XVIII Устная математическая олимпиада для 6 – 7 классов
28.02.2021
6 класс

1. Получить 2020. Найдётся ли шестизначное число, кратное 31, из которого можно удалить две одинаковые цифры и при этом получить 2020?

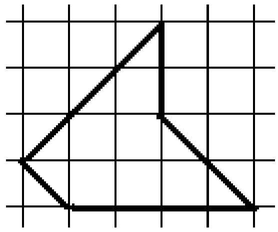
А. Шаповалов

Ответ: найдётся.

Решение. Например, можно в числе 2020 перед каждой двойкой добавить цифру 6 и получить число 620620, которое кратно 31.

Чтобы найти этот пример, достаточно заметить, что число 2020 состоит из двух одинаковых частей, поэтому можно попытаться добавить одну цифру к числу 20 так, чтобы получилось число, кратное 31. Поскольку 62 делится на 31, то дальнейшее очевидно. Существуют ещё два «побочных» решения: 323020 и 320230.

2. Рыбка. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на три равные части.



М. Волчкевич

Ответ: см. рис. 2а.

Решение легче найти, если построить квадраты, сторонами которых являются диагонали клеток (см. рис. 2б).

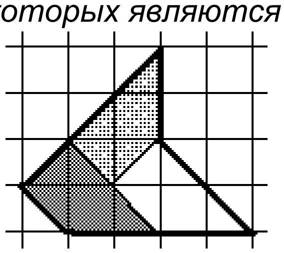


Рис. 2а

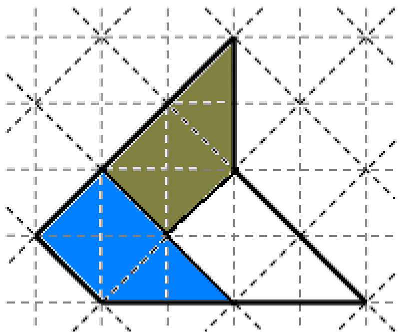


Рис. 2б

3. Тарелки. На полке стояло пять стопок чистых тарелок. В них было 11, 3, 10, 18 и 7 тарелок, а ещё много грязных тарелок лежало в мойке. Сначала пришёл Петя, помыл несколько тарелок и добавил их в одну из стопок. Потом пришёл Вася, помыл несколько тарелок и также добавил их в одну из стопок. В конце пришла Таня, не стала мыть тарелки, а просто объединила две стопки в одну. В итоге получилось четыре стопки с одинаковым количеством тарелок. Сколько всего тарелок вымыли?

Т. Казицына

Ответ: 23 тарелки.

Решение. Так как первоначально в стопках было различное количество тарелок, то чтобы получить стопки с одинаковым их количеством, надо было произвести операции ровно с четырьмя из них – в две стопки добавить тарелки, а ещё две объединить в одну. Таким образом, размеры всех этих стопок увеличились, поэтому они могли стать равными только самой большой стопке, в которой 18 тарелок. Поскольку из четырёх остальных стопок сумму 18 дают только стопки высотой 11 и 7 тарелок, то именно они были объединены. Следовательно, в остальные две стопки из 3 и 10 тарелок было добавлено 15 и 8 вымытых тарелок соответственно, то есть всего было вымыто 23 тарелки.

4. Конфеты. У Андрея, Бори и Вовы есть несколько конфет. Когда у любого из мальчиков чётное число конфет, он говорит правду, а когда нечётное – врёт. Андрей сообщил, что у него с Борей вместе нечётное число конфет. После этого Боря отдал три конфеты Вове и заявил, что произведение чисел конфет у Андрея и Вовы теперь равно 35, а Вова сказал, что у него конфет больше, чем у Андрея. Сколько конфет у Андрея?

В. Клепцын

Ответ: 7 конфет.

Решение. Если у Андрея чётное число конфет, то он сказал правду, тогда у Бори нечётное число конфет. А если у Андрея нечётное число конфет, то он соврал, поэтому и в этом случае у Бори – нечётное число конфет. Значит, после того как Боря отдал три конфеты, у него их осталось чётное количество.

Таким образом, Боря сказал правду, то есть произведение чисел конфет у Андрея и Вовы действительно стало равно 35. Следовательно, либо у одного из них одна конфета, а у второго – 35, либо у одного 5 конфет, а у другого – 7. В любом случае у Вовы теперь нечётное число конфет, поэтому он соврал, то есть у него конфет не больше, чем у Андрея. При этом, так как он получил три конфеты от Бори, то их у него не меньше трёх, поэтому возможен только один вариант: у Вовы 5 конфет, а у Андрея – 7.

5. Оклейка куба. Куб с ребром длины 6 оклеен в один слой прямоугольными полосками размером 1×8 и трёхклеточными уголками (фигурки обоих видов присутствуют). Какое наименьшее количество уголков может быть?

А. Пешнин

Ответ: 8 уголков.

Решение. Оценка. Докажем, что уголков не меньше чем 8. Найдём количество клеток на поверхности куба. Она состоит из шести квадратов со стороной 6, поэтому всего $6\cdot 6\cdot 6 = 216$ клеток. Это число делится на 8. Так как количество клеток в каждой полоске равно 8, то утроенное количество уголков должно делиться на 8. Но 3 и 8 – взаимно простые числа, поэтому на 8 делится количество уголков. Так как уголки участвуют в оклейке, то их не меньше чем 8.

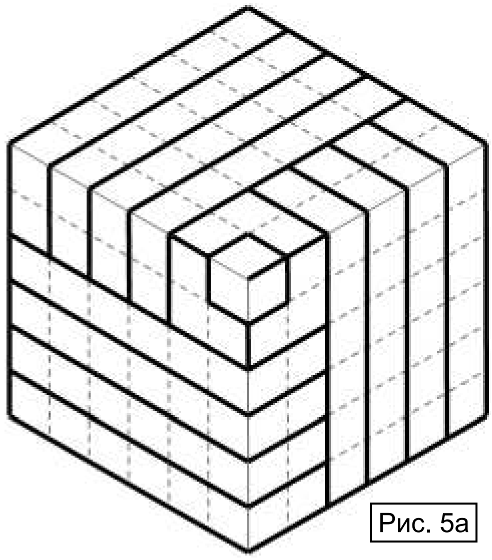


Рис. 5а

Пример. Заметим, что восемь уголков займут 24 клетки, поэтому останется $216 - 24 = 192$ клетки поверхности, которые надо оклеить полосками. Для этого потребуется $192 : 8 = 24$ полоски. Приведём два возможных примера такой оклейки.

1) Оклеим две противоположные вершины куба восемью уголками: по 4 уголка на каждую. Из каждой полоски сделаем «букву Г», загнув две клетки с одного края под прямым углом. Каждые 12 согнутых полосок оклеют три грани куба с общей вершиной (см. рис. 5а).

2) Оклеим восемью уголками тройки клеток, прилегающие к вершинам куба. Из каждой полоски сделаем «скобку», загнув две крайние клетки под прямыми углами. Четыре такие скобки оклеют полосу размером 4×6 в одной грани куба и по 4 клетки, не занятые уголками, в двух соседних гранях (см. рис. 5б).

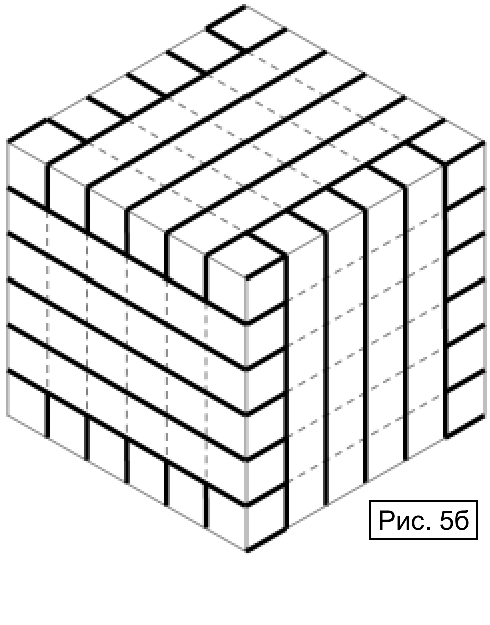


Рис. 5б

6. Коробки. В ряд стоят семь коробок, в которых по порядку лежат 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 орехов. За один шаг можно выбрать любые две коробки А и Б, подсчитать общее количество орехов в коробках, стоящих между ними, и такое количество орехов перенести из А в Б. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы во всех коробках орехов стало поровну?

А. Шаповалов

Ответ: нельзя.

Решение. Всего в коробках 1 + 2 + … + 7 = 28 орехов, поэтому в итоге в каждой коробке должно оказаться 28 : 7 = 4 ореха. Докажем, что после каждого шага найдётся коробка с нечётным количеством орехов – это и будет означать, что добиться требуемого распределения орехов невозможно.

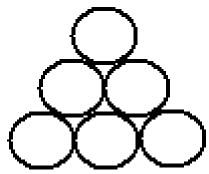
Предположим, что это не так, и рассмотрим первый шаг, после которого не осталось коробок с нечётным количеством орехов. Пусть на этом шаге мы перенесли орехи из коробки А в коробку Б. В других коробках количество орехов не изменилось, поэтому как в коробке А, так и в коробке Б было нечётное количество орехов, и количество орехов, перенесенных на этом шаге, нечётно. Но в остальных коробках уже чётное количество орехов, поэтому общее количество орехов в коробках между А и Б – чётно. Противоречие.

7. Конференция. Девять математиков встретились на международной конференции и обнаружили, что среди любых трёх из них по крайней мере двое говорят на одном языке. Известно, что каждый математик говорит не более чем на трёх языках. Докажите, что хотя бы трое из девяти говорят на одном и том же языке.

Олимпиада США, 1978 г.

Решение. Предположим, что никакие трое из математиков не говорят на одном и том же языке. Рассмотрим произвольного математика A. Он говорит не более чем на трёх языках, причём на каждом из этих языков говорит ещё максимум один математик. Значит, найдутся пять математиков, с которыми A не говорит на одном языке. Пусть один из этих пяти – математик B. Аналогично математик B говорит на одном языке не более чем с тремя математиками. Поэтому среди остальных четырёх математиков, не говорящих на одном языке с A, найдётся математик C, не говорящий на одном языке с B. Таким образом, в тройке A, B, C никакие двое не говорят на одном языке, что противоречит условию задачи.

8. Монеты. Шесть монет лежат так, как показано на рисунке. Две из них фальшивые, они весят одинаково и легче настоящих. Известно, что фальшивые монеты касаются друг друга. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно гарантировано определить фальшивые монеты?



Фольклор

Ответ: за два взвешивания.

Решение. Одного взвешивания не хватит. Действительно, оно может иметь три результата: первая чаша тяжелее, первая чаша легче или равновесие. Но возможных пар монет явно больше трёх, поэтому найти нужную пару с помощью одного взвешивания нельзя.

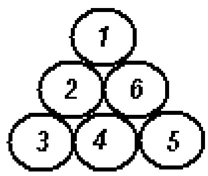


Рис. 8

Покажем, как можно определить фальшивые монеты за два взвешивания. Пронумеруем монеты, например, так, как показано на рис. 8. Два различных способа решения удобно представить в виде таблиц.

Первый способ.

<table>
<tr><td colspan="9">Первое взвешивание</td></tr>
<tr><td colspan="3">1 + 2 = 3 + 4</td><td colspan="3">1 + 2 < 3 + 4</td><td colspan="3">1 + 2 > 3 + 4</td></tr>
<tr><td colspan="9">Подозрительные пары монет по его результатам</td></tr>
<tr><td colspan="3">2; 3 или 2; 4 или 5; 6</td><td colspan="3">1; 2 или 1; 6 или 2; 6</td><td colspan="3">3; 4 или 4; 5 или 4; 6</td></tr>
<tr><td colspan="9">Второе взвешивание</td></tr>
<tr><td>1 + 3 = 5 + 6</td><td>1 + 3 > 5 + 6</td><td>1 + 3 < 5 + 6</td><td>1 + 3 = 5 + 6</td><td>1 + 3 > 5 + 6</td><td>1 + 3 < 5 + 6</td><td>1 + 6 = 2 + 3</td><td>1 + 6 > 2 + 3</td><td>1 + 6 < 2 + 3</td></tr>
<tr><td colspan="9">Фальшивые монеты</td></tr>
<tr><td>2 и 4</td><td>5 и 6</td><td>2 и 3</td><td>1 и 6</td><td>2 и 6</td><td>1 и 2</td><td>4 и 5</td><td>3 и 4</td><td>4 и 6</td></tr>
</table>

Второй способ.

<table>
<tr><td colspan="9">Первое взвешивание</td></tr>
<tr><td colspan="3">2 = 6</td><td colspan="3">2 < 6</td><td colspan="3">2 > 6</td></tr>
<tr><td colspan="9">Подозрительные пары монет по его результатам</td></tr>
<tr><td colspan="3">2; 6 или 3; 4 или 4; 5</td><td colspan="3">1; 2 или 2; 3 или 2; 4</td><td colspan="3">1; 6 или 4; 6 или 5; 6</td></tr>
<tr><td colspan="9">Второе взвешивание</td></tr>
<tr><td>3 = 5</td><td>3 > 5</td><td>3 < 5</td><td>1 = 4</td><td>1 > 4</td><td>1 < 4</td><td>1 = 4</td><td>1 > 4</td><td>1 < 4</td></tr>
<tr><td colspan="9">Фальшивые монеты</td></tr>
<tr><td>2 и 6</td><td>4 и 5</td><td>3 и 4</td><td>2 и 3</td><td>2 и 4</td><td>1 и 2</td><td>5 и 6</td><td>4 и 6</td><td>1 и 6</td></tr>
</table>

Заметим, что соседних монет – девять пар. Первым взвешиванием их необходимо разделить на три группы, в каждой из которых три пары монет. Тогда второе взвешивание позволит выбрать нужную пару из трёх. Если бы пар соседних монет было хотя бы десять, то двух взвешиваний не хватило бы.

9. Обход королём Две клетки шахматной доски назовём смежными, если они имеют хотя бы одну общую вершину. Можно ли королём обойти всю доску, посетив каждую клетку ровно один раз так, чтобы все ходы, кроме первого, совершались в клетки, смежные с чётным числом клеток, на которых король уже побывал?

Олимпиада «Балтийский Путь», 1999 г.

Ответ: нельзя.

Решение. Рассмотрим произвольный обход королём доски. В каждой клетке запишем число, равное количеству смежных с ней клеток, на которых король уже побывал, и сложим все полученные числа. Заметим, что каждая пара смежных клеток даёт единичный вклад в эту сумму (в тот момент, когда король второй раз посетил клетку из этой пары). Таким образом, наша сумма равна количеству пар смежных клеток, то есть $(4\cdot 3 + 24\cdot 5 + 36\cdot 8) : 2 = 210$ (четыре угловые клетки доски имеют по три смежных с ними, 24 клетки вдоль границы – по пять смежных, а остальные – по восемь смежных). Эта сумма чётна, поэтому количество нечётных слагаемых в ней чётно. При этом первые два слагаемых равны 0 и 1, значит, должно быть по крайней мере ещё одно нечётное слагаемое.

Можно не вычислять точное количество пар смежных клеток, а просто сказать, что это количество чётно, поскольку вертикальных пар столько же, сколько и горизонтальных, а диагональных белых пар столько же, сколько и диагональных чёрных (при шахматной раскраске доски).