Семнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Девятнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 10 апреля 2022 года

Решения задач

8–9 класс

1. (*Ю. Блинков*) Дана равнобокая трапеция $ABCD$. Биссектриса угла B пересекает основание AD в точке L. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BLD, лежит на окружности, описанной около трапеции.

Решение. *Первый способ.* Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника BLD, а $\angle ABC = \angle BCD = 2\alpha$ (см. рис. 8–9.1а). Тогда $\angle ALB = \angle CBL = \alpha < 90^\circ$, а $\angle BLD = 180^\circ - \alpha > 90^\circ$. Следовательно, вписанный угол BLD и центральный угол BOD опираются на дополняющие друг друга до окружности дуги и $\angle BOD = 2\alpha = \angle BCD$. Кроме того, точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой BD. Следовательно, точки B, C, O и D лежат на одной окружности, то есть точка O лежит на окружности, описанной около трапеции.

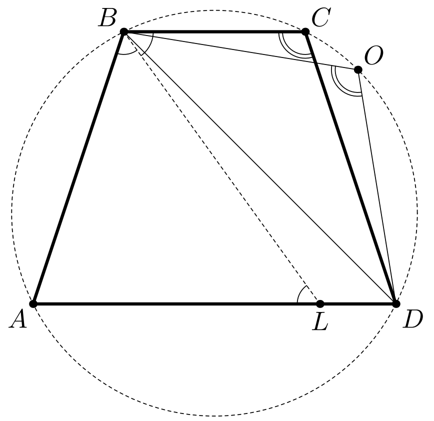

Рис. 8–9.1а

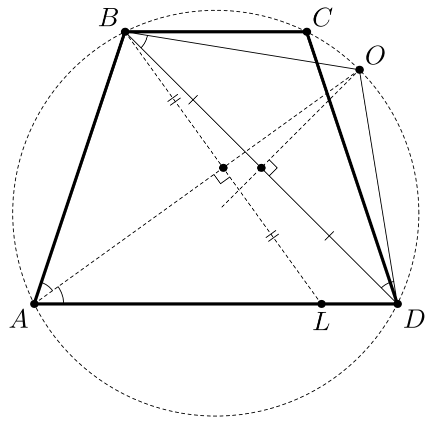

Рис. 8–9.1б

Второй способ. Пусть O — точка пересечения серединного перпендикуляра к BD и дуги BCD окружности, описанной около трапеции (см. рис. 8–9.1б). Докажем, что O также лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BL, откуда и будет следовать утверждение задачи. Заметим, что $BO = DO$, то есть $\angle BAO = \angle BDO = \angle OBD = \angle OAD$, то есть AO — биссектриса угла BAD. Осталось заметить, что треугольник BAL — равнобедренный, то есть прямая AO является серединным перпендикуляром к отрезку BL.

2. (*Ю. Блинков*) В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы из вершин B и C и серединный перпендикуляр к стороне BC. Далее отметили три точки попарного пересечения этих трёх прямых (запомнив, где какая точка), а сам треугольник стёрли. Восстановите его по отмеченным точкам с помощью циркуля и линейки.

Решение. Пусть отмечены точка I — пересечения биссектрис и точки P и Q, лежащие на серединном перпендикуляре к отрезку BC (см. рис. 8–9.2а). Заметим, что, восстановив точки B и C, мы легко восстановим точку A. Действительно, отложив углы, равные IBC и ICB в другую полуплоскость относительно BI и CI соответственно (иначе говоря, построив образ BC при симметрии относительно прямых BI и CI), на пересечении получим точку A. Итак, достаточно построить точки B и C. Это можно сделать различными способами.

Первый способ. Заметим, что точки B и C симметричны относительно прямой PQ, то есть прямые BP и CP также симметричны относительно PQ. Тогда точку C можно построить как пересечение прямой QI с прямой, симметричной PI относительно PQ. Отразив точку C относительно PQ, получим точку B.

Комментарий. Вместо симметрии можно откладывать угол, равный данному.

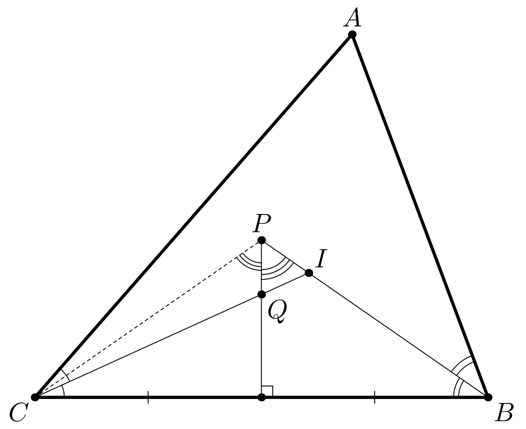

Рис. 8–9.2а

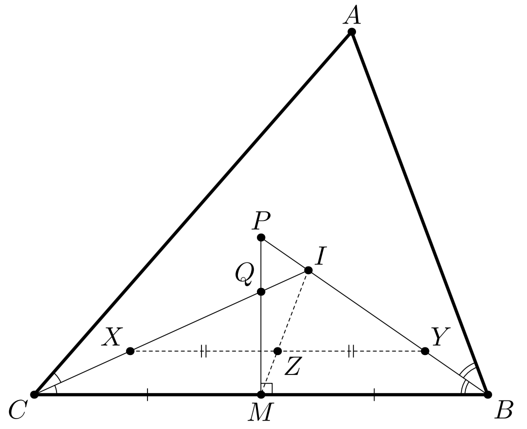

Рис. 8–9.2б

Второй способ. Сначала построим точку M — середину BC. Воспользуемся тем, что в трапеции середины оснований и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой. Пусть Z — середина отрезка XY с концами на сторонах угла BIC и параллельного BC (см. рис. 8–9.2б). Тогда точки I, Z и M лежат на одной прямой. Отсюда вытекает следующий способ построения:

1) на луче IQ возьмем произвольную точку X;

2) построим точку Y как пересечение прямой PI и прямой, перпендикулярной PQ, проходящей через точку X;

3) построим середину отрезка XY — точку Z;

4) построим точку M как пересечение прямых PQ и IZ;

5) построим точку C как пересечение прямой QI с прямой, перпендикулярной PQ и проходящей через M.

Третий способ. Сначала построим точку W — середину дуги BC окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда для построения точек B и C будет достаточно использовать, что $WB = WC = WI$ (лемма о трезубце). Заметим, что точка W является пересечением биссектрисы угла A и серединного перпендикуляра к отрезку BC. Тогда нам достаточно построить прямую AI, то есть уметь строить угол WIQ. Пусть $\angle B = \beta$. Тогда $\angle AIC = 90^\circ + 0{,}5\beta$, а $\angle WIQ = 90^\circ - 0{,}5\beta = \angle IPQ$.

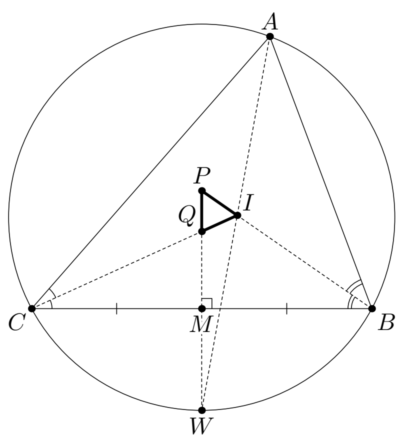

Рис. 8–9.2в

Отсюда вытекает следующий способ построения:

1) строим прямую AI, отложив угол, равный углу IPQ;

2) строим точку W как пересечение прямых AI и PQ;

3) построим точки B и C как пересечение окружности с центром W и радиусом WI с прямыми IP и IQ соответственно.

Комментарии. 1. Попутно доказано, что AI — касательная к окружности, описанной около треугольника PIQ.

2. Заметим, что, зная углы треугольника IPQ, можно найти углы треугольника ABC. Тогда задачу можно решить методом подобия, построив сначала треугольник, подобный треугольнику ABC.

3. (*М. Кунгожин*) В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны (но не параллельны), точки M и N — середины AD и BC. Серединный перпендикуляр к MN пересекает стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AP = CQ$.

Решение. Пусть K и L — середины диагоналей AC и BD соответственно (см. рис. 8–9.3а). Тогда KN и LM — средние линии треугольников ABC и ABD соответственно. Следовательно, $MKNL$ — параллелограмм, поскольку его противолежащие стороны параллельны и равны. Кроме того, так как $AB = CD$, то $NK = NL$, то есть $MKNL$ — ромб. Следовательно, точки K и L равноудалены от M и N, то есть лежат на прямой PQ. Кроме того, $\angle BPQ = \angle NKL = \angle NLK = \angle CQP$ в силу параллельности двух пар прямых. Далее можно рассуждать по-разному.

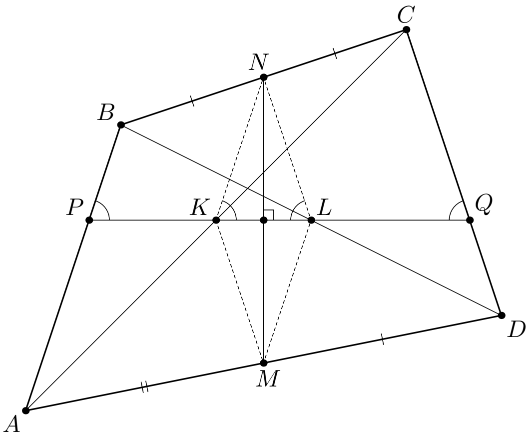

Рис. 8–9.3а

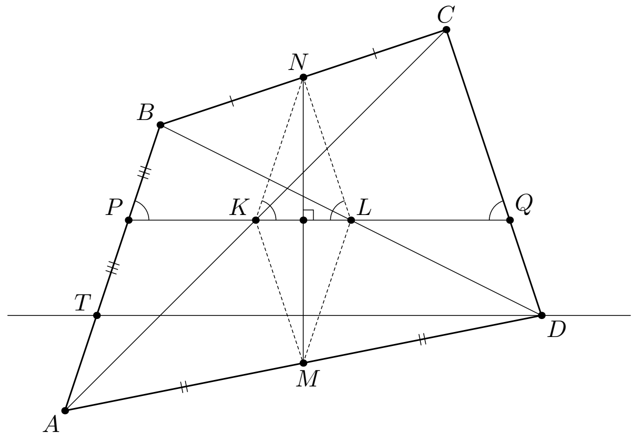

Рис. 8–9.3б

Первый способ. Проведем через точку D прямую, параллельную PQ (см. рис. 8–9.3б). Пусть T — точка пересечения этой прямой с прямой AB. Тогда $BP = PT$ по теореме Фалеса. Кроме того, $TPQD$ — трапеция с равными углами при вершинах P и Q, то есть равнобокая. Следовательно, $QD = PT = BP$, откуда $AP = CQ$.

Второй способ. Пусть X и Y — середины сторон AB и CD соответственно (см. рис. 8–9.3в). Тогда $XNYM$ — параллелограмм, противолежащие стороны которого параллельны диагоналям исходного четырехугольника, а точка O пересечения диагоналей является серединой отрезков MN и XY. Докажем, что $PX = QY$, откуда и будет следовать утверждение задачи. Пусть Z — точка на луче PO, такая, что $OZ = OP$. Тогда $PXZY$ — параллелограмм и PX параллельно и равно ZY. Кроме того, $\angle XPO = \angle OZY$. Учитывая равенство $\angle BPQ = \angle CQP$, получим, что треугольник QYZ — равнобедренный, то есть $PX = ZY = QY$, что и требовалось.

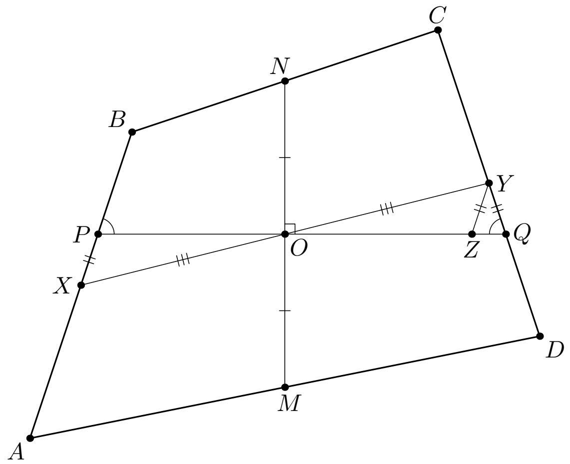

Рис. 8–9.3в

Комментарии. 1. Отметим, что в треугольниках XOP и YOQ равны две пары сторон и угол, лежащий напротив одной из них, но сами треугольники не равны.

2. В заключительной части второго способа решения можно использовать теорему синусов вместо построения параллелограмма.

3. Для доказательства равенства углов BPQ и CQP можно использовать параллельный перенос или векторное равенство $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2}$.

4. (*Д. Швецов, А. Заславский*) В треугольнике ABC угол C равен 60°. Биссектрисы AA' и BB' пересекаются в точке I. Точка K симметрична I относительно прямой AB. Докажите, что прямые CK и $A'B'$ перпендикулярны.

Решение. Заметим, что если $AC = BC$, то утверждение задачи очевидно. Рассмотрим неравнобедренный треугольник ABC.

Первый способ. Пусть X — точка пересечения CK и AA' (см. рис. 8–9.4а). Докажем, что $\angle CXA' = 60^\circ$, а $\angle B'A'X = 30^\circ$, откуда и будет следовать утверждение задачи. Используем известный факт, который легко получить из суммы углов треугольника: $\angle AIB =$

$= 90^\circ + 0{,}5\angle ACB$. В данном случае, $\angle AIB = 120^\circ$, то есть четырехугольник $B'CA'I$ — вписанный. Кроме того, CI — биссектриса угла ACB, то есть $\angle B'A'X = \angle B'A'I = \angle B'CI = 30^\circ$. Также $\angle AKB = 120^\circ$, то есть четырехугольник $ACBK$ тоже вписанный и $\angle BCK = \angle BAK = 0{,}5\angle CAB$. Кроме того, $\angle CA'A = 0{,}5\angle CAB + \angle ABC$, откуда $\angle CXA' = 180^\circ - (\angle ABC + \angle CAB) = 60^\circ$. Следовательно, $\angle B'A'X + \angle CXA' = 90^\circ$, что и требовалось.

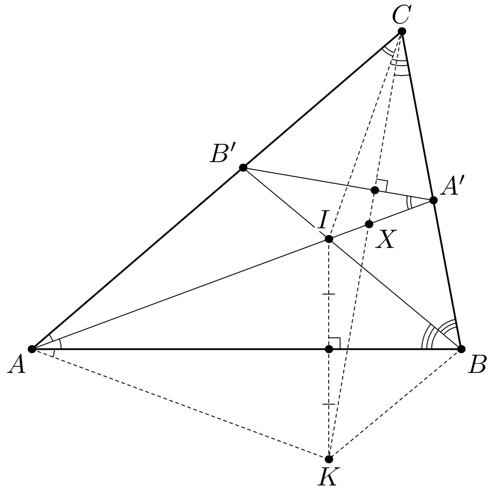

Рис. 8–9.4а

Использовать, что четырехугольник $B'CA'I$ вписанный можно иначе.

Второй способ. Так как CI — биссектриса угла ACB, то $\angle B'A'I = \angle B'CI = \angle A'CI = \angle A'B'I = 30^\circ$, то есть треугольник $B'IA'$ — равнобедренный. Докажем, что прямая CK перпендикулярна биссектрисе его внешнего угла I, откуда и будет следовать утверждение задачи. Пусть L и N — точки касания вписанной окружности со сторонами AC и AB соответственно (см. рис. 8–9.4б).

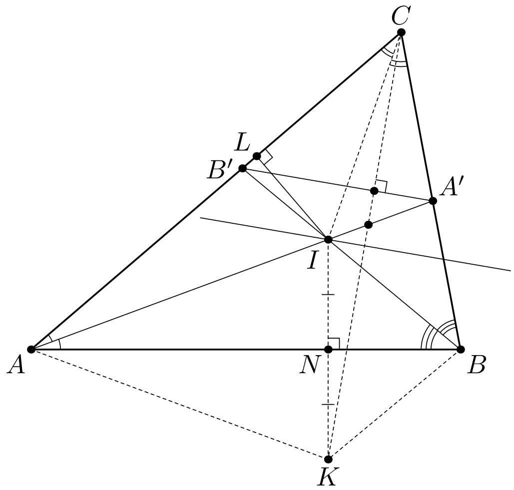

Рис. 8–9.4б

Поскольку $0{,}5\angle ACB = 30^\circ$, то в прямоугольном треугольнике CIL катет равен половине гипотенузы, то есть $IC = 2r = 2IN = IK$, где r — радиус вписанной окружности.

Следовательно, треугольник CIK — равнобедренный и биссектриса его угла I перпендикулярна CK. Докажем, что она совпадает с биссектрисой внешнего угла треугольника $B'IA'$.

Заметим, что $\angle A'IC = 180^\circ - \angle A'CI - \angle CA'A = 180^\circ - 30^\circ - 0{,}5\angle CAB - \angle ABC = 90^\circ - 0{,}5\angle ABC$, учитывая, что $\angle CAB + \angle ABC = 120^\circ$. Поскольку $\angle BIK = \angle BIN = 90^\circ - 0{,}5\angle ABC$, то $\angle A'IC = \angle BIK$, то есть биссектриса угла CIK совпадает с биссектрисой угла $A'IB$, что и требовалось.

Комментарий. Попутно доказано, что прямые AA', BB' и CK при пересечении образуют равносторонний треугольник.

5. (*А. Акопян, А. Заславский*) Даны окружность и проходящая через её центр прямая AB (точки A и B фиксированы, A вне окружности, а B — внутри). Найдите ГМТ пересечения прямых AX и BY, где XY — произвольный диаметр окружности.

Ответ: окружность с двумя выколотыми точками.

Решение. *Первый способ.* Пусть Z — точка пересечения AX и BY (см. рис. 8–9.5а). Заметим, что точка T пересечения AY и BX также принадлежит указанному ГМТ (X и Y при этом меняются местами). Докажем, что середина Q отрезка ZT фиксирована, а отрезок ZT имеет фиксированную длину.

Докажем, что $XYTZ$ — трапеция с фиксированным основанием ZT и его серединой Q.

Воспользуемся замечательным свойством трапеции:

Середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Проведём через T прямую, параллельную XY. Пусть Z_1 — точка пересечения этой прямой с прямой AX. Тогда $XYTZ_1$ — трапеция. Но точка пересечения ее диагоналей является точкой пересечения прямых AO и XT, то есть совпадает с точкой B. Тогда вершина Z_1 трапеции должна лежать на прямых AX и BY, то есть совпадать с точкой Z.

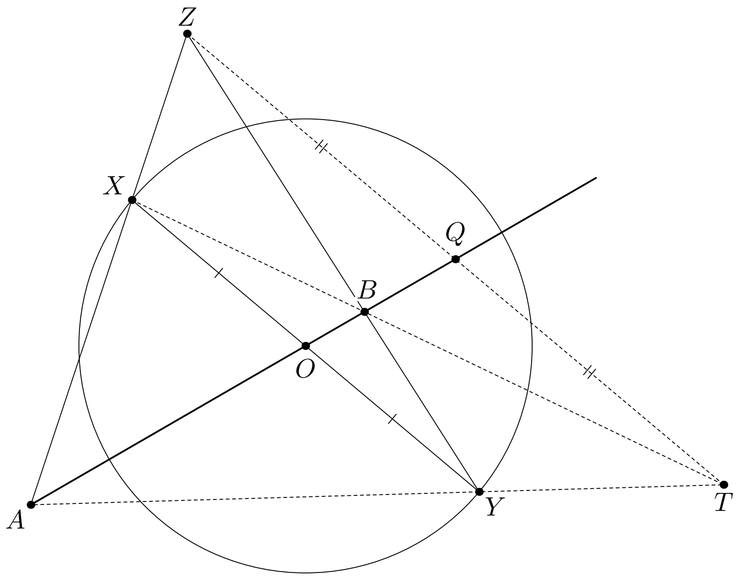

Рис. 8–9.5а

Кроме того, используя еще раз указанное свойство трапеции, получим, что середина Q отрезка ZT лежит на прямой AO. Теперь используем ещё одно свойство трапеции, которое легко получить из подобия треугольников или из теоремы о пропорциональных отрезках.

Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями BC и AD, O — точка пересечения диагоналей, P — точка пересечения продолжений боковых сторон. Тогда $BC : AD = PB : PA = CO : OA$. В данном случае, $AO : AQ = YO : TQ = OB : BQ$. Обозначим $AO = a$, $BO = b$, $OX = OY = r$, $BQ = y$; $TQ = x$. Получим: $\dfrac{a}{a+b+y} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{r}{x}$, откуда y и x определяются однозначно.

Следовательно, точка Q фиксирована, как и расстояние QT. Следовательно, все такие точки лежат на окружности с фиксированным центром Q на прямой AB и фиксированным радиусом. Осталось заметить, что точки пересечения окружности с прямой AB условию не удовлетворяют, в силу совпадения прямых AX и BY, а все остальные точки окружности принадлежат указанному ГМТ. Действительно, по точке Z мы можем восстановить точку T, а точки X и Y получить как пересечение прямых TB и AZ и, соответственно, ZB и AT. Тогда, проведя рассуждения аналогичные первой части решения, получим, что $XYTZ$ — трапеция с фиксированным основанием XY, являющимся диаметром изначальной окружности.

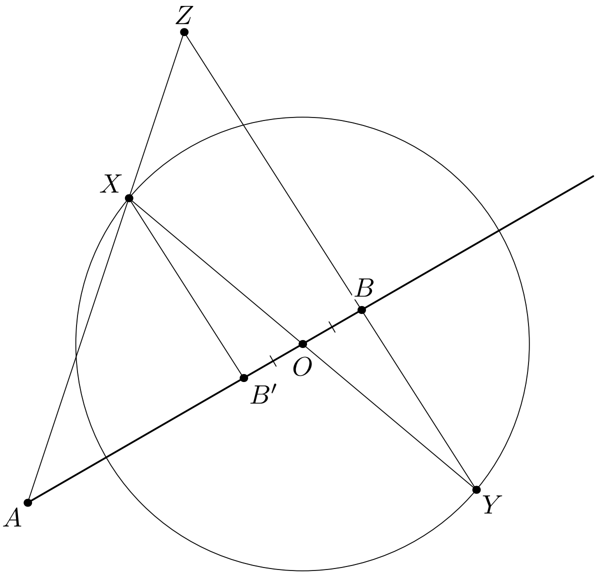

Рис. 8–9.5б

Второй способ. Используем обозначения первого способа решения (Z — точка пересечения AX и BY, $AO = a$, $BO = b$). Пусть точка B' симметрична B относительно точки O (см. рис. 8–9.5б). Тогда $BXB'Y$ — параллелограмм и $XB' \parallel ZY$. Из подобия треугольников AXB' и AZB следует, что $AZ : AX = AB : AB' = \dfrac{a+b}{a-b} = k$, где k — фиксированное число. Поскольку $AZ = k \cdot AX$, то точка Z является образом точки X при гомотетии с центром A и коэффициентом k. Так как X — произвольная точка окружности, не лежащая на прямой AB, то точка Z лежит на фиксированной окружности, гомотетичной данной, причём у каждой точки Z (кроме точек, лежащих на прямой AB), есть прообраз.

6. (*Д. Прокопенко*) В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC вписанная окружность касается стороны BC в точке T, Q — середина высоты AK, P — ортоцентр треугольника, образованного биссектрисами углов B и C и прямой AK. Докажите, что точки P, Q и T лежат на одной прямой.

Решение. Пусть перпендикуляры AM и AN, опущенные на биссектрисы углов C и B, пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно (см. рис. 8–9.6а).

Тогда M и N — середины сторон AX и AY, то есть I — центр вписанной окружности треугольника ABC является центром описанной окружности треугольника AXY, а точка T — серединой стороны XY. То есть треугольник MNT — срединный для AXY, Q лежит на его стороне MN, а точка I — его ортоцентр. Далее можно рассуждать по-разному.

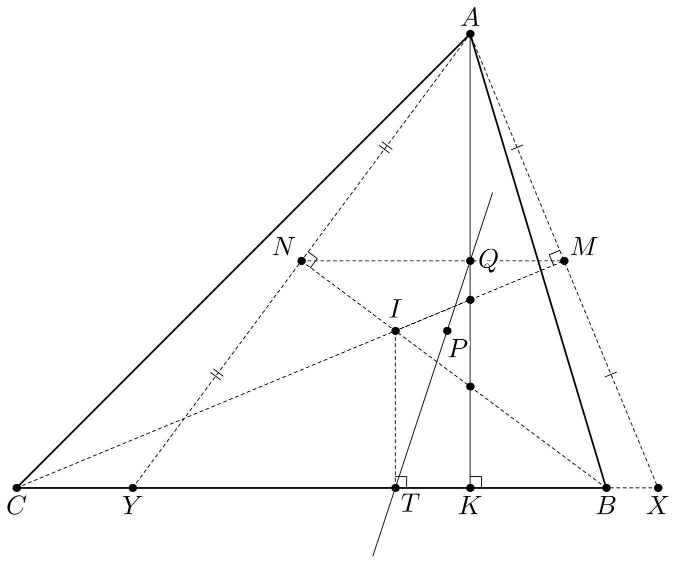

Рис. 8–9.6а

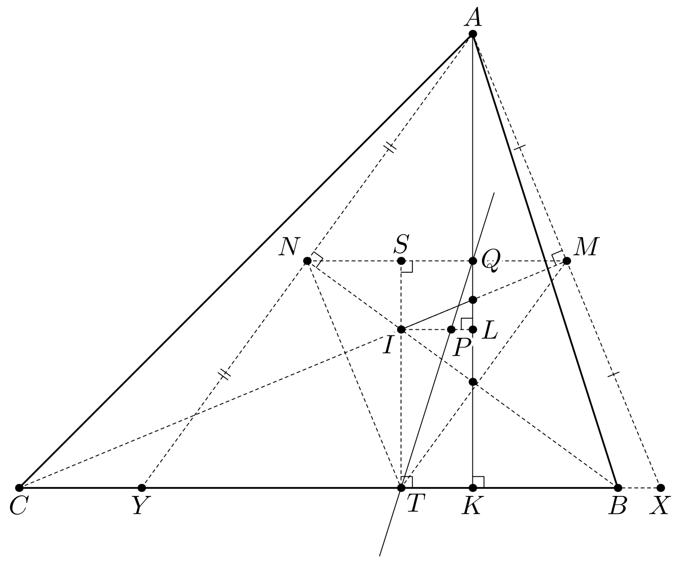

Рис. 8–9.6б

Первый способ. Заметим, что треугольник, образованный биссектрисами углов B и C и прямой AK подобен треугольнику MNT, так как их стороны соответственно перпендикулярны. Следовательно, соответствующие высоты таких треугольников должны делиться ортоцентром в одном и том же отношении. Пусть L и S — основания соответствующих высот этих треугольников, проведенных из I и T соответственно (см. рис. 8–9.6б). Тогда $TI : QL = TI : IS = IP : PL$, то есть P — точка пересечения диагоналей трапеции $TIQL$ и точки T, P и Q лежат на одной прямой.

Второй способ. Воспользуемся следующим фактом.

Пусть четыре прямые образуют четыре треугольника (*см. рис.* 8-9.6*в*). *Тогда ортоцентры этих треугольников лежат на одной прямой* (*прямая Обера*).

Рассмотрим четвёрку прямых: BN, CM, MN и AK (см. рис. 8–9.6а). Они образуют четыре треугольника. Точка T ортоцентр треугольника MIN, поскольку I — ортоцентр треугольника MNT. Кроме того, P и Q — ортоцентры ещё двух образовавшихся треугольников, поэтому T, P и Q лежат на прямой Обера.

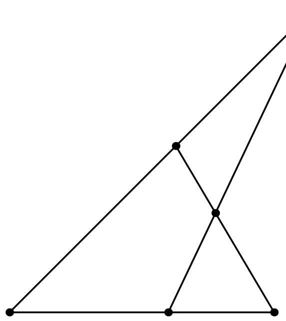

Рис. 8–9.6в

Комментарий. Про прямую Обера можно прочитать, например, здесь:
https://math.ru/lib/book/djvu/ngt/ngt.djvu.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, М. Кунгожин, Д. Прокопенко.

Семнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Девятнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 10 апреля 2022 года

Решения задач

10–11 класс

1. (*А. Шкловер*) В окружности с центром O проведены хорды AB и AC, равные радиусу. Точки A_1, B_1 и C_1 — проекции точек A, B и C соответственно на произвольный диаметр XY. Докажите, что один из отрезков XB_1, OA_1 и C_1Y равен сумме двух других.

Решение. Докажем, что выполняется равенство для соответствующих векторов. Тогда, поскольку вектора коллинеарны, один из отрезков будет равен сумме двух других, вне зависимости от расположения точек.

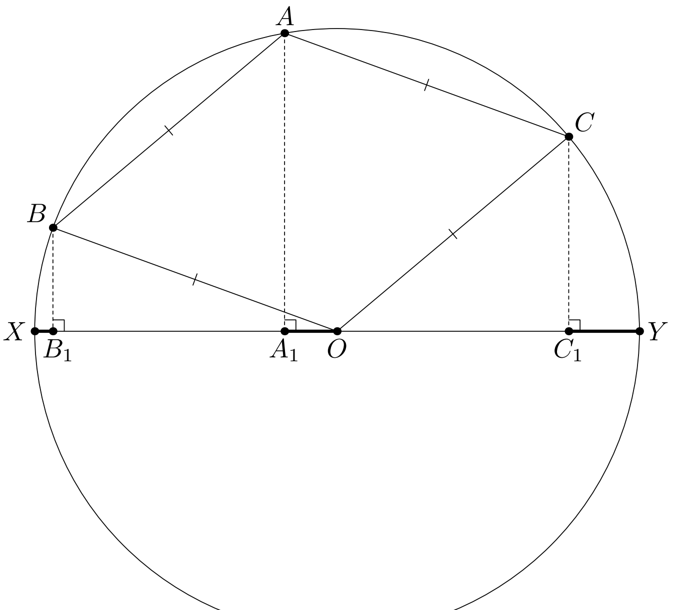

Рис. 10–11.1

Из условия следует, что $ABOC$ — ромб (см. рис. 10–11.1). Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Заметим, что $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$. Поскольку проекции равных векторов равны, то $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{C_1A_1}$. Кроме того, $\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{OY}$.

Следовательно, $\overrightarrow{XB_1} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{C_1O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1Y} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{C_1Y}$, что и требовалось.

Второй способ. Заметим, что $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{YC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{YC}$. Осталось использовать, что проекции равных векторов равны.

Комментарий. Возможны также решения, использующие разбор различных случаев расположения диаметра и равенство треугольников или тригонометрические функции.

2. (*Д. Прокопенко*) В остроугольном треугольнике ABC: O — центр описанной окружности ω, P — точка пересечения касательных к ω, проведённых через точки B и C. Продолжение медианы AM пересекает окружность ω в точке D. Докажите, что точки A, D, P и O лежат на одной окружности.

Решение. *Первый способ.* Докажем, что $AM \cdot MD = OM \cdot MP$, откуда и будет следовать утверждение задачи. Заметим, что по свойству хорд окружности $AM{\cdot}MD = BM{\cdot}MC = BM^2$ (см. рис. 10–11.2а). С другой стороны, в прямоугольном треугольнике OBP выполняется равенство $BM^2 = OM \cdot MP$. Итак, $AM \cdot MD = OM \cdot MP$, то есть точки A, D, P и O лежат на одной окружности.

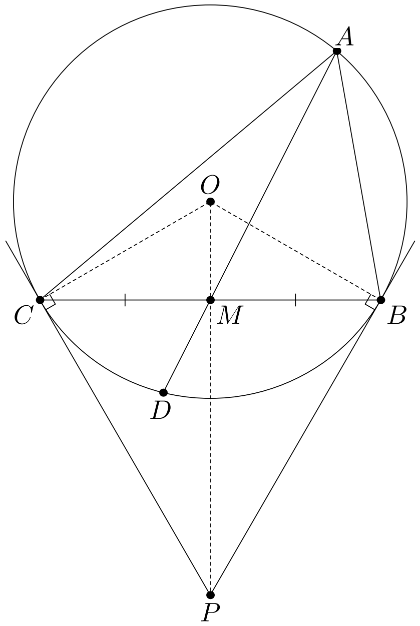

Рис. 10–11.2а

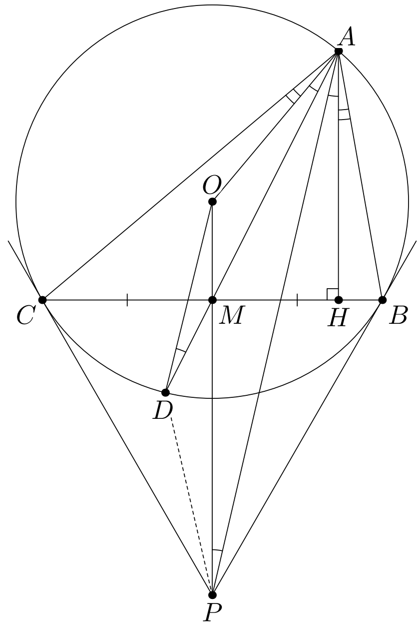

Рис. 10–11.2б

Второй способ. Докажем, что $\angle ODA = \angle OPA$, откуда и будет следовать утверждение задачи. Пусть AH — высота треугольника ABC (см. рис. 10–11.2б). Тогда $\angle OPA = \angle PAH$ в силу параллельности прямых. Кроме того, $\angle ODA = \angle OAD$, а $\angle OAC = \angle BAH = 90^\circ - \angle ABC$.

Воспользуемся основным свойством симедианы (прямой, симметричной медиане относительно биссектрисы).

Симедиана треугольника ABC, проведенная из вершины A, проходит через точку пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, проведенных в точках B и C.

В данном случае AP — симедиана треугольника ABC, то есть $\angle CAD = \angle BAP$. Следовательно, $\angle OAD = \angle PAH$, откуда и следует равенство углов ODA и OPA.

Комментарий. Про симедиану и её свойства можно прочитать, например, здесь: https://www.geometry.ru/articles/symmedian_blinkov.pdf.

3. (*Е. Бакаев*) Продолжения противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q. На сторонах $ABCD$ отметили точки (по одной на стороне), являющиеся вершинами параллелограмма со стороной, параллельной PQ. Докажите, что точка пересечения диагоналей этого параллелограмма лежит на одной из диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

Решение. Без ограничения общности можно рассмотреть расположение точек, при котором прямая AC пересекает отрезок PQ.

Пусть $MKLN$ — параллелограмм, стороны MK и LN которого параллельны PQ (см. рис. 10–11.3). Докажем, что его центр симметрии лежит на диагонали AC. Это можно сделать по-разному.

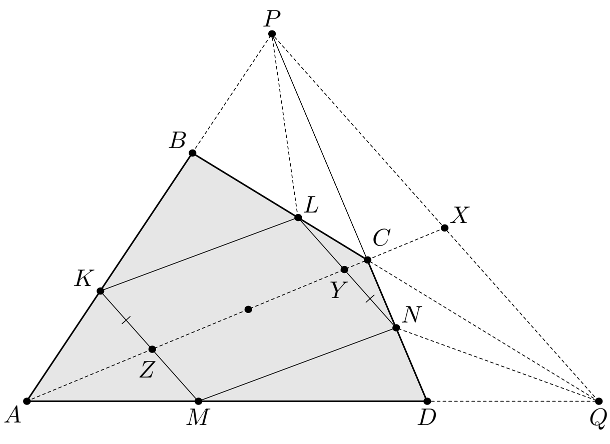

Рис. 10–11.3

Первый способ. Пусть прямая AC пересекает отрезки PQ, LN и KM в точках X, Y и Z соответственно. Докажем, что $ZK = YN$, откуда и будет следовать утверждение задачи. Рассмотрим трапецию $LNQP$. Используя подобие треугольников, получим: $PX : YN = PC : CN = PQ : LN$. Аналогично, используя параллельность KM и PQ, получим, что $PX : KZ = PA : KA = PQ : KM$. Учитывая равенство KM и LN, получим требуемое.

Второй способ. Рассмотрим гомотетию с центром в точке C и коэффициентом $k_1 = -\frac{PQ}{LN}$, переводящую L в Q, а N — в P. Также рассмотрим гомотетию с центром в точке A с коэффициентом $k_2 = \frac{MK}{PQ}$, переводящую P в K, а Q — в M. При композиции этих двух гомотетий точка L переходит в M, а N — в K. Кроме того, композицией таких гомотетий является гомотетия с коэффициентом $k = k_1 \cdot k_2 = -1$, то есть центральная симметрия. Но центры этих трех гомотетий должны лежать на одной прямой, то есть точка пересечения диагоналей параллелограмма лежит на прямой AC.

Комментарий. Также возможны решения, использующие аффинные преобразования. Указанный параллелограмм можно перевести в квадрат. Далее можно воспользоваться, например, методом координат, выбрав в качестве осей прямые, содержащие диагонали получившегося квадрата. Про аффинные преобразования можно прочитать, например, Я. П. Понарин "*Элементарная геометрия*", том 1, глава 2.

4. (*Ю. Блинков*) Нарисован остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, описанная около него окружность и её центр O. Также отмечена середина стороны AB. Пользуясь только линейкой (без делений), постройте ортоцентр треугольника, проведя не более 6 линий.

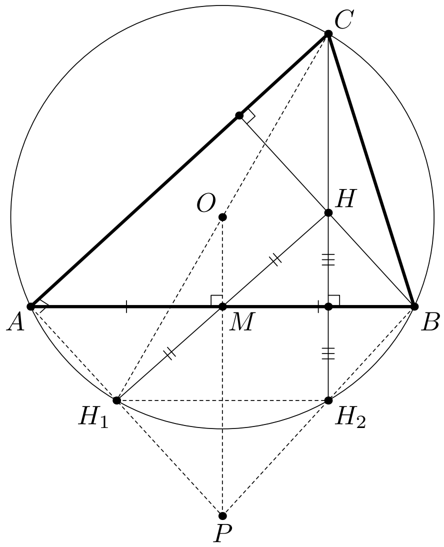

Рис. 10–11.4

Решение. Пусть M — середина AB, H — ортоцентр, H_1 — точка, симметричная H относительно точки M, H_2 — точка, симметричная H относительно прямой AB (см. рис. 10–11.4). Заметим, что для построения точки H достаточно уметь строить точки H_1 и H_2, так как H будет являться пересечением прямых CH_2 и MH_1.

Воспользуемся следующими известными фактами:

1) *Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника и диаметрально противоположны его вершинам.*

2) *Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.*

Кроме того, в обозначениях задачи, прямая H_1H_2 параллельна AB по теореме о средней линии треугольника, то есть точки H_1 и H_2, указанные в фактах 1 и 2, симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB.

Отсюда вытекает способ построения:

1) Строим диаметр CO, то есть точку H_1 (первая линия).

2) Строим прямые AH_1 и OM и точку P на пересечении (вторая и третья линии).

3) Строим прямую BP и ее пересечение H_2 с окружностью (четвёртая линия).

4) Строим H как пересечение CH_2 и MH_1 (пятая и шестая линии).

Комментарий. 1. Симметрия точек H_1 и H_2 также следует из симметрии прямых CO и CH относительно биссектрисы угла C.

2. Похожим способом можно быстро построить, например, симедиану треугольника и точку пересечения касательных к его описанной окружности.

5. (*И. Кухарчук*) Окружность ω касается внутренним образом окружности Ω в точке C. Хорда AB окружности Ω касается ω. Хорды CF и BG окружности Ω пересекаются в точке E, лежащей на ω. Докажите, что окружность, описанная около треугольника CGE, касается прямой AF.

Решение. *Первый способ.* Пусть K — точка касания хорды AB с окружностью ω, Y — точка пересечения луча CK и окружности Ω, X — точка пересечения прямых AF и GY (см. рис. 10–11.5а). Рассмотрим указанное на рисунке расположение точек (при другом расположении доказательство аналогично).

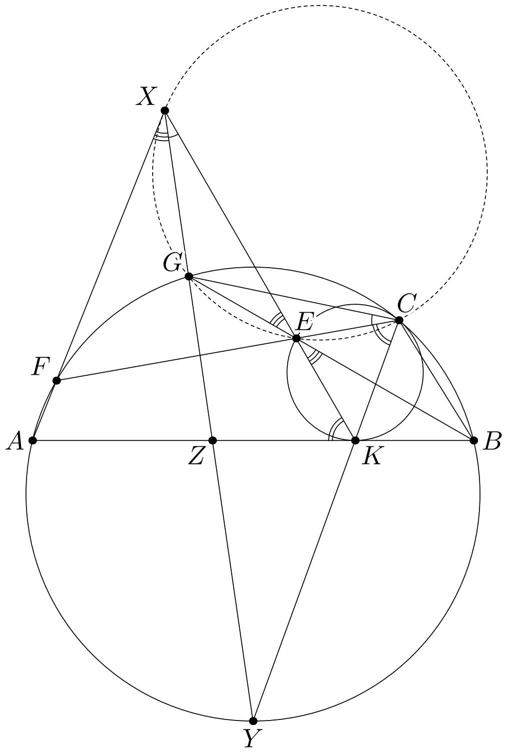

Рис. 10–11.5а

Докажем, что: 1) X, E и K лежат на одной прямой;

2) AX — касательная к окружности, описанной около треугольника XEG;

3) точка X лежит на окружности, описанной около треугольника CGE.

Заметим, что из этих трех фактов и будет следовать утверждение задачи.

Докажем первый факт. Рассмотрим замкнутую ломаную $ABGYCFA$, вершины которой лежат на окружности Ω.

Воспользуемся теоремой Паскаля:

Если вершины шестизвенной замкнутой ломаной лежат на окружности, то точки пересечения прямых, содержащих противоположные звенья ломаной, лежат на одной прямой.

В данном случае, лежат на одной прямой точки пересечения AB и YC, BG и CF, AF и GY, то есть точки K, E и X.

Теперь докажем второй факт. Заметим, что $\angle EKA = \angle ECK$, как угол между касательной и хордой. Учитывая факт 1, получим: $\angle XEG = \angle BEK = \angle EKA - \angle EBK = \angle FCY - \angle GBA = 0{,}5 \cdot (\smile FY - \smile AG) = 0{,}5 \cdot (\smile AY - \smile FG) = \angle FXG$, используя угол между секущими. Следовательно, AX — касательная к окружности, описанной около треугольника XEG.

И, наконец, докажем третий факт. Пусть Z — точка пересечения AB и XY. Воспользуемся тем, что Y — середина дуги AB (лемма Архимеда). Используя также угол между хордами, получим: $\angle GXE = \angle ZXK = \angle YZK - \angle XKZ = \angle YZK - \angle FCY = 0{,}5(\smile BY + \smile AG) - 0{,}5 \smile FY = 0{,}5 \smile GY - 0{,}5 \smile FY = 0{,}5 \smile GF = \angle GCF = \angle GCE$, то есть точки G, X, E и C лежат на одной окружности.

Второй способ. Пусть O — центр ω, O_1 — центр Ω, D — точка пересечения BO с Ω, O' — точка пересечения FD и серединного перпендикуляра к CE (см. рис. 10–11.5б). Докажем, что O' — центр окружности описанной около треугольника CGE. Пусть $\angle COO' = \alpha$. Тогда $\angle OCF = 90^\circ - \alpha$, а $\angle CO_1F = 2\alpha$, то есть $\angle CDF = 180^\circ - \alpha$, откуда $\angle CDO' = \alpha$. Следовательно, C, D, O, O' лежат на одной окружности, откуда $\angle ODC = \angle OO'C$ и $\angle BOC = \angle DO'C$. Кроме того, $\angle EGC = \angle BGC = \angle BDC = \angle OO'C = 0{,}5\angle EO'C$, следовательно, G лежит на окружности γ с центром O', проходящей через точки C и E. Осталось показать, что окружность γ касается прямой AF. Для этого докажем, что длина перпендикуляра $O'S$, проведённого из O' к прямой AF, равна радиусу окружности γ, то есть $O'C$. Заметим, что $\angle DBC = \angle DFC$, откуда, учитывая равенство $\angle BOC = \angle DO'C$, получим подобие треугольников CFO' и CBO. Следовательно, $CO : OB = O'C : O'F$. Поскольку CO – радиус ω, то это отношение равно синусу угла OBA. Осталось заметить, что $\angle OBA = \angle DBA = \angle O'FS$, то есть $O'S = O'C$, что и требовалось.

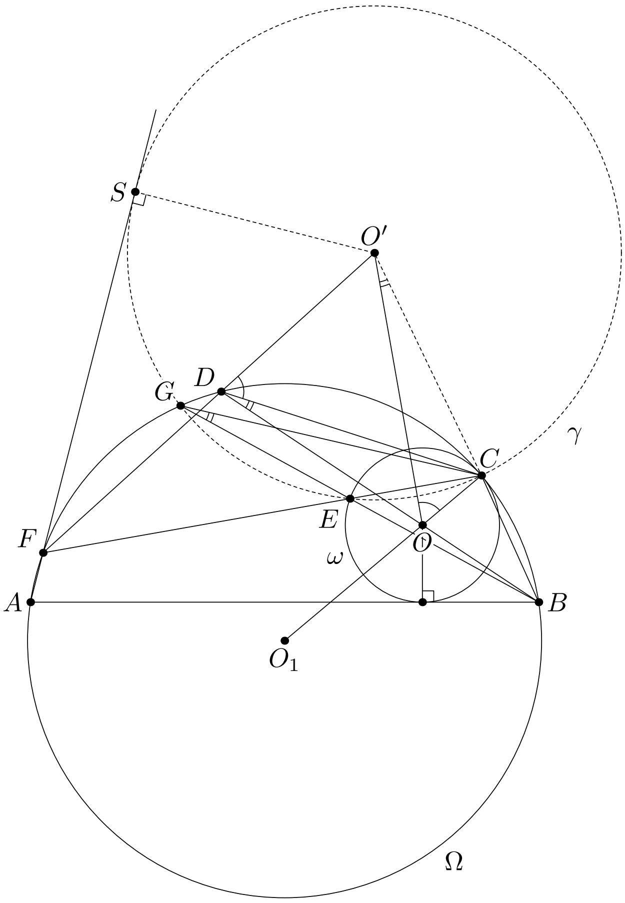

Рис. 10–11.5б

6. (*Ю. Блинков*) В тетраэдре отрезки, соединяющие середины высот с ортоцентрами граней, к которым проведены эти высоты, пересекаются в одной точке. Докажите, что в таком тетраэдре все грани равны или найдутся перпендикулярные ребра.

Решение. Докажем, что если в таком тетраэдре перпендикулярных рёбер нет, то указанные отрезки будут делиться пополам точкой их пересечения, а эта точка совпадёт с точкой пересечения медиан тетраэдра, а также с центром описанной около него сферы. Обозначим ортоцентр первой грани — $1a$, а середину высоты тетраэдра, проведённой к этой грани — $1b$. Для остальных граней обозначения аналогичны. Заметим, что пары точек $2a$, $1b$ и $1a$, $2b$ лежат в плоскостях α и β соответственно, перпендикулярных одному и тому же ребру (см. рис. 10–11.6а). С другой стороны, поскольку отрезки пересекаются, эти четыре точки лежат в одной плоскости γ.

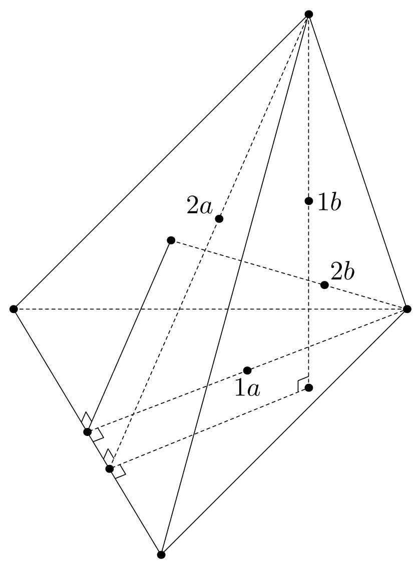

Рис. 10–11.6а

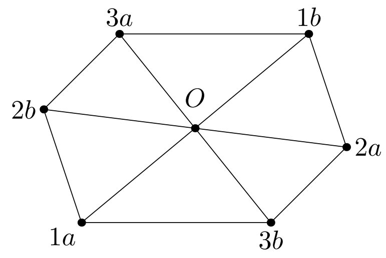

Рис. 10–11.6б

Если плоскости α и β совпадают, то в тетраэдре есть пара перпендикулярных противолежащих рёбер.

Если же плоскости α и β параллельны, то γ пересекает их по параллельным прямым, то есть отрезок $2a1b$ параллелен отрезку $1a2b$.

Аналогично рассмотрим ещё две пары таких отрезков.

Пусть это, например, $1a3b$ и $1b3a$, а также $3b2a$ и $2b3a$ (см. рис. 10–11.6б). Тогда эти отрезки попарно параллельны, причем $1a1b$; $2a2b$ и $3a3b$ пересекаются в точке O.

Тогда треугольники $O1a2b$ и $O1b2a$ подобны (аналогично — ещё для двух пар). Докажем, что треугольники равны, то есть коэффициент подобия равен 1.

Пусть это не так и, например, $1a2b > 1b2a$. Тогда $O1a > O1b$, откуда, используя подобие других треугольников, $1a3b > 1b3a$. Следовательно, $O3b > O3a$, то есть $3b2a > 3a2b$, откуда $O2a > O2b$, то есть $1b2a > 1a2b$. Противоречие.

Итак, O — середина указанных отрезков. Рассмотрим плоскость, содержащую отрезок $1a1b$ и проходящую через вершину A тетраэдра $ABCD$. Пусть H — основание высоты, A_1 — точка пересечения AO с гранью BCD (см. рис. 10–11.6в).

Используя, например, теорему Фалеса, получим, что A_1 делит отрезок $1aH$ в отношении $1:2$ (считая от $1a$), а O делит AA_1 в отношении $3:1$ (считая от A).

Рассуждая аналогично, получим, что O делит отрезки BB_1, CC_1 и DD_1 в таком же отношении, то есть является центром тяжести тетраэдра, а, например, точка A_1 — точкой пересечения медиан треугольника BCD.

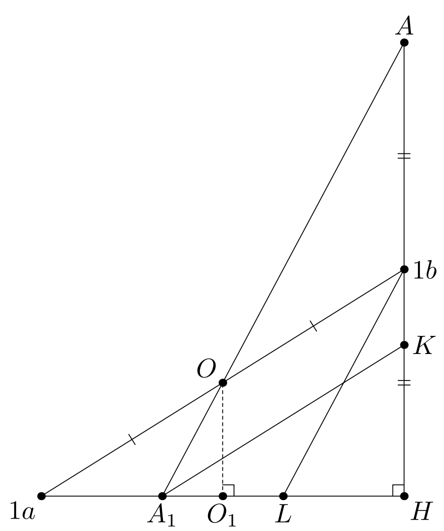

Рис. 10–11.6в

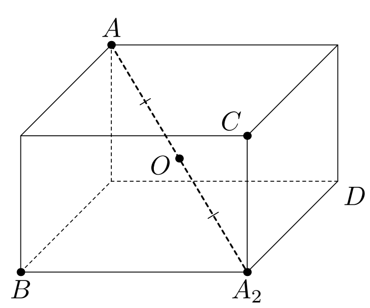

Рис. 10–11.6г

Докажем, что O — центр описанной сферы. Для этого достаточно доказать, что её проекция на плоскость любой грани является центром описанной окружности этой грани. Пусть O_1 — проекция O на плоскость BCD (см. рис. 10–11.6в). Тогда O_1 — середина отрезка $1aH$. Но A_1 делит отрезок $1aH$ в отношении $1 : 2$ (считая от $1a$), то есть A_1 делит $1aO_1$ в отношении $2 : 1$, считая от точки $1a$. Поскольку $1a$ — ортоцентр грани, а A_1 — точка пересечения медиан, то O_1 — центр описанной окружности. Аналогично для других граней, то есть O — центр описанной сферы.

Осталось доказать, что в тетраэдре, в котором центр тяжести совпадает с центром описанной сферы, равны все грани.

Это можно сделать, например, так. Рассмотрим для данного тетраэдра описанный параллелепипед и докажем, что он прямоугольный (см. рис. 10–11.6г). Поскольку диагональ AA_2 параллелепипеда проходит через точку пересечения медиан грани BCD (для других диагоналей аналогично), то точка пересечения его диагоналей совпадет с точкой пересечения медиан тетраэдра, то есть с точкой O. Кроме того, O — центр описанной сферы, то есть диагонали параллелепипеда — диаметры этой сферы и все вершины параллелепипеда лежат на этой сфере. Следовательно, параллелепипед — прямоугольный, то есть грани тетраэдра — равные треугольники, что и требовалось.

Комментарий. Тетраэдр, грани которого равны, называется *равногранным* (или *полуправильным*). О свойствах и признаках такого тетраэдра см. например, Я. П. Понарин "*Элементарная геометрия*", том 2, глава 6.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский.