Пятнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Семнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 14 апреля 2019 года

Решения задач

8–9 класс

1. (*М. Волчкевич*) В треугольнике ABC: I — центр вписанной окружности, точка M лежит на стороне BC, причем $\angle BIM = 90^\circ$. Докажите, что расстояние от точки M до прямой AB равно диаметру окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение. *Первый способ.* Пусть N и K — основания перпендикуляров, проведенных к прямой AB из точек I и M соответственно (см. рис. 8–9.1а). Докажем, что $MK = 2IN$. Обозначим через L точку пересечения прямых MI и AB. Тогда треугольник MBL — равнобедренный, так как его биссектриса совпадает с высотой. Следовательно, $MI = IL$. Учитывая параллельность IN и MK, получим, что в треугольнике MLK отрезок IN является средней линией. Следовательно, $MK = 2NI$, что и требовалось.

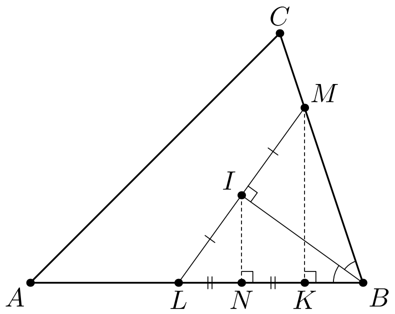

Рис. 8–9.1а

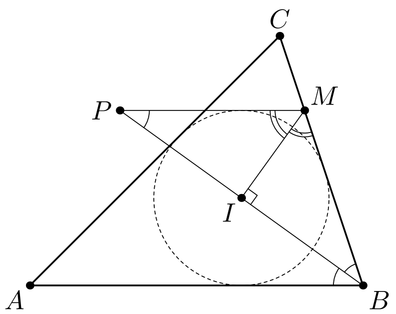

Рис. 8–9.1б

Второй способ. Пусть прямая, проходящая через точку M и параллельная AB, пересекает прямую BI в точке P (см. рис. 8–9.1б). Тогда треугольник PMB равнобедренный и MI — биссектриса угла PMB. Следовательно, точка I равноудалена от прямых MP и MB, то есть прямая MP является касательной к вписанной окружности треугольника ABC. Тогда расстояние между прямыми MP и AB равно диаметру окружности, что и требовалось.

2. (*Ю. Блинков*) На стороне AC треугольника ABC во внешнюю сторону построен параллелограмм $ACDE$. Пусть O — точка пересечения его диагоналей, N и K — середины сторон BC и BA соответственно. Докажите, что прямые DK, EN и BO пересекаются в одной точке.

Решение. *Первый способ.* Рассмотрим треугольник ABD (см. рис. 8–9.2). Заметим, что отрезки BO и DK являются его медианами, то есть пересекаются в точке X такой, что $BX : XO = 2 : 1$. Рассмотрим теперь треугольник CBE и его медианы BO и EN. Рассуждая аналогично, получим, что они пересекаются в точке, которая делит отрезок BO в отношении $2 : 1$, считая от вершины B, то есть в точке X. Следовательно, прямые DK, EN и BO пересекаются в одной точке, что и требовалось.

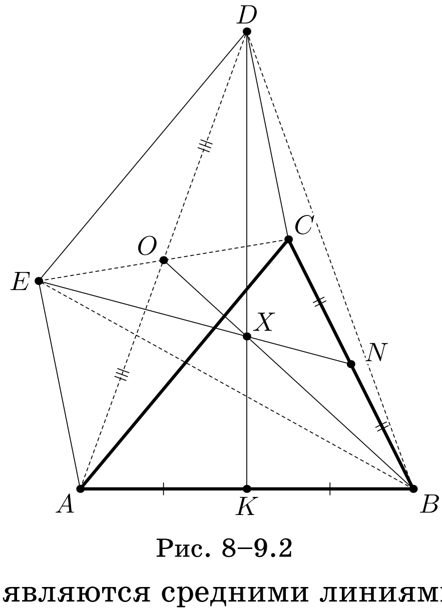

Рис. 8–9.2

Второй способ. Заметим, что стороны треугольника OKN являются средними линиями треугольников DAB, ABC и BEC, то есть параллельны сторонам треугольника BDE. Следовательно, треугольники OKN и BDE гомотетичны и прямые DK, EN и BO пересекаются в центре гомотетии.

Комментарий. Возможно также решение, использующее векторы или теорему Менелая.

3. (*Ю. Блинков*) В остроугольном треугольнике ABC $\angle ABC = 60^\circ$, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр. Биссектриса BL пересекает описанную окружность в точке

W; X — точка пересечения отрезков WH и AC. Докажите, что точки O, L, X и H лежат на одной окружности.

Решение. Воспользуемся двумя фактами:

Факт 1. *Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника, H — ортоцентр. Тогда $\angle ABO = \angle CBH$* (*см. рис.* 8–9.3*а*).

Факт 2. *Пусть $\angle ABC = 60^\circ$, O — центр описанной окружности остроугольного треугольника, H — ортоцентр. Тогда $BO = BH$* (*см. рис.* 8–9.3*б*).

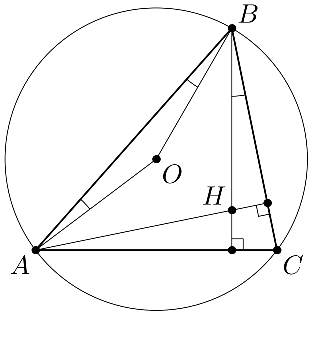

Рис. 8–9.3а

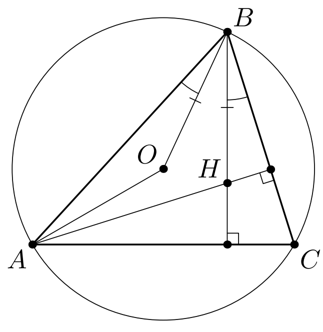

Рис. 8–9.3б

Вернемся к решению задачи. Поскольку BW — биссектриса угла B, то из равенства вписанных углов следует, что $WA = WC$, то есть точка W лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC (см. рис. 8–9.3в). Так как $\angle ABC = 60^\circ$, то $\angle AOC = \angle AWC = 120^\circ$, то есть точки O и W симметричны относительно прямой AC. Кроме того, из фактов 1) и 2) следует, что точки O и H симметричны относительно биссектрисы BL. Следовательно, $LW = LO = LH$, то есть L — центр описанной окружности треугольника OWH.

Далее, заметим, что треугольник OXW равнобедренный, то есть $\angle OXH = 2\angle OWH = \angle OLH$. Следовательно, точки O, L, X и H лежат на одной окружности, что и требовалось.

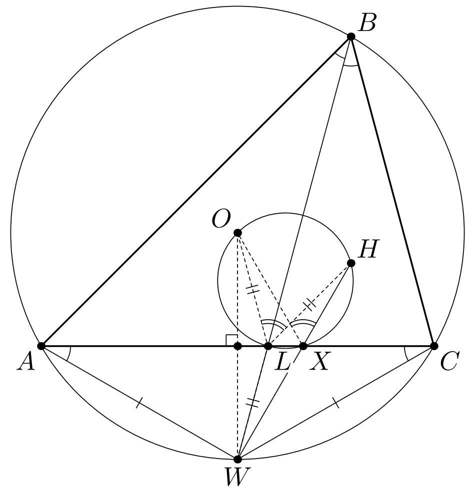

Рис. 8–9.3в

Комментарий 1. Завершить решение можно было иначе, воспользовавшись тем, что точка L лежит на серединном перпендикуляре к отрезку OH и на биссектрисе внешнего угла треугольника OXH.

Комментарий 2. Также в заключительной стадии решения можно воспользоваться еще одним известным фактом: в равнобокой трапеции боковая сторона видна под одним и тем же углом из точки пересечения диагоналей и центра описанной окружности. В нашем случае, поскольку точка H_1, симметричная H относительно AC, лежит на описанной окружности треугольника ABC, то OHH_1W — равнобокая трапеция, X — точка пересечения ее диагоналей, а L — центр описанной окружности.

Комментарий 3. Отметим, что X — такая точка на прямой AC, что сумма расстояний от нее до точек O и H минимальна.

Комментарий 4. Факт 1 можно доказать несложным счетом углов: $\angle ABO = 90^\circ - 0{,}5\angle AOB = 90^\circ - \angle ACB = \angle CBH$.

Комментарий 5. Факт 2 можно получить, например, из равенства прямоугольных треугольников BOK и BHA_1 по катету и прилежащему углу, где A_1 — основание высоты, проведенной из точки A, а K — середина стороны AB. Тогда равенство треугольников следует из равенства $BA = 2BA_1$ и факта 1.

4. (*И. Кухарчук*) Серединный перпендикуляр к биссектрисе BL треугольника ABC пересекает биссектрисы его внешних углов A и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PBQ, касается окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. *Первый способ.* Пусть BX — касательная к окружности, описанной около треугольника PBQ (см. рис. 8–9.4). Докажем, что она является касательной к описанной окружности треугольника ABC, откуда и будет следовать утверждение задачи. Для этого достаточно доказать, что $\angle CBX = \angle BAC$. Обозначим углы A, B и C треугольника через α, β и γ соответственно. Заметим, что точки A, P, B и L лежат на одной окружности. Действительно, если рассмотреть описанную окружность треугольника BAL, то точка P лежит на биссектрисе внешнего угла A и на серединном перпендикуляре к BL, то есть является серединой дуги BL, содержащей точку A. Используя также угол между касательной и хордой, получим: $\angle XBQ = \angle BPQ = 0{,}5\angle BPL = 0{,}5\angle BAL = 0{,}5\alpha$. Теперь достаточно доказать, что $\angle CBQ = 0{,}5\alpha$. Рассуждая аналогично, получим, что точки C, Q, B и L лежат на одной окружности. Тогда $\angle CBQ = 180^\circ - \angle BQC - \angle BCQ = \angle BLC - (90^\circ - 0{,}5\gamma) =$ $= \alpha + 0{,}5\beta + 0{,}5\gamma - 90^\circ = 0{,}5\alpha$, что и требовалось.

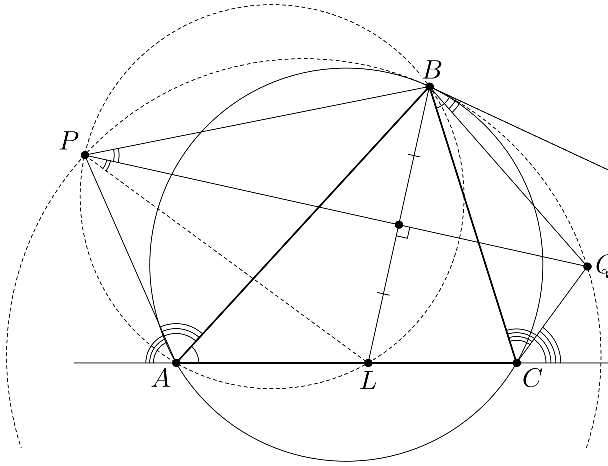

Рис. 8–9.4

Второй способ. Пусть касательная к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую AC в точке T (см. рис. 8–9.4). Тогда $\angle TBC = \angle BAC$, как угол между касательной и хордой. Используя теорему о внешнем угле для треугольника ABL получим, что $\angle TBL = \angle TLB$. Таким образом, точка T лежит на прямой PQ и TQ — биссектриса угла BTL. Поскольку CQ является биссектрисой угла BCT, то Q — центр вписанной окружности треугольника BCT и $\angle TBQ = 0{,}5\angle TBC = 0{,}5\angle BAC = \angle BPQ$, используя, что точки B, P, A и L лежат на одной окружности (см. первый способ решения). Следовательно, BT является касательной к описанной окружности треугольника PBQ, что и требовалось.

Комментарий 1. Отметим, что прямые BT и AC симметричны относительно прямой PQ, а окружность, описанная около треугольника PLQ, касается прямой AC.

Комментарий 2. Второй способ решения можно было завершить иначе, доказав, что точки P, A, C и Q лежат на одной окружности. Тогда T будет являться радикальным центром окружностей, описанных около треугольников ABC, PBQ и четырехугольника $APQC$. То есть TB — радикальная ось окружностей, описанных около треугольников ABC и PBQ, а, значит, является касательной и к окружности, описанной около треугольника PBQ.

5. (*Е. Бакаев*) Даны отрезок PQ и окружность. По окружности движется хорда AB, равная PQ. Пусть T — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AP и BQ. Докажите, что все полученные таким образом точки T лежат на одной прямой.

Решение. Пусть O — центр окружности. Рассмотрим равнобедренный треугольник PO_1Q с основанием PQ, равный треугольнику AOB, и одинаково с ним ориентированный (см. рис. 8–9.5). Тогда окружность с центром O_1 и радиусом O_1P равна исходной окружности и симметрична ей относительно серединного перпендикуляра m к их линии центров. (Если точки O_1 и O совпадают, то совпадают и рассматриваемые окружности, а точка T является их центром.)

Докажем, что все точки T, построенные указанным образом, лежат на прямой m. Поскольку треугольники PO_1Q и AOB равны и одинаково ориентированы, то они переводятся друг в друга поворотом или параллельным переносом. Центр поворота должен быть равноудален от точек P и A и равноудален от точек Q и B. Следовательно, T и является центром этого поворота, то есть $TO_1 = TO$ и точка T лежит на серединном перпендикуляре к отрезку OO_1. В случае, если треугольники переводятся друг в друга параллельным переносом, векторы $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{BQ}$ равны, то есть серединные перпендикуляры к отрезкам AP и BQ параллельны или совпадают, что не удовлетворяет условию.

Комментарий 1. Завершить решение можно иначе, вместо поворота воспользовавшись равенством треугольников или композицией осевых симметрий.

Комментарий 2. Точка T является точкой Микеля для прямых AB, PQ, AP и BQ. Подробнее о точке Микеля см., например, В. В. Прасолов, «*Задачи по планиметрии*».

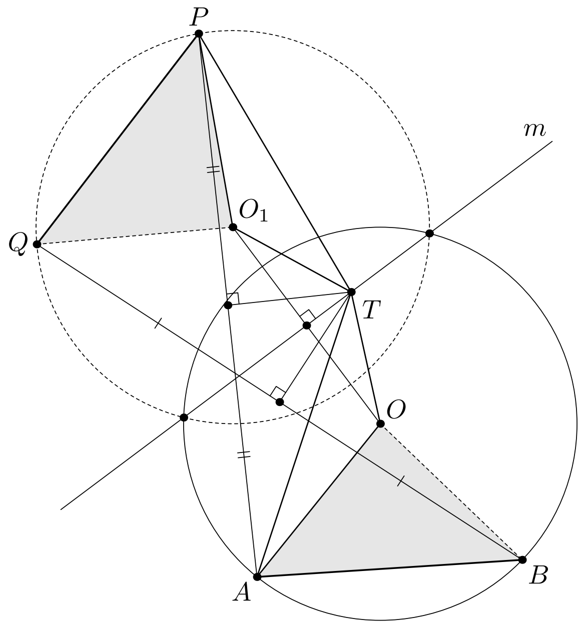

Рис. 8–9.5

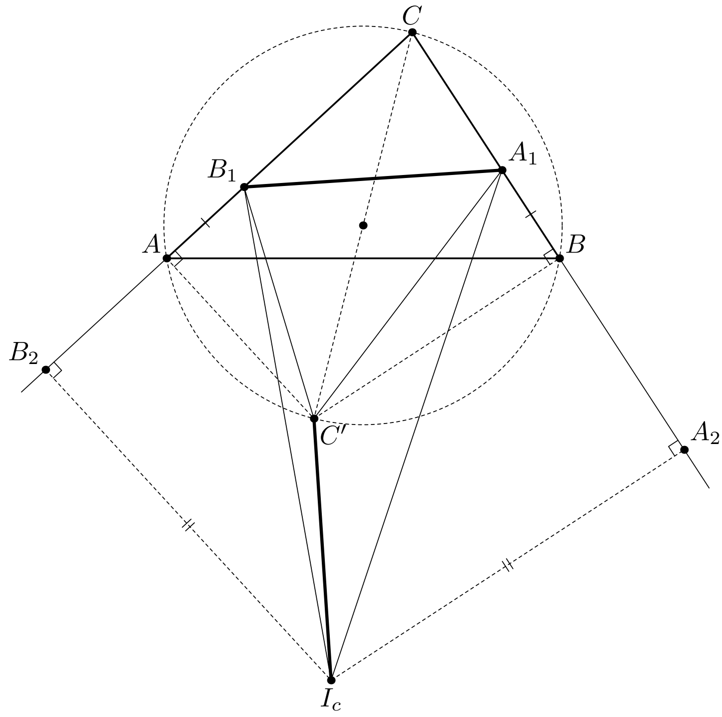

Рис. 8–9.6

6. (*А. Заславский*) В остроугольном треугольнике ABC точка I_c — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB; A_1 и B_1 — точки касания двух других вневписанных окружностей со сторонами BC и CA соответственно; C' — точка на описанной окружности, диаметрально противоположная точке C. Докажите, что прямые I_cC' и A_1B_1 перпендикулярны.

Решение. Воспользуемся следующим утверждением.

Дан отрезок AB. ГМТ M таких, что $AM^2 - BM^2 = const$, есть прямая, перпендикулярная прямой AB.

В данном случае достаточно доказать, что ${I_cB_1}^2 - {I_cA_1}^2 = {C'B_1}^2 - {C'A_1}^2$.

Пусть A_2 и B_2 — точки касания вневписанной окружности, касающейся стороны AB с прямыми BC и CA соответственно (см. рис. 8–9.6). Введем стандартные обозначения: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Тогда $AB_1 = BA_1 = p - c$, $AB_2 = p - b$, $BA_2 = p - a$, где p — полупериметр треугольника. Следовательно, $B_1B_2 = p-c+p-b = a$, а $A_1A_2 = p-c+p-a = b$.

Заметим, что $\angle CAC' = \angle CBC' = 90^\circ$, то есть треугольники $C'AB_1$ и $C'BA_1$ прямоугольные, откуда ${C'B_1}^2 - {C'A_1}^2 = C'A^2 - C'B^2 = CB^2 - CA^2 = a^2 - b^2$.

Кроме того, из прямоугольных треугольников $I_cB_1B_2$ и $I_cA_1A_2$ получим: ${I_cB_1}^2 - {I_cA_1}^2 = {B_2B_1}^2 - {A_2A_1}^2 = a^2 - b^2$. То есть ${I_cB_1}^2 - {I_cA_1}^2 = {C'B_1}^2 - {C'A_1}^2$, что и требовалось.

Комментарий 1. Вспомогательное утверждение можно доказать, используя, что разность квадратов наклонных равна разности квадратов их проекций.

Комментарий 2. Также возможен способ решения, использующий свойства проекций и подобие треугольников. Достаточно показать, что проекции I_cC' на прямые AC и BC соответственно пропорциональны проекциям A_1B_1 на перпендикулярные им прямые. Первые две проекции равны AB_2 и BA_2, а вторые — $A_1C\sin\angle C$ и $B_1C\sin\angle C$. Осталось заметить, что $A_1C = AB_2$ и $B_1C = BA_2$.

Материалы подготовили: Е. Бакаев, А. Блинков, Ю. Блинков, И. Богданов, А. Горская, А. Заславский.

Пятнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Семнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 14 апреля 2019 года

Решения задач

10–11 класс

1. (*М. Волчкевич*) Окружность, вписанная в квадрат $ABCD$, касается сторон AB и CD в точках M и K соответственно. Прямая BK пересекает эту окружность в точке L; X — середина KL. Найдите угол MXK.

Ответ: 135°.

Решение. *Первый способ.* Поскольку MK диаметр окружности, то $\angle BMK = \angle MLK = 90^\circ$ (см. рис. 10–11.1а). Тогда прямоугольные треугольники BMK и MLK подобны по двум углам. Поскольку диаметр окружности, вписанной в квадрат, равен его стороне, то $ML : LK = BM : MK = 1 : 2$. Следовательно, $XL = ML$, то есть $\angle MXL = 45^\circ$, а $\angle MXK = 135^\circ$.

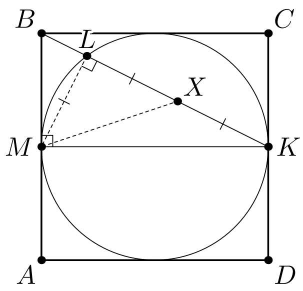

Рис. 10–11.1а

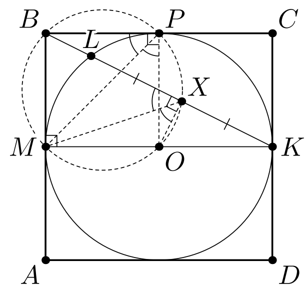

Рис. 10–11.1б

Второй способ. Пусть O – центр окружности, P – точка касания со стороной BC (см. рис. 10–11.1б). Тогда $\angle BMO = \angle BPO = \angle BXO = 90^\circ$, так как X – середина хорды LK. Следовательно, точка X лежит на описанной окружности квадрата $BPOM$ и $\angle BXM = \angle BPM = 45^\circ$, то есть $\angle MXK = 135^\circ$.

2. (*Н. Кононенко, жюри*) Углы одного четырехугольника соответственно равны углам другого четырехугольника. Кроме того, равны соответствующие углы между их диагоналями. Обязательно ли такие четырехугольники подобны?

Ответ: нет, не обязательно.

Решение. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC, в котором $\angle A = 45^\circ$. Пусть D — ортоцентр этого треугольника (см. рис. 10-11.2а). Тогда в невыпуклом четырехугольнике $ABDC$ три угла равны 45°, один 225°, а диагонали перпендикулярны.

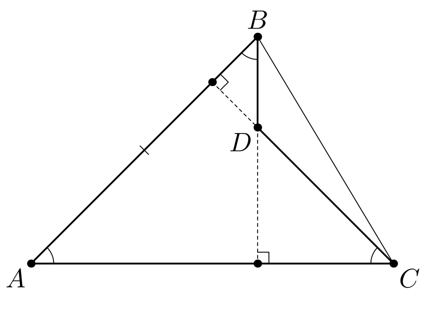

Рис. 10–11.2а

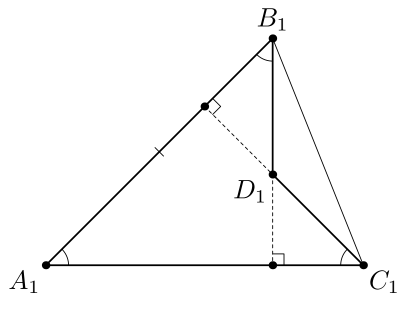

Рис. 10–11.2б

Рассмотрим теперь треугольник $A_1B_1C_1$, в котором $\angle A_1 = 45^\circ$, $A_1B_1 = AB$, а $A_1C_1 \neq AC$. Пусть D_1 – ортоцентр этого треугольника (см. рис. 10–11.2б). Тогда в четырехугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны четыре соответственных угла и соответственные углы между диагоналями. Подобными они не являются, так как отношения соответствующих сторон не равны.

Комментарий 1. Существуют и другие примеры невыпуклых четырехугольников.

Комментарий 2. Если в условии потребовать выпуклость четырехугольников, то такие четырехугольники будут подобны.

3. (*Г. Филипповский*) Восстановите остроугольный треугольник ABC по вершине A, основанию высоты, проведенной из вершины B и центру окружности, описанной около треугольника BHC (точка H — ортоцентр треугольника ABC).

Решение. Заметим, что фактически нам даны прямая AC и прямая, содержащая высоту BB_1 треугольника ABC. Поскольку вершина A дана, достаточно построить вершины B и C. Это можно сделать различными способами.

Первый способ. Воспользуемся следующим фактом.

Окружности, описанные около треугольников ABC и BHC, равны.

Пусть BB_1 — высота, O_1 — центр окружности ω, описанной около треугольника BHC. В силу равенства углов BAC и BA_1C в равных окружностях точка A_1, симметричная A относительно прямой BB_1 лежит на окружности ω (см. рис. 10–11.3а).

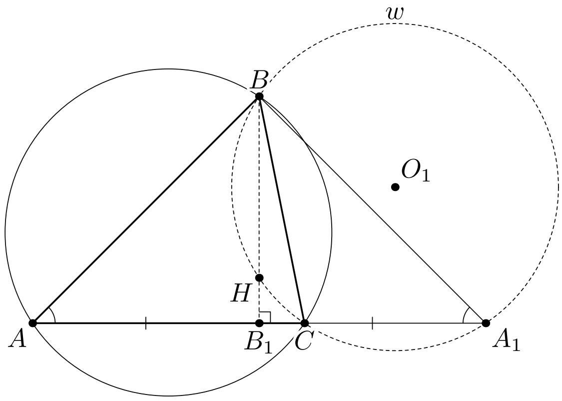

Рис. 10–11.3а

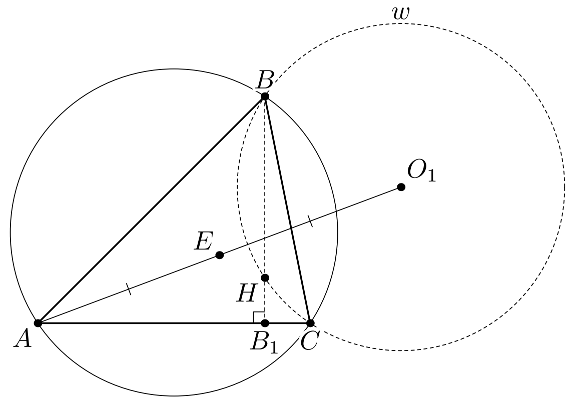

Рис. 10–11.3б

Отсюда вытекает способ построения.

1) Построим точку A_1, симметричную точке A относительно точки B_1.

2) Строим окружность ω с центром в точке O_1 и радиусом O_1A_1.

3) Восстанавливаем перпендикуляр к прямой AB_1 в точке B_1.

Точку C получим как пересечение окружности ω и прямой AB_1, а точку B — как пересечение окружности ω и перпендикуляра из пункта 3). Треугольник ABC — искомый по построению.

Второй способ. Заметим, что A — ортоцентр треугольника BHC. Воспользуемся следующим фактом.

Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности (окружность девяти точек), центр которой является серединой отрезка OH, где O — центр описанной окружности треугольника, H — ортоцентр. Радиус окружности девяти точек равен половине радиуса окружности, описанной около треугольника.

В нашем случае, в треугольнике BHC центр окружности девяти точек является серединой отрезка AO_1 (O_1 — центр окружности, описанной около треугольника BHC), а точка B_1 на ней лежит. Отсюда вытекает способ построения (см. рис. 10–11.3б).

1) Построим точку E — середину отрезка AO_1.

2) Строим окружность ω с центром в точке O_1 и радиусом $2EB_1$.

3) Восстанавливаем перпендикуляр к прямой AB_1 в точке B_1. Точки B и C получаем аналогично предыдущему построению.

Комментарий. Второй способ решения можно завершить иначе. Строим окружность с центром в точке E и радиусом EB_1. На пересечении с прямой AB_1 получим точку M — середину AC. Далее, восстанавливаем точку C, окружность, описанную около BHC и получаем точку B.

4. (*Д. Швецов*) Дан прямоугольный треугольник ABC. Вневписанная окружность касается гипотенузы AB в точке C_1; A_1 — точка касания с прямой BC вневписанной окружности, касающейся стороны AC; B_1 — точка касания с прямой AC вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Найдите угол $A_1C_1B_1$.

Ответ: 45°.

Решение. *Первый способ.* Пусть B_2 и A_2 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами AC и BC соответственно (см. рис. 10–11.4а). Из равенства отрезков касательных следует, что $A_1B_1A_2B_2$ – равнобокая трапеция. Следовательно, $\angle A_1B_2B_1 = \angle A_1A_2B_1 = 45^\circ$.

Докажем, что C_1 лежит на окружности ω_1, описанной около этой трапеции. Пусть окружность ω_2, описанная около треугольника $B_1B_2C_1$ повторно пересекает гипотенузу AB в точке C_2. Тогда $AB_1 \cdot AB_2 = AC_1 \cdot AC_2$.

Введем стандартные обозначения: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Тогда $AB_1 = BA_1 = p$, $AB_2 = BA_2 = p - c$, $AC_1 = p - b$, $BC_1 = p - a$, где p — полупериметр треугольника.

Поскольку радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен $p-c$, то $S = pr = p(p-c) = (p-a)(p-b)$. Тогда $AC_2 = p - a$, а $BC_2 = p - b$. Следовательно, $BA_1 \cdot BA_2 = BC_1 \cdot BC_2$, то есть точки A_1, A_2, C_1 и C_2 лежат на одной окружности ω_3.

Докажем, что окружности ω_1, ω_2 и ω_3 совпадают. Пусть это не так, тогда рассмотрим прямые, содержащие их общие хорды, то есть радикальные оси пар окружностей. Они должны пересекаться в одной точке — радикальном центре данных окружностей.

С другой стороны, прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 попарно пересекаются в вершинах треугольника ABC, что противоречит предыдущему утверждению. Следовательно, окружности совпадают, то есть C_1 лежит на окружности ω_1 и $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1A_2B_1 = 45^\circ$.

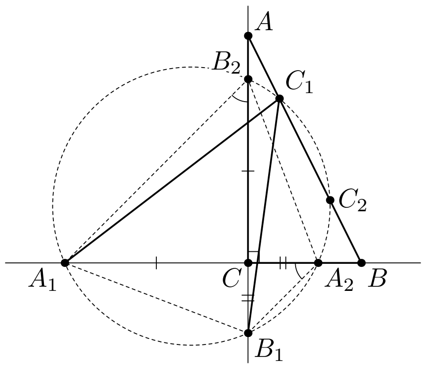

Рис. 10–11.4а

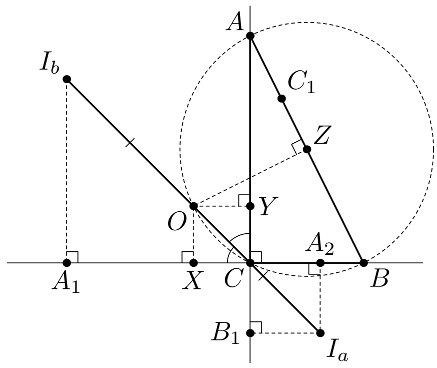

Рис. 10–11.4б

Второй способ. Пусть I_a, I_b и I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC; точка O — середина I_aI_b; X, Y и Z — проекции O на прямые BC, CA и AB соответственно (см. рис. 10–11.4б). Докажем, что O — центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Заметим, что треугольник ABC является ортотреугольником для треугольника $I_aI_bI_c$, а окружность, описанная около треугольника ABC — окружностью девяти точек для $I_aI_bI_c$. Следовательно, точка O лежит на описанной окружности треугольника ABC. Кроме того, CO — биссектриса внешнего угла C, то есть O — середина дуги AB, содержащей точку C и треугольник AOB — прямоугольный равнобедренный.

Следовательно, точка Z является серединой AB, $OZ = 0{,}5c$ и $C_1Z = 0{,}5|b-a|$. Точка X — проекция точки O, то есть X — середина отрезка A_1A_2. Заметим, что $BA_1 = p$, $BA_2 = p - c$. Следовательно, $XA_1 = 0{,}5c$ и $XC = OY = OX = 0{,}5|b-a|$. Аналогично, $YB_1 = 0{,}5c$.

Тогда треугольники OXA_1, OYB_1 и C_1ZO равны, то есть O — центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, угол A_1OB_1 прямой, поскольку при повороте вокруг O на 90° прямая AC переходит в прямую BC. Следовательно, искомый угол равен 45°.

Комментарий 1. Окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, является педальной окружностью точки, симметричной центру вписанной окружности относительно середины гипотенузы. Подробнее про педальные треугольники и окружности см., например, В. В. Прасолов, "*Задачи по планиметрии*".

Комментарий 2. Возможны также решения, использующие непосредственные вычисления сторон треугольника $A_1C_1B_1$. Далее, угол можно найти, используя следствие из теоремы косинусов.

5. (*И. Кухарчук*) На сторонах AB и BC неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки C_1 и A_1 так, что четырехугольник AC_1A_1C вписанный. Прямые CC_1 и AA_1 пересекаются в точке P. Прямая BP пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Q. Докажите, что прямые QC_1 и CM, где M — середина A_1C_1, пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

Решение. *Первый способ.* Пусть прямая BP пересекает A_1C_1 в точке N. Заметим, что пересечение QC_1 и CM на окружности равносильно равенству углов BCM и BQC_1, то есть достаточно будет доказать, что $\angle A_1CM = \angle NQC_1$ (см. рис. 10–11.5а).

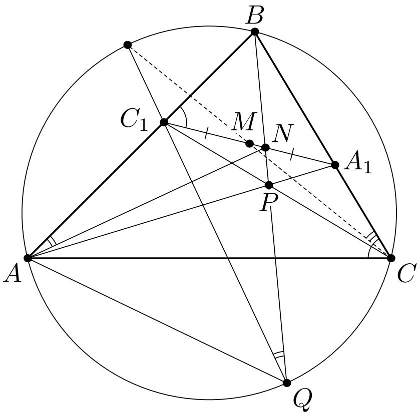

Рис. 10–11.5а

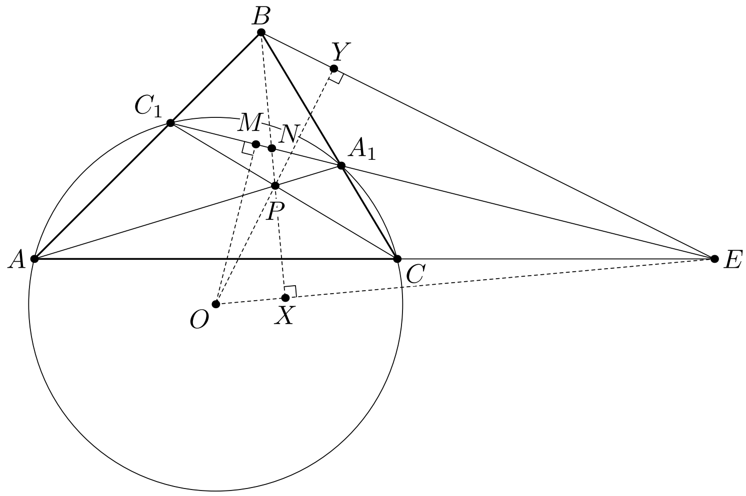

Рис. 10–11.5б

Поскольку $\angle BQA = \angle BCA = \angle BC_1A_1$, то четырехугольник AC_1NQ — вписанный, откуда $\angle NQC_1 = \angle NAC_1$. То есть достаточно доказать, что $\angle MCA_1 = \angle NAC_1$. Учитывая равенство $\angle BCA = \angle BC_1A_1$, данное условие равносильно равенству углов $\angle C_1NA$ и $\angle MCA$.

Докажем, что четырехугольник $AMNC$ вписанный, откуда и будет следовать утверждение задачи.

Пусть O — центр окружности, прямые AC и A_1C_1 пересекаются в точке E, прямые OE и BP — в точке X, а прямые OP и BE — в точке Y (см. рис. 10–11.5б).

Тогда достаточно доказать, что $EN \cdot EM = EC \cdot EA$. Далее, воспользуемся двумя фактами для вписанного четырехугольника (см. рис. 10-11.5в, г).

Пусть O — центр описанной окружности четырёхугольника $ABCD$, P — точка пересечения диагоналей. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Тогда:

1) *Описанные окружности треугольников ABF, CDF, BEC и ADE пересекаются в некоторой точке K. При этом точка K лежит на прямой EF, а прямые EF и OK перпендикулярны.*

2) *Точка P является ортоцентром треугольника EOF.*

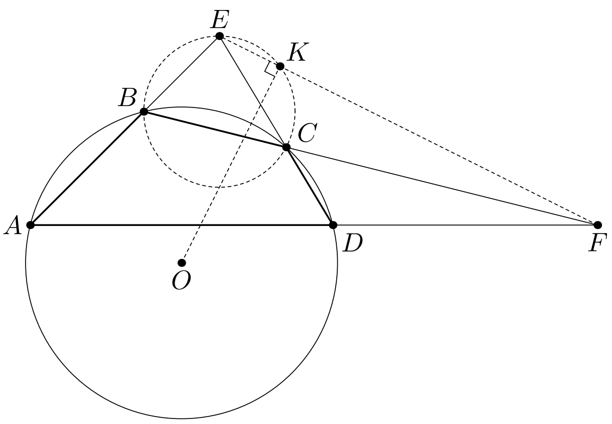

Рис. 10–11.5в

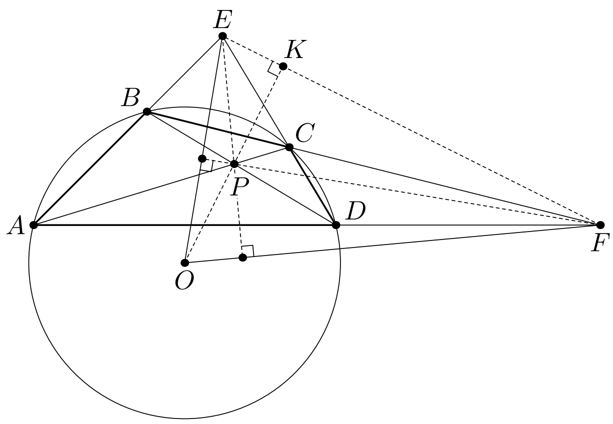

Рис. 10–11.5г

В нашем случае, прямые BX и OE, а также OY и BE перпендикулярны, причем Y лежит на описанной окружности треугольника ABC и на одной окружности с точками B, X и O. Кроме того, OM перпендикулярно A_1C_1, то есть четырехугольник $OMNX$ — вписанный. Осталось воспользоваться свойством секущих: $EN \cdot EM = EX \cdot EO = EY \cdot EB = EC \cdot EA$, что и требовалось.

Комментарий 1. Точка K называется точкой Микеля для прямых AB, BC, CD и AD. Подробнее о точке Микеля см., например, В. В. Прасолов, "*Задачи по планиметрии*".

Комментарий 2. Прямая EF является *полярой* точки P, а прямая EP — *полярой* точки F, то есть треугольник EPF — *автополярный* относительно окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$. Подробнее о полярном соотвествии см., например, Я. П. Понарин "*Элементарная геометрия*", том 1 "*Планиметрия*".

Второй способ. Воспользуемся обозначениями из первого способа решения (см. рис. 10–11.5д). Кроме того, пусть F — точка пересечения прямых BP и AC, T — точка пересечения прямой QC_1 и описанной окружности треугольника ABC, Y — точка пересечения прямой BE с описанной окружностью треугольника ABC, L — точка пересечения прямой YC_1 с описанной окружностью треугольника ABC, C_2 — точка пересечения прямой CC_1 с описанной окружностью треугольника ABC.

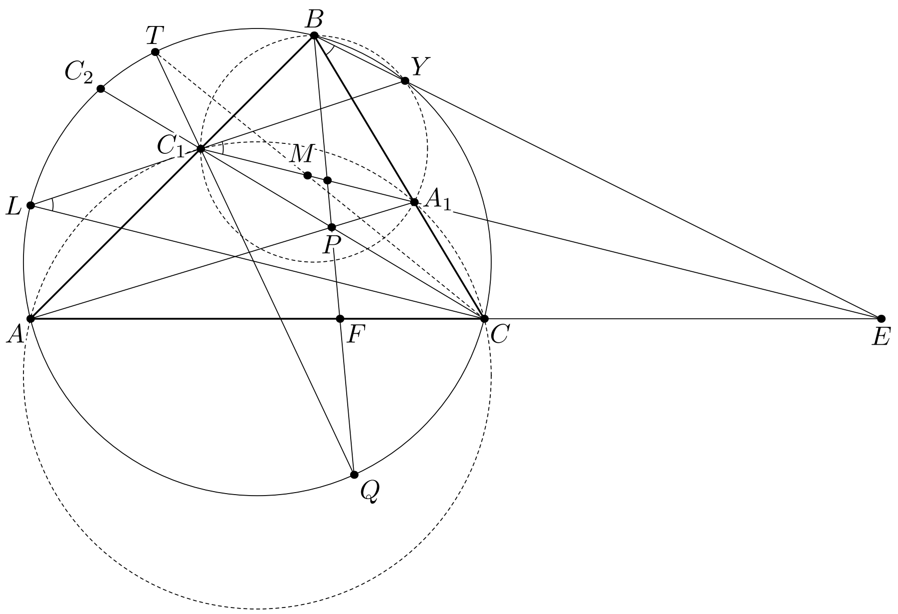

Рис. 10–11.5д

Заметим, что Y принадлежит описанной окружности треугольника A_1BC_1. Это можно получить из предыдущего способа доказательства или из того, что E — радикальный центр описанных окружностей треугольников ABC, A_1BC_1 и четырехугольника ACA_1C_1 .

Далее, из равенства вписанных углов $\angle YLC = \angle YBA_1 = \angle YC_1A_1$ следует, что прямые A_1C_1 и CL параллельны.

Будем использовать *двойные отношения четырех точек*, лежащих на одной прямой, и *двойные отношения четырех прямых*, проходящих через одну точку. Напомним, что двойным отношением $(ABCD)$ точек A, B, C и D называется $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$. Это же отношение равно двойному отношению прямых, проходящих через эти точки и пересекающихся в одной точке. Также двойное отношение $(abcd)$ прямых a, b, c и d равно $\pm\dfrac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)} : \dfrac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)}$, где знаки определяются в зависимости от того, разделяет ли пара прямых a и b пару прямых c и d.

Воспользуемся двумя фактами.

1. *Концы отрезка, его середина, а также бесконечно удаленная точка прямой, содержащей отрезок, образуют гармоническую четверку, то есть их двойное отношение равно* -1.

2. *Теорема о* ***полном четырехстороннике****, образованном точками* A, C, A_1 *и* C_1: $(CAFE) = -1$ (*см. рис.* 10–11.5*д*).

Докажем, что прямая CT проходит через точку M — середину отрезка A_1C_1. Учитывая факт 1, для этого достаточно доказать, что $(CC_1, CA_1, CT, CL) = -1$.

Воспользуемся фактом 2 и тем, что центральное проектирование окружности на себя является проективным преобразованием (в данном случае рассматривается проекция из точки C_1): $-1 = (CAFE) = (BC, BA, BQ, BY) = (C, A, Q, Y) = (C_2, B, T, L) = (CC_2, CB, CT, CL) = (CC_1, CA_1, CT, CL)$, что и требовалось.

Комментарий 1. Подробнее про двойные отношения и проективные преобразования см., например, В. В. Прасолов, "*Задачи по планиметрии*".

Комментарий 2. Отметим, что прямые AM и QA_1 также пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

6. (*А. Заславский*) Сумма косинусов плоских углов трехгранного угла равна -1. Найдите сумму его двугранных углов.

Ответ: 2π.

Решение. *Первый способ.* Пусть $OABC$ — данный трехгранный угол с вершиной O. Рассмотрим $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ — единичные векторы, сонаправленные ребрам угла, и точку D такую, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$. Тогда

$$(\overrightarrow{OD})^2=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2=3+2\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\right)=1,$$

поскольку сумма косинусов углов между векторами равна минус единице.

Кроме того, $\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=0$, откуда $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=$ $=-1-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$. Аналогично, $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

Учитывая, что вектора единичные, получим равенство соответствующих углов между этими векторами. Следовательно, трехгранные углы $OABC$, $ODCB$, $OCDA$, $OBAD$ равны, поскольку у них равны соответствующие плоские углы.

Рассмотрим сферу с центром O и радиусом 1. Поскольку площадь такой сферы равна 4π, то при пересечении каждого из наших трехгранных углов получатся сферические треугольники площади π.

Рассмотрим трехгранный угол $OABC$ и соответствующий ему сферический треугольник ABC. Воспользуемся формулой для вычисления сферического треугольника: $S=R^2\cdot(A+$ $+B+C-\pi)$, где R — радиус сферы, а A, B и C — величины углов сферического треугольника. В нашем случае, $R=1$, а $S=\pi$. Поскольку углы сферического треугольника являются углами между соответствующими касательными к сфере, то это и есть двугранные углы данного трехгранного угла. Следовательно, их сумма равна 2π.

Второй способ. Пусть $OABC$ — данный трехгранный угол с вершиной O. Построим лучи O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1 с началом во внутренней точке O_1 данного трехгранного угла, перпендикулярные плоскостям OBC, OAC и OAB соответственно и пересекающие эти плоскости так, чтобы площади треугольников $O_1A_1B_1$, $O_1B_1C_1$, $O_1C_1A_1$ были равны. Заметим, что двугранные углы при ребрах построенного трехранного угла дополняют соответствующие плоские углы исходного трехгранного угла до π, и наоборот, плоские углы построенного угла дополняют двугранные углы исходного до π (такие трехгранные углы называются *полярными*). Следовательно, в тетраэдре $O_1A_1B_1C_1$ сумма косинусов двугранных углов при вершине O_1 равна 1. Воспользуемся теоремой косинусов для тетраэдра: ${S_4}^2={S_1}^2+{S_2}^2+{S_3}^2-2S_1S_2\cos\angle(O_1A_1)-2S_2S_3\cos\angle(O_1B_1)-2S_1S_3\cos\angle(O_1C_1)$, где S_1, S_2, S_3, S_4 — площади граней, а $\angle(O_1A_1)$ — двугранннный угол между гранями площадей S_1 и S_2 и аналогично для остальных. В нашем случае, $S_1=S_2=S_3$, а сумма косинусов равна 1, то есть площадь S_4 грани $A_1B_1C_1$ равна площадям остальных граней.

Напомним, что тетраэдр называется *равногранным*, если его грани — равные треугольники. Воспользуемся признаком и свойством равногранного тетраэдра.

1. *Если грани тетраэдра имеют равные площади, то тетраэдр является равногранным.*

2. *В равногранном тетраэдре сумма плоских углов при каждой вершине равна* π.

Итак, по утверждению 1, тетраэдр $O_1A_1B_1C_1$ — равногранный и сумма плоских углов при вершине O_1 равна π, согласно утверждению 2. Следовательно, сумма двугранных углов исходного угла равна 2π.

Комментарий. Подробнее о площади сферического треугольника и равногранном тетраэдре см., например, Я. П. Понарин «*Элементарная геометрия*», том 2, «*Стереометрия*».

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, И. Богданов, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников, Д. Прокопенко.