рис. 10–11.6в

Второй способ. Пусть в треугольнике ABC: O — центр описанной окружности, M — точка пересечения медиан, S — середина BC, H — ортоцентр, O_1 — центр окружности девяти точек, K — основание высоты, проведенной из точки A; точки N и P — середины отрезков $A'B$ и $A'C$ соответственно, L — точка пересечения AN и BC, O' — точка, симметричная O относительно BC, O'_A — диаметрально противоположна точке A в окружности, описанной около треугольника ANP, Q — точка пересечения NP и OO'_A (см. рис. 10–11.6б, в).

Воспользуемся тем, что точки O, M, O_1 и H лежат на одной прямой, причем $OM : MO_1 : O_1H = 2:1:3$ (см. рис. 10–11.в). В частности, из этого следует, что $MO_1 = \frac{1}{6}OH$. Докажем, что $MO_A = \frac{1}{6}OA$ $(*)$.

Точки O_1 и O_A равноудалены от точек N и P (O_1 равноудалена от середин AB и AC), поэтому прямая O_1O_A перпендикулярна стороне BC. Следовательно, проекция отрезка MO_A на прямую BC в шесть раз меньше, чем проекция отрезка OA на ту же прямую.

Тогда утверждение $(*)$ будет следовать из того, что прямые OA и MO_A образуют равные углы с BC. Иначе говоря (так как $SO_1 \parallel AO$ и $SO_1 = O_1K$), требуется доказать, что прямые MO_A и O_1K параллельны.

Пусть прямая, проходящая через M и параллельная O_1K, пересекает прямую AK в точке X. Тогда $KX = \frac{1}{3}HK$. Докажем, что $O_1O_A = KX = \frac{1}{4}HX$, откуда и будет следовать искомая параллельность.

Покажем, что точки L, A, C, X лежат на одной окружности (см. рис. 10–11.6б). Действительно, воспользовавшись свойством ортоцентра, получим, что $LK \cdot KC = \frac{1}{3}BK \cdot KC = \frac{1}{3}HK \cdot AK = KX \cdot KA$. Следовательно, $\angle LAK = \angle LCX = \angle KCX$.

Заметим, что:

1) При гомотетии с центром A и коэффициентом 2 образом O_A является O'_A, а образом O_1 — O'.

2) $\angle NO'O'_A = \angle CHK$ (оба они равны $\angle ABC$) и $\angle O'_ANQ = \angle O'_ANP = \angle NAA' = \angle LAK$ (в силу параллельности $O'O'_A$ и AA' и того, что $\angle ANO'_A = 90^\circ$).

3) $O'Q = \frac{1}{2}HK$ (поскольку $OO' = AH$, а NP — средняя линия)

Из вышеперечисленных фактов следует, что треугольник $O'NO_A$ подобен треугольнику HCX с коэффициентом 0,5.

Следовательно, $O_1A = \frac{1}{2}O'O'_A = \frac{1}{4}HX$, что и требовалось.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Доледенок, А. Заславский, Д. Креков, А. Якубов.