XVIII Устная математическая олимпиада для 6 – 7 классов
28.02.2021
7 класс

1. Дроби. Петя записал четыре дроби, сумма которых равна 1. У каждой из них числитель 1, а знаменатель – натуральное число. То же самое сделал и Вася. Могут ли все восемь дробей оказаться попарно различными?

Фольклор

Ответ: не могут.

Решение. Предположим, что все восемь дробей оказались попарно различными. Заметим, что среди них не может быть дроби со знаменателем 1, иначе соответствующая сумма была бы больше чем 1. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Знаменатель 2 мог использовать только один из мальчиков, поэтому у другого – наименьший знаменатель не меньше чем 3. Тогда остальные его знаменатели не меньше чем 4, 5 и 6 соответственно, поэтому сумма его дробей не больше чем $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ < 1. Противоречие.

Второй способ. Если сложить все дроби, записанные мальчиками, то получится не больше чем $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$ < 2. Однако эта сумма должна быть равна 2. Противоречие.

Дроби с числителем 1 и натуральными знаменателями называются аликвотными.

2. Палочки. Шесть палочек таковы, что из любых трёх можно составить контур треугольника. Обязательно ли из них можно составить контур треугольника, у которого одна сторона состоит из одной палочки, вторая – из двух палочек, а третья – из трёх?

В. Новиков

Ответ: нет.

Решение. Пусть длина каждой из шести палочек равна 1 см. Тогда из любых трёх можно составить равносторонний треугольник. При этом стороны нового треугольника должны быть равны 1 см, 2 см и 3 см, что невозможно, так как не выполняется неравенство треугольника.

3. Стирание чисел. На доске записаны подряд в строку числа 1, 2, …, 10. Разрешается из двух соседних чисел стереть левое, если разность между ними нечётная, или правое, если эта разность чётная. Может ли после девяти таких операций на доске остаться число 1?

Ю. Игнатов

Ответ: не может.

Решение. Докажем, что последнее число в строке всегда будет чётным. Вначале это так. Если в какой-то момент последнее число стёрли, то разность между ним и соседним слева была чётная, поэтому соседнее число также чётное, а именно оно становится последним после стирания. Следовательно, после девяти операций на доске останется чётное число, то есть число 1 остаться не может.

4. Составные числа. Можно ли расставить по кругу цифры от 1 до 9 так, чтобы любые две цифры, стоящие подряд, если их прочитать как по часовой, так и против часовой стрелки, образовывали составное двузначное число?

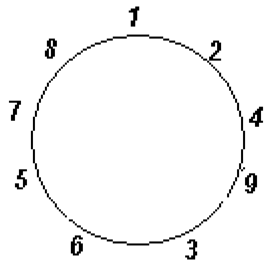
А. Блинков

Ответ: можно.

Решение. Например, см. рис. 4.

По часовой стрелке образуются составные числа 12, 24, 49, 93, 36, 65, 57, 78, 81, а против часовой стрелки: 18, 87, 75, 56, 63, 39, 94, 42, 21 – также составные.

Рис. 4



5. Шестиугольник. Существует ли равносторонний шестиугольник с вершинами в узлах клетчатой решётки, который можно разрезать на равносторонние восьмиугольники, вершины которых также находятся в узлах решетки?

А. Пешнин

Ответ: существует.

Решение. Например, см. рис. 5 а, б. В обоих случаях шестиугольник разрезается на два восьмиугольника.

Отметим, что примеры разрезания на большее количество восьмиугольников, наверное, существуют, но искать их существенно сложнее.

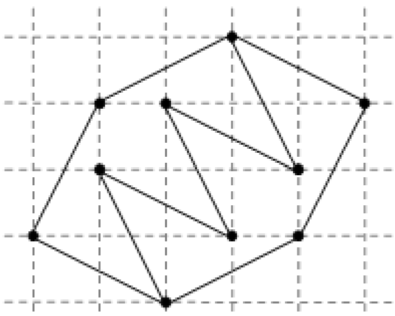


Рис. 5а

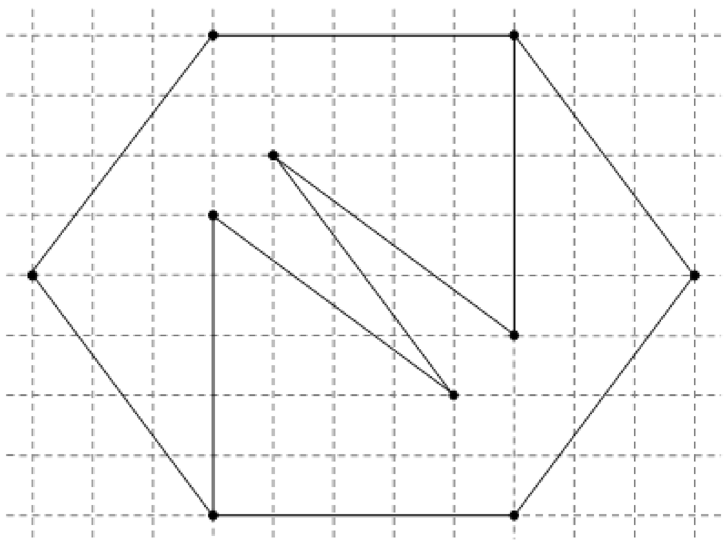


Рис. 5б

6. Игра на полоске. Прямоугольная полоска шириной в одну клетку имеет длину более трёх клеток. На каждой из трёх крайних слева клетках стоит фишка. Двое играют в следующую игру. Каждый игрок своим ходом может перенести любую фишку на любую свободную клетку вправо. Ходят по очереди, проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

Югославская олимпиада, 1983 г.

Ответ: первый игрок.

Решение. Опишем выигрышную стратегию для первого игрока. Он может выделить последнюю клетку полоски, а остальные клетки разбить на пары справа налево. В зависимости от чётности общего количества клеток либо первая фишка останется без пары, а фишки во второй и в третьей клетках образуют пару, либо первые две фишки образуют пару, а третья образует пару со свободной клеткой. Тогда ту фишку, которая осталась без пары или образовала пару со свободной клеткой, первый игрок может сразу перенести на последнюю клетку, после чего она уже двигаться не будет. Затем на каждый ход второго игрока одной из двух оставшихся фишек первый может делать ход другой фишкой и ставить её во вторую клетку той пары, которую занял второй игрок. Таким образом, у первого игрока всегда будет ход, а так как игра рано или поздно закончится, то он победит.

7. Прогулка. Два джентльмена прогуливаются по бульвару. Они одновременно начинают прогулку в одном из концов и идут каждый со своей постоянной скоростью. Дойдя до конца бульвара, джентльмен мгновенно разворачивается и с той же скоростью идёт обратно. Встретившись в третий раз, джентльмены заметили, что друг друга они не обгоняли, а расстояние от третьей точки встречи до каждой из двух первых равно 200 м. Сколько пройдёт каждый из джентльменов до следующей встречи?

А. Заславский

Ответ: 800 м и 600 м.

Решение. Обозначим начало и конец бульвара через A и B соответственно, а точки встреч – через C_1, C_2 и C_3 (см. рис. 7).

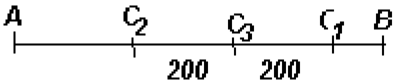


Рис. 7

Три промежутка времени: от начала до первой встречи, от первой встречи до второй и от второй встречи до третьей равны друг другу. Это так, поскольку за каждый из них джентльмены общими усилиями проходили удвоенную длину бульвара. Для удобства будем называть этот промежуток словом «тайм».

Пусть $BC_1 = x$ м, тогда за тайм медленный джентльмен прошёл $AB - x$ (м), а быстрый прошёл $AB + x$ (м). За два тайма медленный и быстрый прошли $2AB - 2x$ (м) и $2AB + 2x$ (м) соответственно, то есть $AC_2 = 2x$. За три тайма медленный и быстрый прошли $3AB - 3x$ (м) и $3AB + 3x$ (м) соответственно, то есть $BC_3 = 3x$ (поэтому точки располагаются так, как показано на рисунке).

По условию $BC_3 = BC_1 + 200$. Из уравнения $x + 200 = 3x$ получим: $x = 100$. Тогда $AB = 2x + 200 + 200 + x = 700$ (м). Значит, за один тайм быстрый проходит $700 + 100 = 800$ (м), а медленный проходит $700 - 100 = 600$ (м). Именно столько они и пройдут до следующей встречи.

Отметим, что порядок взаимного расположения точек C_1, C_2 и C_3 нельзя использовать без обоснования. В приведённом способе решения оно получается автоматически. Приведём ещё одно доказательство именно такого расположения точек, подходящее к любому решению.

Так как джентльмены не обгоняли друг друга, то их первая встреча произошла, когда медленный шёл по бульвару первый раз, а быстрый – второй раз, вторая – когда медленный шёл второй раз, а быстрый – третий раз, а третья – когда медленный шёл третий раз, а быстрый – четвёртый раз. То есть медленный прошёл бульвар дважды быстрее, чем быстрый – четырежды. Поэтому их скорости отличаются меньше чем вдвое. Если бы они отличались ровно вдвое, то точка C_1 была бы удалена от B ровно на треть отрезка AB, а точка C_2 совпала бы с ней. Так как скорости отличаются меньше, чем вдвое, то C_1 расположена в ближайшей к точке B трети отрезка AB, а C_2 – между A и C_1. По условию задачи C_3 расположена посередине между C_1 и C_2.

8. Квадрат и треугольник. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно так, что AEF – равносторонний треугольник. Точка M – середина отрезка AE. Докажите, что $CM = AB$.

М. Волчкевич

Решение. <u>Первый способ</u>. Так как прямоугольные треугольники ABE и ADF равны (по катету и гипотенузе), то $BE = DF$, значит, $CE = CF$, то есть треугольник ECF – равнобедренный (см. рис. 8а). Кроме того, $\angle EAB = \angle FAD = (90^\circ - 60^\circ) : 2 = 15^\circ$. Так как BM – медиана прямоугольного треугольника ABE, проведённая к гипотенузе, то $BM = ME$, значит, $\angle MBC = \angle AEB = 75^\circ$.

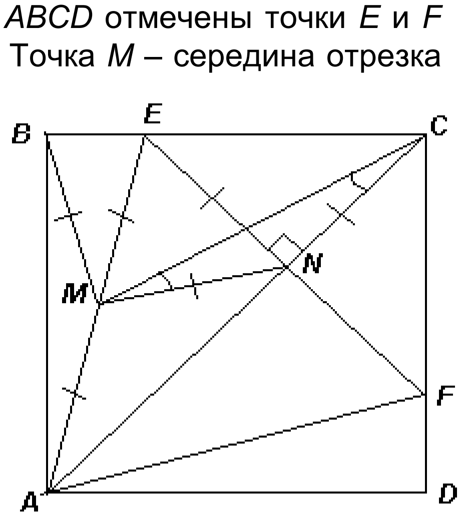


Рис. 8а

Проведём диагональ AC, которая пересечёт EF в точке N. Так как CN – биссектриса равнобедренного прямоугольного треугольника

ECF, то она является его высотой и медианой, поэтому *CN* = *NE* = *NF*. Так как *M* и *N* – середины сторон равностороннего треугольника *AEF*, то треугольник *MEN* – также равносторонний, то есть *NM* = *NE* = *NC*. Тогда $\angle ANM = 30°$, поэтому $\angle MCN = \angle CMN = 15°$. Следовательно, $\angle BCM = 30°$.

Таким образом, в треугольнике *MCB*: $\angle BMC = 180° – (\angle BCM + \angle MBC) = 180° – (30° + 75°) = 75°$. Следовательно, *CM* = *CB* = *AB*, что и требовалось.

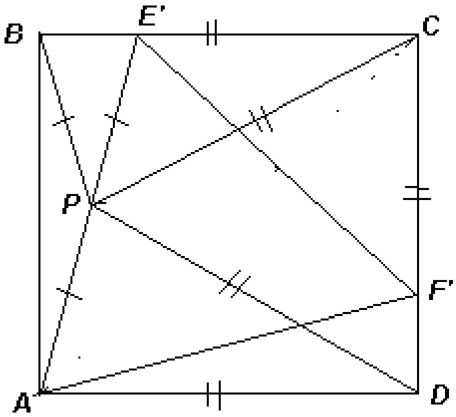


Рис. 8б

<u>Второй способ</u>. Построим равносторонний треугольник *CPD* так, чтобы точка *P* лежала внутри данного квадрата (см. рис. 8б). Тогда $\angle BCP = \angle ADP = 30°$. Треугольник *BCP* – равнобедренный, значит, $\angle CBP = \angle CPB = 75°$. Аналогично $\angle DAP = \angle DPA = 75°$. Следовательно, $\angle ABP = \angle BAP = 15°$ и *AP* = *BP*.

Пусть прямая *AP* пересекает сторону *BC* в точке *E*'. Так как *AP* = *BP*, то *BP* – медиана прямоугольного треугольника *ABE*', проведённая к гипотенузе, то есть *P* – середина *AE*'. На стороне *CD* отметим точку *F*' так, что $\angle F'AD = \angle BAE' = 15°$. Тогда из равенства прямоугольных треугольников *F'AD* и *E'AB* (по катету и острому углу) получим, что *AE*' = *AF*'. Кроме того, $\angle E'AF' = 60°$, значит, треугольник *E'AF*' – равносторонний.

Условия *AE*' = *AF*' и $\angle E'AF' = 60°$ однозначно определяют равносторонний треугольник, заданный в условии задачи, поэтому точки *E*' и *F*' совпадают с точками *E* и *F* соответственно. Следовательно, точка *P* совпадает с точкой *M* из условия. Тем самым утверждение задачи доказано.

Этот приём обычно называют «обратным ходом».

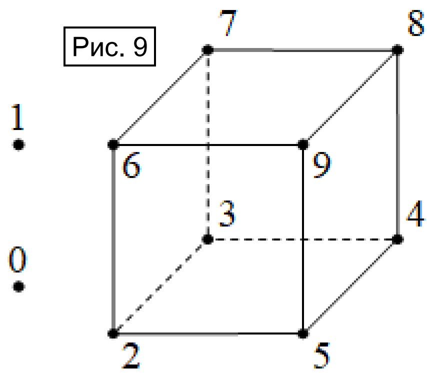
9. Встречи. Компания из десяти человек провела ряд встреч. На каждой встрече присутствовали пять человек из этих десяти. Никакие два человека не встречались более двух раз. Какое наибольшее количество встреч могло быть?

Соросовская олимпиада, 1995 г.

Ответ: 8 встреч.

Решение. Пусть на каждой встрече люди жали друг другу руку. Рассмотрим произвольного человека. С каждым из остальных девяти людей он встретился не более двух раз, то есть всего сделал не более чем 18 рукопожатий. На каждой встрече он участвовал в четырёх рукопожатиях, поэтому не мог присутствовать более чем на четырёх встречах. Следовательно, общее число встреч не могло быть больше чем $4 \cdot 10 : 5 = 8$.

Рис. 9



Пронумеруем людей цифрами от 0 до 9, тогда ровно восемь встреч могли пройти, например, следующим образом: 02345, 06789, 02479, 03568, 12376, 13487, 14598, 15269.

Описать и обосновать этот пример можно так. Обозначим людей точками, причём точки 2, 3, …, 9 являются вершинами куба (см. рис. 9). Тогда человек с номером 0 мог встречаться с четвёрками, образующими нижнюю и верхнюю грани, а также с двумя четвёрками попарно несмежных вершин, а человек с номером 1 – со всеми четвёрками, образующими боковые грани.