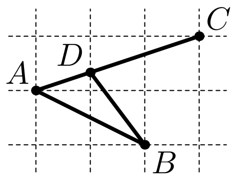
Шестнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Восемнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 16 мая 2021 года

Решения задач

8–9 класс



1. (*М. Волчкевич*) На клетчатой бумаге отметили точки A, B, C и D (см. рис.). Найдите тангенс угла ABD. (*Тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему.*)

Ответ: 0,5.

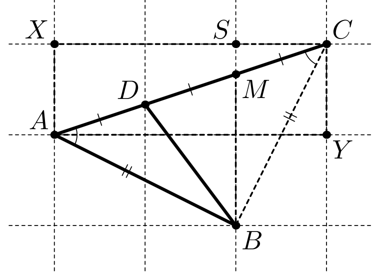


Рис. 8–9.1

Решение. Отметим на чертеже точки X, Y, M и S (см. рис. 8–9.1). Рассмотрим прямоугольник $AXCY$. По теореме Фалеса диагональ AC прямоугольника делится линиями сетки на три равные части, то есть $AD = DM = CM$. Кроме того, из равенства прямоугольных треугольников следует, что $AB = CB$, то есть треугольник ABC — равнобедренный и $\angle BAD = \angle BCM$. Следовательно, $\triangle ABD = \triangle CBM$, откуда $\angle ABD = \angle CBM$. Заметим, что в прямоугольном треугольнике CBS сторона BS вдвое больше стороны CS. То есть $\operatorname{tg}\angle ABD = \operatorname{tg}\angle CBM = 0{,}5$.

Комментарий. Поскольку треугольник ABC прямоугольный, то задачу можно решить, достроив его до квадрата $ABCP$. При таком решении потребуется следующий факт: отрезки, соединяющие вершину параллелограмма с серединами сторон, делят диагональ на три равные части. Чтобы получить ответ, достаточно рассмотреть треугольник BAQ, где Q — середина отрезка AP.

2. (*Ю. Блинков*) Дана трапеция, в которой одно основание в два раза больше другого. С помощью одной линейки (без делений) постройте среднюю линию этой трапеции.

Решение. Пусть дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, причем $AD = 2BC$ (см. рис. 8–9.2). Для построения средней линии достаточно построить любые две точки ей принадлежащие, например, середины диагоналей AC и BD.

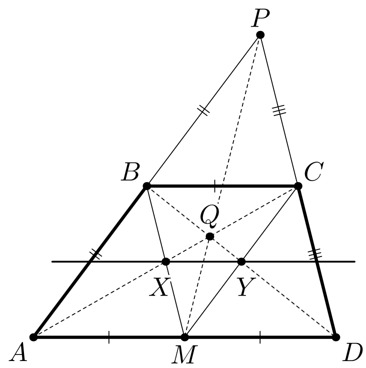


Рис. 8–9.2

Для того, чтобы их построить достаточно найти середину отрезка AD. Действительно, пусть M — середина AD. Тогда $ABCM$ — параллелограмм и отрезок BM проходит через середину диагонали AC. Аналогично, отрезок CM проходит через середину диагонали BD. Также заметим, что если рассмотреть треугольник APD, где P — точка пересечения прямых AB и CD, то отрезок BC является его средней линией ($BC = 0{,}5AD$ и $BC \parallel AD$), то есть AC и BD — медианы этого треугольника.

Отсюда вытекает следующий способ построения:

1) Построим P — точку пересечения прямых AB и CD.

2) Построим Q — точку пересечения AC и BD (медиан треугольника APD).

3) Построим M — точку пересечения PQ и AD.

4) Построим X — точку пересечения AC и BM и Y — точку пересечения BD и CM.

5) Построим прямую XY, проходящую через середины диагоналей, то есть содержащую среднюю линию трапеции.

Комментарий. Вместо свойства медиан треугольника можно было использовать, что середины оснований трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой.

3. (*Е. Бакаев*) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C острые и равные между собой, а угол ABD — прямой. Точка M — середина отрезка AC. Докажите, что прямые MB и CD перпендикулярны.

Решение. *Первый способ.* Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из A на прямую CD (см. рис. 8–9.3а). Тогда четырёхугольник $ABDK$ — вписанный и $\angle BAD = \angle BKD$. Следовательно, треугольник KBC равнобедренный. Пусть BH его высота. Докажем, что она проходит через точку M, откуда и следует утверждение задачи. Заметим, что BH параллельна AK и $KH = CH$, то есть BH содержит среднюю линию треугольника ACK и проходит через точку M.

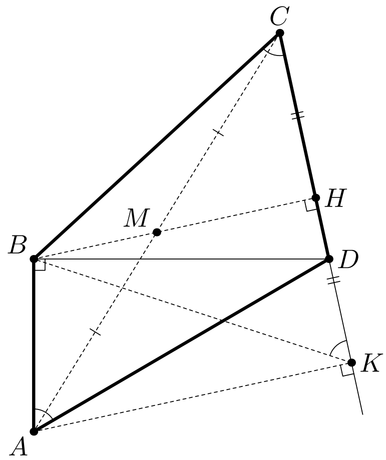


Рис. 8–9.3а

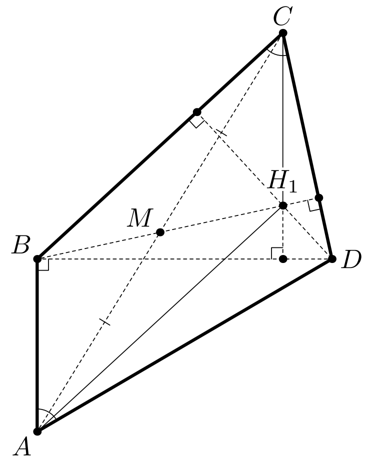


Рис. 8–9.3б

Второй способ. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCH$ (см. рис. 8–9.3б). Докажем, что H — ортоцентр треугольника BCD, откуда и будет следовать утверждение задачи.

Можно рассуждать разными способами.

А) Пусть H_1 — ортоцентр, тогда прямая CH_1 перпендикулярна BD, то есть параллельна AB. Кроме того, $\angle BH_1D = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - \angle BAD$. Следовательно, четырехугольник ABH_1D — вписанный и $\angle AH_1D = \angle ABD = 90^\circ$. Учитывая перпендикулярность DH_1 и BC, получим, что BC параллельна AH_1, то есть $ABCH_1$ — параллелограмм и точки H_1 и H совпадают.

Б) Пусть $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$. Тогда $AB = CH = BD\operatorname{ctg}\alpha$. Воспользуемся следующим фактом.

В треугольнике со стороной a и противолежащим острым углом α расстояние от вершины этого угла до ортоцентра треугольника равно $a\operatorname{ctg}\alpha$.

Заметим, что прямая CH параллельна прямой AB, то есть перпендикулярна прямой BD и $CH = BD\operatorname{ctg}\alpha$. Следовательно, H — ортоцентр, что и требовалось.

Комментарии.

1. Доказать вспомогательное утверждение можно, используя, например, что расстояние от вершины треугольника до его ортоцентра в два раза больше, чем расстояние от центра описанной окружности этого треугольника до середины противолежащей стороны.

2. Возможно также решение, использующее скалярное произведение векторов.

4. (*Д. Прокопенко*) На диагонали AC вписанного четырёхугольника $ABCD$ выбрали точку E так, что $\angle ABE = \angle CBD$. Точки O, O_1, O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABC, ABE и CBE соответственно. Докажите, что прямые AO_1, CO_2 и DO пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$, а $\angle ABD = \angle CBE = \beta$ и эти углы — острые. Тогда $\angle CAD = \alpha$, а $\angle ACD = \beta$, как вписанные, опирающиеся на те же дуги (см. рис. 8–9.4).

Рассмотрим треугольник ABE. Заметим, что $\angle AO_1E = 2\angle ABE = 2\alpha$, то есть $\angle O_1AE = 90^\circ - \alpha$, откуда $\angle O_1AD = 90^\circ$. Аналогично, в треугольнике BCE: $\angle CO_2E = 2\beta$, а $\angle O_2CE = 90^\circ - \beta$, откуда $\angle O_2CD = 90^\circ$.

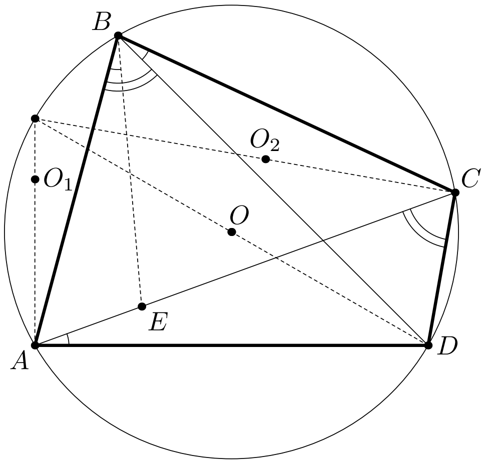


Рис. 8–9.4

Следовательно, прямые AO_1 и CO_2 пересекаются в точке, диаметрально противоположной точке D окружности, описанной около четырёхугольника, то есть в точке, лежащей на прямой DO, что и требовалось.

В случае, когда, например, угол β — тупой: $\angle O_2CE = \beta - 90°$, откуда $\angle O_2CD = \beta - (\beta - 90°) = 90°$. Дальнейшее рассуждение аналогично случаю острого угла.

Другой случай расположения точки E рассматривается аналогично.

5. (*А. Заславский*) Трапеция вписана в окружность. Докажите, что сумма расстояний от любой точки окружности до середин боковых сторон не меньше диагонали трапеции.

Решение. Пусть AB и CD — боковые стороны трапеции $ABCD$, M и N соответственно — их середины, X — точка на окружности с центром O, описанной около трапеции. Докажем, что $XM + XN \geqslant AC$. Возможны различные способы:

Первый способ. Рассмотрим поворот с центром O на угол AOC по часовой стрелке (см. рис. 8–9.5). Он переводит отрезок AB в CD, а точку M — в точку N. Пусть Y — образ точки X при этом повороте. Тогда $XM = YN$ и $XY = AC$. Следовательно, $XM + XN = YN + XN \geqslant XY = AC$, используя неравенство треугольника.

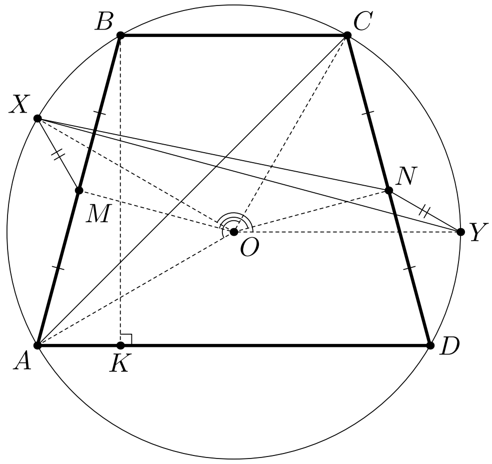


Рис. 8–9.5

Комментарий. Ту же идею можно реализовать иначе. Проведём через точку A прямую, параллельную CX. Определим точку Y как пересечение этой прямой и окружности. Тогда $XY = AC$ как диагонали равнобокой трапеции, а равенство $XM = YN$ будет следовать из равенство треугольников XAM и YCN по двум сторонам и углу между ними.

Второй способ. Рассмотрим четырёхугольник $OMXN$ (возможно, вырожденный). Используя неравенство Птолемея, получим: $OM \cdot XN + ON \cdot XM \geqslant OX \cdot MN$. Поскольку $OM = ON$, достаточно доказать, что $AC = \dfrac{R \cdot MN}{OM}$, где R — радиус окружности. Проведём высоту BK (см. рис. 8–9.5). Тогда $KD = MN$, а $\angle BOM = 0{,}5\angle BOA = \angle BDA$. Следовательно,

$AC = BD = \dfrac{KD}{\cos\angle BDA} = \dfrac{MN}{\cos\angle BOM} = \dfrac{R\cdot MN}{OM}$, что и требовалось.

Комментарий. Равенство в неравенстве Птолемея достигается тогда и только тогда, когда четырёхугольник — вписанный, то есть в данном случае, когда XO — биссектриса угла MXN. Это, в свою очередь, означает, что точка X — точка касания окружности и эллипса с фокусами M и N и диаметром, равным AC. Указанный эллипс касается оснований трапеции в их серединах и дважды касается окружности.

6. (*Д. Швецов*) Точка M — середина стороны BC остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, H — ортоцентр этого треугольника. Прямая MH пересекается с биссектрисой угла A в точке Q. Окружность, построенная на AQ как на диаметре, пересекает прямые AB и AC в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через точку H.

Решение. Используем следующие факты (первый и третий — без доказательства):

1) Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин сторон, лежат на описанной окружности этого треугольника и диаметрально противоположны вершинам.

2) Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC; M — середина стороны BC (см. рис. 8–9.6а). Прямая, проходящая через точку H перпендикулярно отрезку MH, пересекает стороны AB и AC в точках E и F. Тогда $HE = HF$.

3) Основания перпендикуляров, опущенных из точки описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой (прямая Уоллеса-Симсона).

Докажем факт 2. Пусть H' симметрична H относительно точки M. Тогда H' лежит на описанной окружности треугольника ABC и $\angle ACH' = \angle ABH' = 90^\circ$ (см. факт 1). Следовательно, четырёхугольник $H'CEH$ — вписанный и $\angle HCH' = \angle HEH'$. Аналогично, $\angle HBH' = \angle HFH'$. Осталось заметить, что $HCH'B$ — параллелограмм.

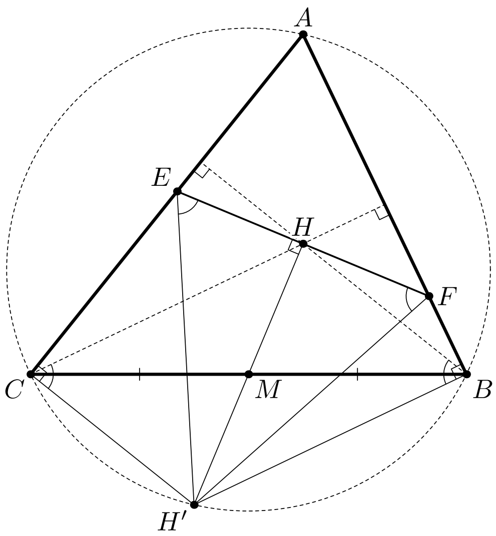


Рис. 8–9.6а

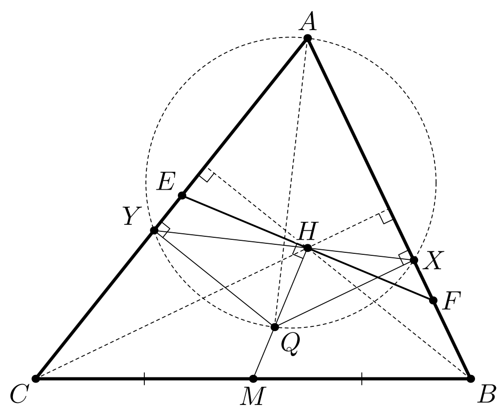


Рис. 8–9.6б

Вернёмся к решению. Проведём прямую EF, согласно факту 2. Воспользуемся тем, что биссектриса угла треугольника и серединный перпендикуляр к противолежащей стороне пересекаются на описанной окружности этого треугольника. Заметим, что точка Q лежит на серединном перпендикуляре к отрезку EF и на биссектрисе угла A, следовательно, четырёхугольник $QEAF$ — вписанный. Применив факт 3 к треугольнику AEF и точке Q, получим требуемое.

Комментарии. 1) Вместо использования факта 3 возможен непосредственный подсчёт углов.
2) Треугольник XAY — равнобедренный.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, А. Хачатурян.

Решения задач

10–11 класс

1. (*Фольклор*) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, E — произвольная точка этой окружности. Известно, что расстояния от точки E до прямых AB, AC, BD и CD равны a, b, c и d соответственно. Докажите, что $ad = bc$.

Решение. Заметим, что $\angle EAB = \angle EDB$, а $\angle BAC = \angle BDC$, как вписанные, опирающиеся на одну дугу (см. рис. 10–11.1). Обозначим их через α и β соответственно. Пусть A', B', C' и D' — основания перпендикуляров из точки E, равные a, b, c и d соответственно. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Заметим, что четырёхугольники $AEA'B'$ и $DEC'D'$ вписаны, откуда $\angle EB'A' = \alpha = \angle ED'C'$, а $\angle B'EA' = \beta = \angle D'EC'$. Следовательно, треугольники $EA'B'$ и $EC'D'$ подобны, то есть $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, откуда и следует искомое равенство.

Второй способ. Из двух пар прямоугольных треугольников с общими гипотенузами, получим: $a = AE \cdot sin\alpha$, $b = AE \cdot sin(\alpha + \beta)$, $c = DE \cdot sin\alpha$, $d = DE \cdot sin(\alpha + \beta)$, откуда и следует искомое.

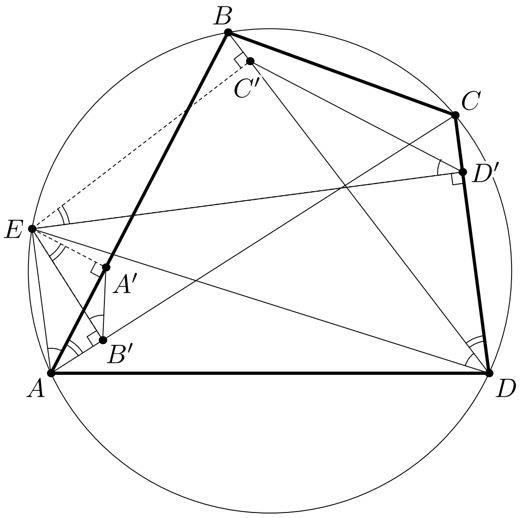


Рис. 10–11.1

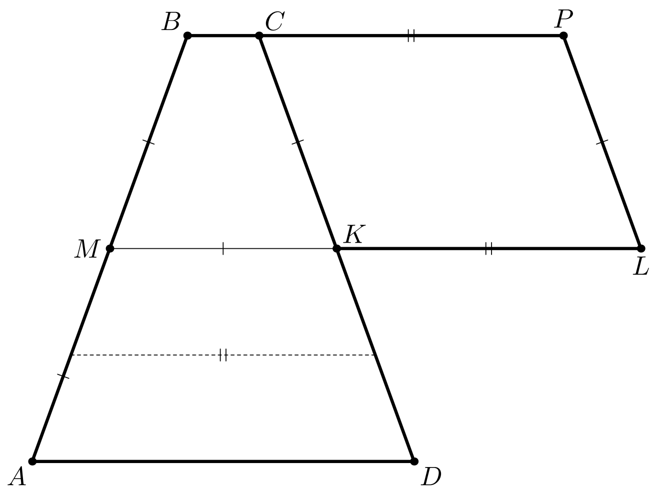


Рис. 10–11.2

2. (*Д. Шноль*) В двух четырёхугольниках равны площади, периметры и соответствующие углы. Обязательно ли такие четырёхугольники равны?

Ответ: нет, не обязательно.

Решение. Рассмотрим две равнобокие трапеции:

1) с основаниями 4 и 8 и боковой стороной 12;

2) с основаниями 11 и 13 и боковой стороной 6.

Периметры трапеций, очевидно, равны. Проведя высоты в данных трапециях, получим, что соответствующие прямоугольные треугольники подобны с коэффициентом 2, то есть углы трапеций равны и высота первой трапеции в два раза больше. Учитывая, что средняя линия у нее в два раза меньше, чем у второй трапеции, получим равенство площадей. Итак, у двух трапеций равны площади, периметры и соответствующие углы, но сами трапеции не равны.

Комментарий. *Путь к решению.* Можно рассмотреть равнобокую трапецию $ABCD$, у которой средняя линия MK равна половине боковой стороны (см. рис. 10-11.2) и построить равнобокую трапецию $MBPL$ так, чтобы в параллелограмме $KCPL$ и трапеции $AMKD$ периметры и площади были одинаковы. Это получится, если сторона параллелограмма $KCPL$ равна средней линии трапеции $AMKD$.

3. (*Ю. Блинков*) В окружности с центром O проведена хорда BC. Точка A движется по большей дуге BC, AL — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что расстояние от центра описанной окружности треугольника AOL до прямой BC не зависит от положения точки A.

Решение. *Первый способ.* Пусть K — вторая точка пересечения описанной окружности треугольника AOL и прямой BC (см. рис. 10–11.3а). Докажем, что OK и AL перпендикулярны.

Обозначим углы A, B и C треугольника ABC через α, β и γ соответственно. Без ограничения общности можно считать, что $\gamma > \beta$ (в случае если $\gamma = \beta$ треугольника AOL не существует).

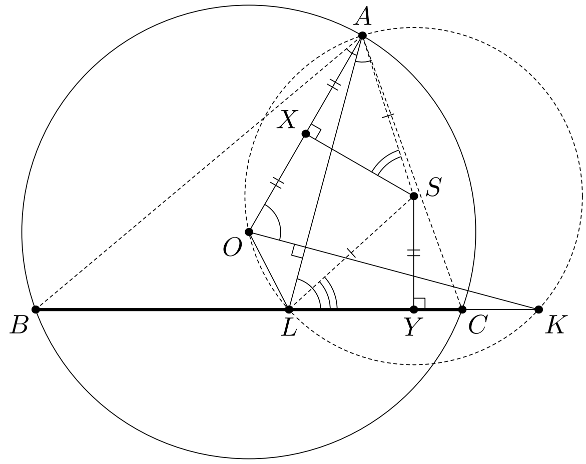


Рис. 10–11.3а

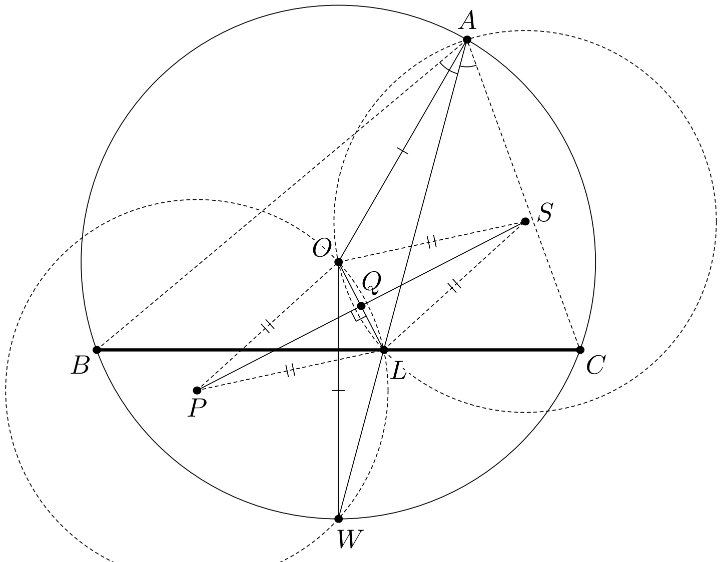


Рис. 10–11.3б

Тогда $\angle AOK = \angle ALK = \beta + 0{,}5\alpha$, а $\angle OAL = \angle CAO - \angle CAL = 90^\circ - \beta - 0{,}5\alpha$, то есть OK и AL перпендикулярны.

Рассмотрим точку S — центр описанной окружности треугольника AOL. Докажем, что расстояние от S до прямой BC равно половине длины отрезка OA.

Пусть X и Y — основания перпендикуляров, опущенных из точки S на прямые OA и BC соответственно. Заметим, что, в силу перпендикулярности диагоналей четырёхугольника $AOLK$, $\angle ASO + \angle LSK = 180^\circ$. Следовательно, $\angle ASX + \angle LSY = 90^\circ$, откуда следует равенство треугольников ASX и SLY по гипотенузе и острому углу. То есть $SY = AX = 0{,}5AO$.

Осталось заметить, что длина отрезка AO не зависит от положения точки A.

Второй способ. Пусть биссектриса AL пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке W, S — центр описанной окружности треугольника AOL, P — центр описанной окружности треугольника WOL, Q — точка пересечения PS и OL (см. рис. 10–11.3б).

Заметим, что $OA = OW$. Тогда, по следствию из теоремы синусов, равны радиусы окружностей, описанных около треугольников AOL и WOL. Следовательно, $POSL$ — ромб и Q — середина отрезков PS и OL.

Поскольку точки O и W — фиксированы, точка P лежит на фиксированной прямой, перпендикулярной OW, то есть параллельной BC. Кроме того, L лежит на BC, то есть Q также лежит на фиксированной прямой, параллельной BC. Следовательно, точка S — симметричная P относительно Q, также лежит на фиксированной прямой, параллельной BC, откуда и следует утверждение задачи.

Комментарий. Точку W можно использовать и по-другому. Заметим, что $WL \cdot WA = WC^2$, то есть $WL \cdot WA$ фиксировано. Следовательно, вторая точка X пересечения окружности, описанной около треугольника AOL, с прямой WO тоже фиксирована. Осталось заметить, что точка S лежит на серединном перпендикуляре к отрезку OX.

4. (*О. Смирнов*) Выпуклый восьмигранник $STABCD$ с гранями SAB, SBC, SCD, SDA, TAB, TBC, TCD и TDA таков, что существует сфера, касающаяся всех его ребер. Докажите, что точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Решение. Будем пользоваться следующими фактами:

1. Если три плоскости попарно пересекаются по трём прямым, то эти прямые либо параллельны, либо пересекаются в одной точке.

2. Если к сфере проведены касательные из одной точки, то точки касания лежат в одной плоскости.

3. Если сфера касается четырёхзвенной замкнутой ломаной, то точки касания лежат в одной плоскости.

Первый факт легко доказать методом от противного, рассмотрев случаи параллельности двух прямых и не параллельности никаких двух из трёх данных прямых.

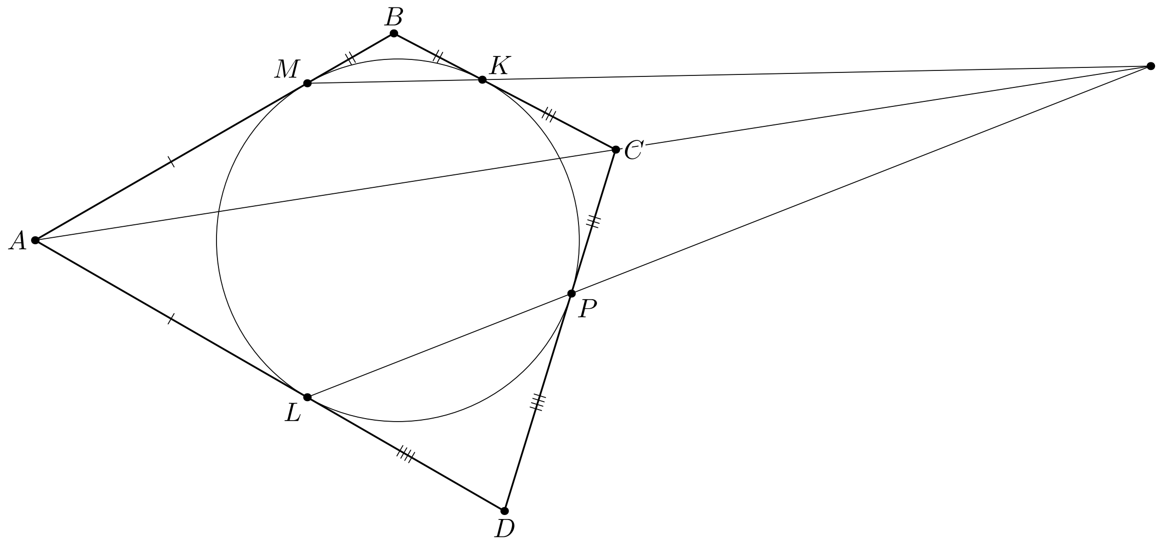


Рис. 10–11.4а

Второй факт следует из того, что две сферы пересекаются по окружности.

Докажем третий факт. Пусть сфера касается ломаной $ABCD$ в точках M, K, P и L (см. рис. 10–11.4а). Тогда $BM = BK$, $AM = AL$, $DP = DL$ и $CK = CP$. Если MK параллельна AC, то, учитывая равенства, записанные выше, и подобие треугольников, PL также параллельна AC. В противном случае, воспользовавшись теоремой Менелая для треугольников ABC и ADC, получим, что прямые MK и PL пересекают AC в одной и той же точке. Следовательно, прямые MK и PL параллельны или пересекаются, то есть лежат в одной плоскости.

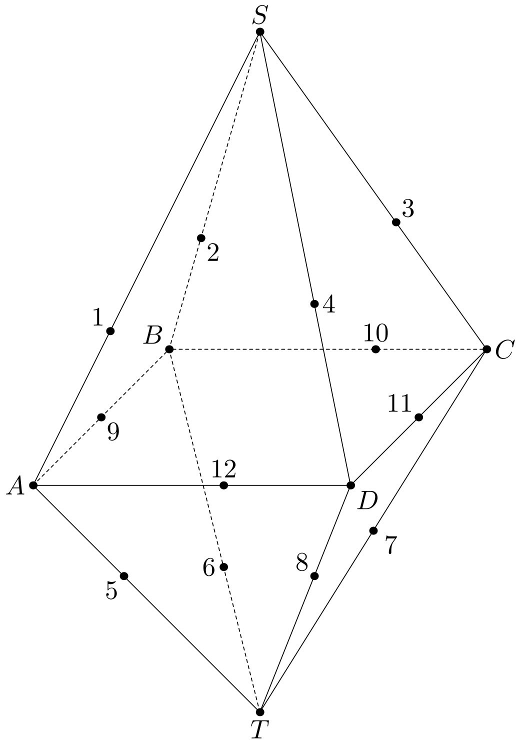


Рис. 10–11.4б

Теперь вернёмся к задаче. Обозначим точки касания числами. Пусть точки касания сферы с рёбрами SA, SB, SC и SD — 1, 2, 3 и 4 соответственно; с рёбрами TA, TB, TC и TD — 5, 6, 7 и 8 соответственно; с рёбрами AB, BC, CD и AD — 9, 10, 11 и 12 соответственно (см. рис. 10–11.4б). Из приведённых выше фактов следует, что каждая "четвёрка"точек образует плоскость. Кроме того, лежат в одной плоскости: 1, 3, 5 и 7; 1, 3, 9, 10; 1, 3, 11 и 12.

Будем для обозначения плоскостей и прямых использовать скобки: $(1, 2, 3)$ — плоскость, содержащая точки 1, 2 и 3; $(1, 2)$ — прямая, содержащая точки 1 и 2. Получим, что параллельны, либо пересекаются в одной точке следующие тройки прямых: AC, $(9, 10)$ и $(11, 12)$; BD, $(9, 12)$ и $(10, 11)$; $(1, 4)$, $(5, 8)$ и AD.

Заметим, что если, например, точка A лежит в плоскости $(9, 10, 11, 12)$, то точки B, C и D также лежат в ней и утверждение задачи доказано. Рассмотрим пересечение плоскостей $(1, 2, 3, 4)$ и $(5, 6, 7, 8)$. Если эти плоскости параллельны, то прямые AB, BC, CD и AD параллельны прямым $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ и $(1, 4)$ соответственно, то есть A, B, C, D лежат в плоскости, параллельной $(1, 2, 3, 4)$.

Пусть плоскости $(1, 2, 3, 4)$ и $(5, 6, 7, 8)$ пересекаются. Тогда не существует двух пар параллельных прямых, принадлежащих соответственно этим плоскостям и пересекающихся между собой.

Рассмотрим прямые AC, $(9, 10)$ и $(11, 12)$. Пусть они пересекаются в точке X. Тогда, рассмотрев плоскости $(1, 3, 9, 10)$; $(1, 3, 11, 12)$ и $(9, 10, 11, 12)$, получим, что точка X лежит также на прямой $(1, 3)$. Аналогично, она лежит на прямой $(5, 7)$. Следовательно, она принадлежит всем трём плоскостям. Аналогично, прямые BD, $(9, 12)$ и $(10, 11)$ пересекаются в точке Y, принадлежащей этим плоскостям. Следовательно, XY — прямая пересечения плоскостей $(1, 3, 9, 10)$; $(1, 3, 11, 12)$ и $(9, 10, 11, 12)$. Кроме того, точка Z пересечения $(1, 4)$, $(5, 8)$ и AD (если они параллельны, то рассмотрим, например, тройку $(3, 4)$, $(7, 8)$ и CD) также принадлежит указанному пересечению, то есть и плоскости $(9, 10, 11, 12)$. Учитывая, что точка 12 прямой AD также лежит в этой плоскости, получим требуемое. Если же AC, $(9, 10)$ и $(11, 12)$ параллельны, то прямая пересечения плоскостей $(1, 3, 9, 10)$; $(1, 3, 11, 12)$ и $(9, 10, 11, 12)$ параллельна этим прямым, то есть прямая ZY параллельна AC и прямой $(11, 12)$ и они также лежат в одной плоскости.

Комментарии. 1. Решение можно записать короче, используя терминологию проективной геометрии. В этом случае у любых двух прямых, лежащих в одной плоскости, будет общая точка (возможно, бесконечно удалённая), а любые две плоскости пересекаются по прямой (возможно, бесконечно удалённой).

2. Аналогично можно доказать, что, например, точки S, A, T и C также лежат в одной плоскости.

3. Возможно также решение с помощью проективного преобразования пространства, в результате которого прямая ST будет проходить через центр сферы (предварительно нужно объяснить, почему прямая ST её пересекает).

4. Также можно рассматривать пересечение двух конических поверхностей с вершинами в точках S и T.

5. (*М. Дидин*) В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC точки A', B' и C' симметричны центру описанной окружности относительно биссектрис. Докажите, что центры окружностей девяти точек треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают.

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности треугольника ABC (см. рис. 10–11.5). Заметим, что точки A', B', C' лежат на высотах треугольника ABC. Кроме того, в силу симметрии, $IC' = IO$ и аналогично для остальных точек, то есть I — центр окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$.

Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, H' — ортоцентр треугольника $A'B'C'$. Поскольку центр окружности девяти точек является серединой отрезка, соединяющего центр описанной окружности и ортоцентр, то достаточно доказать векторное равенство: $0{,}5\overrightarrow{OH} - 0{,}5\overrightarrow{IH'} = \overrightarrow{OI}$.

Далее будем использовать следующий факт. Пусть в треугольнике ABC: O — центр описанной окружности, H — ортоцентр. Тогда $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Тогда для треугольника $A'B'C'$ равенство выглядит так: $\overrightarrow{IH'} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IC'}$. Теперь достаточно доказать, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{IA'} - \overrightarrow{IB'} - \overrightarrow{IC'} = 2\overrightarrow{OI}$ (1). Заметим, что $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}$, а $\overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AA'}$. Записав аналогичные равенства и подставив в (1), получим, что достаточно доказать равенство $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{OI}$ (2).

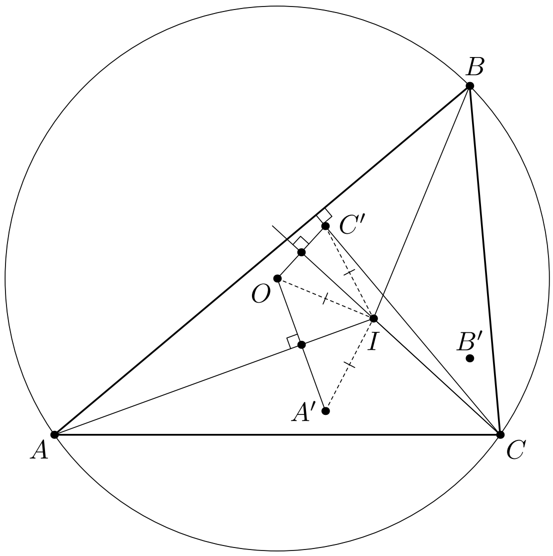


Рис. 10–11.5

Докажем его, спроектировав левую и правую часть на прямые, содержащие стороны треугольника. Если вектора проекций будут одинаковы, то выполняется и векторное равенство. Спроектируем, например, на прямую BC (для других сторон — аналогично). Заметим, что $BB' = CC' = R$, а $\angle CBB' = 90^\circ - \gamma$ и $\angle BCC' = 90^\circ - \beta$, где R — радиус описанной окружности, а γ и β — углы C и B треугольника ABC соответственно. Следовательно, проекция вектора левой части равна вектору с модулем, равным $R\sin\gamma - R\sin\beta$, а правой — вектору с модулем $0{,}5(c - b)$, где $c = AB$, $b = AC$, причем вектора сонаправлены, так как их направление зависит только от того, что больше, c или b. Для доказательства равенства модулей достаточно применить теорему синусов к треугольнику ABC.

Комментарий. Утверждение задачи верно и для тупоугольного треугольника.

6. (*Tran Q. H.*, *А. Заславский*) В квадрат $ABCD$ вписан правильный треугольник XYZ так, что точки X, Y и Z лежат на сторонах AB, BC и AD соответственно. Прямая, проходящая через центры квадрата и треугольника, пересекает CD в точке T. Найдите угол CTY.

Ответ: 15°.

Решение. *Первый способ.* Построим на биссектрисе угла X такую точку V, что $XV = XY$. Тогда отрезки XV и YZ равны и перпендикулярны, причём X, Y и Z лежат на сторонах квадрата. Следовательно, четвёртая сторона квадрата проходит через точку V (см. рис. 10–11.6а).

Кроме того, прямая, проходящая через центр квадрата параллельно его противолежащим сторонам, делит пополам любой отрезок с концами на этих сторонах.

Пусть O — центр квадрата, I – центр треугольника, M и K — середины XV и YZ соответственно. Тогда угол MOK — прямой, то есть O лежит на окружности w с диаметром MK.

Рассмотрим окружность ω, описанную около треугольника YZV. Докажем, что она проходит через точку T.

Поскольку O, I и T лежат на одной прямой, а $OM \parallel VT$, то достаточно будет доказать, что I — центр гомотетии окружностей w и ω. Докажем это.

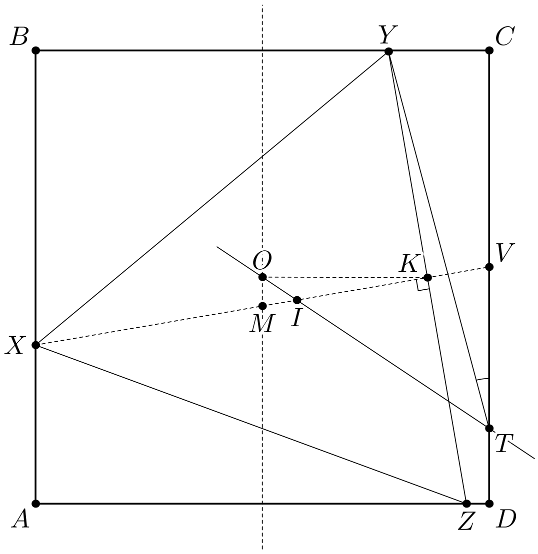


Рис. 10–11.6а

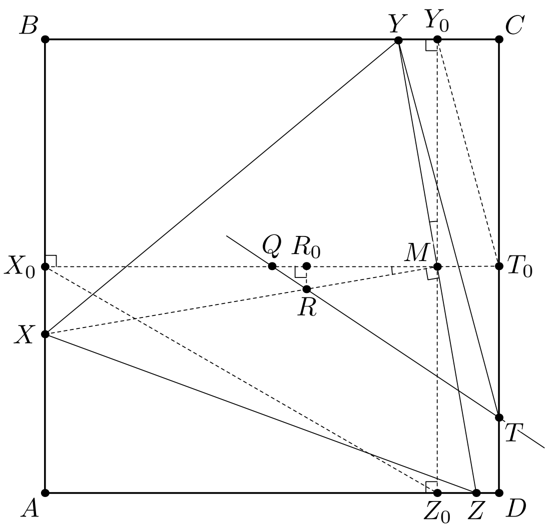


Рис. 10–11.6б

Пусть сторона равностороннего треугольника равна 1. Поскольку точка X — центр окружности ω, то центр гомотетии лежит на прямой XK. С другой стороны, так как $XM = 0{,}5$, а $XK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $MK = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, то есть отношение радиусов окружностей равно $2 \cdot (\sqrt{3}+1)$. Пусть S — центр окружности w. Тогда

$$\frac{IX}{IS} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{6} - \dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}+1\right).$$

Следовательно, T лежит на окружности ω и угол $\angle CTY = \angle YZV = 0{,}5\angle YXV = 15^\circ$.

Второй способ. Пусть сторона квадрата равна 1. Точка Q — центр квадрата, R — центр треугольника, M — середина YZ (см. рис. 10–11.6б). Тогда прямоугольный треугольник MXZ подобен треугольнику MX_0Z_0, где X_0 и Z_0 — проекции точки M на AB и AD соответственно.

Следовательно, точка M фиксирована (не зависит от выбора треугольника XYZ) — на расстоянии $0{,}5$ от AD и $0{,}5\sqrt{3}$ от AB. Тогда расстояние от R до AB также фиксировано и равно $1/\sqrt{3}$.

Пусть $X_0Y_0Z_0$ — равносторонний треугольник, вписанный в квадрат, такой, что X_0 — середина AB. Пусть также: T_0 — середина CD, R_0 — центр $X_0Y_0Z_0$. Тогда $\angle CT_0Y_0 = 15^\circ$.

Докажем, что $YT \parallel Y_0T_0$, откуда $\angle CTY = 15^\circ$.

Заметим, что треугольники MRR_0 и MYY_0, а также QTT_0 и QRR_0 подобны.

Тогда

$$\frac{YY_0}{TT_0} = \frac{YY_0}{RR_0} \cdot \frac{RR_0}{TT_0} = \frac{MY_0}{MR_0} \cdot \frac{QR_0}{QT_0} = \frac{QR_0}{MR_0} = \frac{CY_0}{CT_0},$$

откуда и следует параллельность прямых TY и T_0Y_0. Последнее равенство можно доказать, используя, что $QR_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$, $MR_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $CT_0 = \frac{1}{2}$, $CY_0 = MT_0 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Вычисления аналогичны первому способу решения.

Комментарий. Заметим, что если зафиксирован квадрат, а точка X движется с постоянной скоростью по стороне AB, то точка T также движется с постоянной скоростью (соответствие между X и T линейно). Тогда достаточно рассмотреть два положения точки T и доказать, что в обоих случаях искомый угол равен 15°.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников, Ф. Нилов, И. Фролов.